LAMBERTO CESARI (*)

Sulle superficie di Fréchet. (**)

Come è noto la nozione di superficie di FRÉCHET ([1]) sorge dal concetto di equivalenza secondo FRÉCHET di trasformazioni continue, concetto questo molto più generale di quello di LEBESGUE. È pure noto che l'area di LEBESGUE di una superficie è invariante per rappresentazioni equivalenti secondo FRÉCHET della superficie stessa e perciò dipende soltanto dalla superficie e non dalla sua rappresentazione.

Si dice problema di rappresentazione delle superficie di FRÉCHET il problema di determinare, se ne esistono, rappresentazioni di una data superficie che godono di determinate proprietà nella classe di tutte le rappresentazioni — tra loro equivalenti secondo FRÉCHET — della superficie stessa; in particolare rappresentazioni per le quali l'area di LEBESGUE sia data dall'integrale classico. Quest'ultimo problema è in notevole relazione con problemi classici, come quelli di DIRICHLET e PLATEAU ([2]).

(*) Professore o. della Università di Bologna. Indirizzo: Via Castiglione, 1 - Bologna (Italia).

(**) Lavoro ricevuto il 20-X-1949.

([1]) Cfr. T. RADÓ, *Length and area*. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, Vol. XXX (1948).

([2]) Cfr., anche per la bibliografia, L. CESARI, *a*) *Sulla quadratura delle superficie in forma parametrica*. Bollettino Unione Mat. Italiana, ser. II, A. 4, 109-117 (1942); *b*) *Criteri di uguale continuità ed applicazioni alla quadratura delle superficie*. Annali Scuola Normale Sup. Pisa, ser. II, **12**, 61-84 (1943); *c*) *Un complemento alla nota « Criteri di uguale continuità, ecc.*. Rend. Accad. Lincei, ser. VIII, **1**, 292-296 (1946); *d*) *Sulla rappresentazione delle superficie continue di area finita secondo* LEBESGUE. Rend. Istituto Lombardo Scienze e Lettere, **79**, 15-45 (1945-46); *e*) *Rappresentazione quasi conforme delle superficie continue*. Rend. Accad. Lincei, ser. VIII, **1**, 509-515 (1946); *f*) *Parametrizzazione delle superficie continue di area finita secondo* LEBESGUE. Annali di Matematica, ser. IV, **26**, 301-375 (1947); *g*) *On the representation of surfaces*. Amer. Journal of Mathematics, 1950.

Nel presente lavoro, richiamate (§ 1) varie definizioni e note proprietà fondamentali delle superficie di FRÉCHET e dell'area di LEBESGUE, stabilisco (§ 2) vari teoremi di equivalenza secondo FRÉCHET di trasformazioni continue.

Tali teoremi sono utili in varie applicazioni. Una prima applicazione è fatta nel presente lavoro (§ 3) ove, per una nuova via, dimostro teoremi di rappresentazione per superficie chiuse partendo, come già in un mio precedente lavoro ([3]), da teoremi noti di rappresentazione delle superficie aperte non degeneri e di tipo A. Un'altra applicazione, alla soluzione generale del cosidetto problema debole di GEÖCZE, sarà fatta in un successivo lavoro ([4]).

§ 1. - Generalità sulle superficie di Fréchet. ([5])

1. - Indicheremo con $u = (u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(n)})$ il punto generico di uno spazio euclideo E_n e con $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)})$ il punto generico di uno spazio euclideo E_m. Indicheremo con $\{u, v\}$, $\{x, y\}$ le distanze euclidee tra punti u, v di E_n, x, y di E_m. Sia $A \subset E_n$ un insieme chiuso, connesso, localmente connesso e limitato. Diremo A_0 l'insieme dei punti interni di A (in E_n) e A^* la frontiera di A. Ogni trasformazione $x = T(u)$, $u \in A$, $x \in E_m$, definita per ogni $u \in A$, continua, univoca (non necessariamente biunivoca) verrà indicata anche con una qualunque delle notazioni T, (T, A), T: $x = x(u)$, $u \in A$, e la si dirà semplicemente una *trasformazione*. Diremo che due trasformazioni (T_1, A_1), (T_2, A_2) sono uguali e scriveremo $T_1 = T_2$ se esse sono identiche, cioè se $A_1 = A_2$ e $T_1(u) = T_2(u)$ per ogni $u \in A_1 = A_2$.

Data la trasformazione (T, A) e un insieme $A' \subset A$ indicheremo con (T, A') la trasformazione subordinata da T su A'.

2. - Sia (T, A) una data trasformazione. Per ogni $\delta > 0$ sia $\omega(\delta)$ l'estremo superiore delle distanze $\{T(u_1), T(u_2)\}$ per ogni coppia di punti $u_1 \in A$, $u_2 \in A$, con $\{u_1, u_2\} \leqslant \delta$. Diremo che la funzione non negativa, monotona non decrescente $\omega(\delta)$, $\delta > 0$, è il *modulo di continuità* della trasformazione T e per le ipotesi fatte su A e T, risulta $\omega(0+0) = 0$. Se $I \subset A$ è un sottoinsieme di A, sia $\eta(I)$ l'estremo superiore delle distanze $\{T(u_1), T(u_2)\}$ per ogni coppia

---

([3]) Loc. cit. in ([2]), *f*), pp. 342-350.

([4]) L. CESARI, *Sul problema di* GEÖCZE, nel prossimo fascicolo di questa Rivista. Per comodità richiamo, nel § 1 del presente lavoro, anche varie definizioni e proprietà che verranno usate solo nel prossimo scritto ora menzionato.

([5]) Per le definizioni e i teoremi richiamati nel presente paragrafo si confronti loc. cit. in ([1]) e in ([2]).

di punti $u_1 \in I$, $u_2 \in I$. Diremo $\eta(I)$ l'*oscillazione* della T su I. Se $\delta(I)$ è il diametro di I, allora $\eta(I) \leqslant [\delta(I)]$. Diremo B l'insieme $T(A)$ di tutti i punti $x \in E_m$ con $x = T(u)$, $u \in A$. Diremo che T è costante su un insieme I se $\eta(I) = 0$.

3. – Per ogni punto $x \in B$ diremo insieme inverso $T^{-1}(x)$ di x l'insieme di tutti i punti $u \in A$ tali che $T(u) = x$. Per ogni $x \in B$ l'insieme $T^{-1}(x)$ è chiuso e perciò i suoi componenti sono continui $g \subset A$. Diremo G, o $G(T, A)$ l'insieme di tutti i continui $g \subset A$ che sono componenti di qualche insieme $T^{-1}(x)$ con $x \in B = T(A)$. I continui g di G sono i continui massimali $g \subset A$ sui quali T è costante.

4. – Diremo che la trasformazione T è *monotona* se, per ogni $x \in B$ l'insieme $T^{-1}(x)$ è un continuo. Diremo T *puntiforme* (in inglese *light*) se, per ogni $x \in B$, i componenti g dell'insieme $T^{-1}(x)$ sono tutti singoli punti di A. Diremo T un *omeomorfismo* se 1) T è biunivoca, cioè per ogni $x \in B$ l'insieme $T^{-1}(x)$ è costituito di un solo punto $u \in A$ e perciò T è dotata di inversa T^{-1}; 2) T è continua insieme alla sua inversa.

5. – Nel presente lavoro ci limitiamo ai soli casi in cui A è 1) un arco semplice orientato, 2) una curva semplice chiusa orientata, 3) una regione chiusa di JORDAN di ordine di connessione ν sulla quale sia fissata una indicatrice positiva; 4) una superficie semplice e chiusa sulla quale sia fissata una indicatrice positiva. Diremo *omeomorfismo* Ω tra due insiemi A, A' come 1), 2), 3), 4) quegli omeomorfismi che conservano l'orientamento. Nel caso 2 potrà trattarsi anche di regioni di JORDAN poste sopra una superficie semplice e chiusa.

Sugli archi semplici sui quali è già fissato un parametro converremo, di solito, di assumere come positivo l'orientamento corrispondente al verso crescente del parametro; sulle regioni di JORDAN del piano $E_2 \equiv (u^{(1)}, u^{(2)})$ l'indicatrice positiva sia quella corrispondente all'ordine dei punti $(0, 0)$, $(1, 0)$ $(0, 1)$ sul triangolo avente gli stessi vertici (antiorario); sulle superficie semplici e chiuse l'indicatrice positiva sia quella corrispondente all'ordine dei seguenti punti $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ sulla periferia del triangolo curvilineo avente gli stessi vertici sulla sfera unità (sinistrorsa). Se A è una regione di JORDAN di ordine di connessione ν, se la frontiera A^* di A è costituita delle curve semplici e chiuse α_0 (frontiera esterna), α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ (frontiere interne), intenderemo che α_0 sia orientata in senso antiorario e α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ in senso orario. Per semplicità supporremo di solito, nel caso 1) $A = I$, I segmento unitario; nel caso 2) $A = C^*$, C^* circonferenza del cerchio unità C; nel caso 3) se $\nu = 0$, $A = C$; nel caso 4) $A = \mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}$ sfera unità.

6. – Diremo che due trasformazioni (T_1, A_1), (T_2, A_2) sono *equivalenti secondo* FRÉCHET, o *equivalenti*, e scriveremo $T_1 \sim T_2$, o $(T_1, A_1) \sim (T_2, A_2)$, se per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un omeomorfismo Ω (n. 5) tra A_1 e A_2 tale che F) se $u_1 \in A_1$, $u_2 \in A_2$, $u_2 = \Omega(u_1)$, allora $\{ T_1(u_1), T_2(u_2) \} \leqslant \varepsilon$. Si noti che 1) $T \sim T$; 2) se $T_1 \sim T_2$ anche $T_2 \sim T_1$; 3) se $T_1 \sim T_2$, $T_2 \sim T_3$, anche $T_2 \sim T_3$. Un caso particolare notevole è l'equivalenza secondo LEBESGUE. Diremo che T_1 e T_2 sono equivalenti secondo LEBESGUE se esiste un omeomorfismo Ω_0 tra A_1 e A_2 tale che, se $u_1 \in A_1$, $u_2 \in A_2$, $u_2 = \Omega_0(u_1)$, allora $T_1(u_1) = T_2(u_2)$. Trasformazioni equivalenti secondo LEBESGUE lo sono anche secondo FRÉCHET, ma il viceversa non è vero.

7. – Date due trasformazioni (T_1, A_1), (T_2, A_2), diremo *distanza* secondo FRÉCHET $\| T_1, T_2 \|$ tra esse l'estremo inferiore dei numeri $\varepsilon > 0$ per i quali esiste un omeomorfismo Ω tra A_1 e A_2 avente la proprietà F) del n. 6. Si noti che 1) $\| T_1, T_2 \| = 0$ solo e soltanto se $T_1 \sim T_2$; 2) $\| T_1, T_2 \| = \| T_2, T_1 \|$; 3) $\| T_1, T_2 \| \leqslant \| T_1, T_3 \| + \| T_3, T_2 \|$; 4) se $T_1 \sim T_1'$, $T_2 \sim T_2'$, allora $\| T_1, T_2 \| = \| T_1', T_2' \|$.

8. – Porremo in una unica classe tutte le trasformazioni (T, A): $x = x(u)$, $u \in A$, tra loro equivalenti (nel senso di FRÉCHET) (n. 6) e diremo che le trasformazioni della classe sono tutte le rappresentazioni di una *curva* L nel caso 1), di una *curva* $\mathfrak{L}$ nel caso 2), di una *superficie* S nel caso 3), di una superficie $\mathfrak{S}$ nel caso 4 (n. 5). Con le notazioni L: (T, C), $\mathfrak{L}$: (T, C^*), S: (T, J), $\mathfrak{S}$: $(T, \mathfrak{C})$ intenderemo, in particolare, che le trasformazioni a fianco indicate sono elementi della classe che definisce L, $\mathfrak{L}$, S, $\mathfrak{S}$. Tenendo presenti le definizioni del n. 5 e del n. 6, è chiaro che gli enti ora definiti sono enti *orientati*.

Si noti che, in base alle stesse definizioni, le superficie S: (T, C), S': (T', C'), con $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)})$, $u = (u^{(1)}, u^{(2)})$, T: $x^{(1)} = u^{(1)}$, $x^{(2)} = u^{(2)}$, $x^{(3)} = 0$, $u \in C$, T': $x^{(1)} = u^{(1)}$, $x^{(2)} = -u^{(2)}$, $x^{(3)} = 0$, $u \in C$, sono superficie distinte, T e T' *non* sono equivalenti e $\| T, T' \| \neq 0$. Si notino pure, ad esempio, le superficie $\mathfrak{S}$: $(\mathfrak{T}, \mathfrak{C})$, S: (T, C) con $\mathfrak{T}$: $x = v$, $v = (v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)})$, $v \in \mathfrak{C}$, T: $\rho = 1$, $\theta = \pi r$, $\varphi = \omega$, $(r, \omega) \in C$ [(ρ, θ, φ), (r, ω) sistemi di coordinate polari nello spazio $x^{(1)}x^{(2)}x^{(3)}$ e nel piano $u^{(1)}u^{(2)}$]. $\mathfrak{S}$ e S sono superficie distinte e non è neppure definita la distanza tra T e $\mathfrak{T}$.

9. – Ci interessano alcuni casi particolari ([6]). Sia $A = J$, J regione *semplice* e orientata di JORDAN ($\nu = 0$) del piano E_2. Diremo che la trasformazione (T, J) è *aperta non degenere* se α) per ogni continuo g di $G(T, J)$ l'insieme

---

([6]) Cfr. loc. cit. in ([2]), *b*, *d*, *e*, *f*.

aperto $J_0 - J_0 g$ è connesso; β) nessun continuo g di $G(T, J)$ contiene J^*. Se T è aperta non degenere e $T' \sim T$, anche T' ha la stessa proprietà. Diremo che una superficie S è *aperta non degenere* se ogni sua rappresentazione (T, J) è aperta non degenere.

Diremo che la trasformazione (T, J) è di *tipo A* se α') per ogni continuo g di $G(T, J)$ l'insieme aperto $E_2 - g$ è connesso. Se T è di tipo A e $T' \sim T$, anche T' ha la stessa proprietà. Diremo che una superficie S è di *tipo A* se ogni sua rappresentazione (T, J) è di tipo A.

Diremo che una trasformazione (T, J) è *chiusa non degenere* se α) per ogni continuo g di $G(T, J)$ l'insieme aperto $J_0 - J_0 g$ è connesso; β') esiste un continuo g_0 di $G(T, J)$ contenente J^* ma non ricoprente J. Se T è chiusa non degenere e $T' \sim T$, anche T' ha la stessa proprietà. Diremo che una superficie S è *chiusa non degenere* se ogni sua rappresentazione (T, J) è chiusa non degenere. Si noti che T è costante su J^*. Le precedenti definizioni valgono anche se J è una regione *semplice* di JORDAN sopra una superficie semplice e chiusa.

Diremo che una trasformazione $(\mathfrak{T}, \mathfrak{C})$ è *chiusa non degenere* se α'') per ogni continuo g di $G(\mathfrak{T}, \mathfrak{C})$ l'insieme $\mathfrak{C} - \mathfrak{C}g$, aperto relativamente a $\mathfrak{C}$, è connesso; β'') nessun continuo g di $G(\mathfrak{T}, \mathfrak{C})$ ricopre $\mathfrak{C}$. Se $\mathfrak{T}$ è chiusa non degenere e $\mathfrak{T}' \sim \mathfrak{T}$, anche $\mathfrak{T}'$ ha la stessa proprietà. Diremo che una superficie $\mathfrak{S}$ è *chiusa* non degenere se ogni sua rappresentazione $(\mathfrak{T}, \mathfrak{C})$ è chiusa non degenere. Se la superficie $\mathfrak{S}$: $(\mathfrak{T}, \mathfrak{C})$ è chiusa non degenere, se $\mathfrak{L}$ è una curva continua semplice e chiusa di $\mathfrak{C}$ su cui $\mathfrak{T}$ è non costante, allora $\mathfrak{L}$ divide $\mathfrak{C}$ in due regioni semplici di JORDAN J_1, J_2 e le superficie S_1: $(\mathfrak{T}, J_1)$, S_2: $(\mathfrak{T}, J_2)$ sono aperte non degenere o di tipo A.

10. – Abbiamo già indicato con C il cerchio $v^{(1)2} + v^{(2)2} \leqslant 1$ del piano $E_2 \equiv v^{(1)}v^{(2)}$ (cerchio unità) e con $\mathfrak{C}$ la superficie sferica $u^{(1)2} + u^{(2)2} + u^{(3)2} = 1$ dello spazio $E_3 \equiv u^{(1)}u^{(2)}u^{(3)}$ (sfera unità). Indicheremo con E_ν, E_σ gli emisferi $u^{(3)} \geqslant 0$, $u^{(3)} \leqslant 0$ di $\mathfrak{C}$, con q la circonferenza equatoriale $u^{(3)} = 0$ e con u_ν, u_σ i poli $u_\nu \equiv (0, 0, 1)$, $u_\sigma \equiv (0, 0, -1)$ di $\mathfrak{C}$. Diciamo ω il punto $(0, 0)$ di E_2, siano r la distanza $r = \{v, \omega\}$ e C, C_0 i cerchi $r \leqslant 1$, $r \leqslant 1/2$ del piano E_2 e sia τ la trasformazione monotona di C in $\mathfrak{C}$, $u = \tau(v)$, $v \in C$, $u \in \mathfrak{C}$, così definita: $\tau(v)$ si ottiene applicando a $v \in C$ l'omotetia di centro ω e rapporto 2 e successivamente la proiezione da u_σ su E_ν se $v \in C_0$; $\tau(v)$ si ottiene applicando a v sul piano E_2 l'omotetia di centro ω e rapporto $(1 - r)^{-1}$ (variabile con v) e la proiezione da u_σ su E_σ su $v \in C - C_0$; finalmente sia $\tau(C^*) = u_\sigma$. La trasformazione τ è continua in tutto C, trasforma ω nel polo u_ν e C^* nel polo u_σ. La sua inversa τ^{-1} non è univoca.

Data una trasformazione (T, C) costante su C^*, allora, posto $\mathfrak{T} = T\tau^{-1}$, la trasformazione $(\mathfrak{T}, \mathfrak{C})$ è univoca e continua su $\mathfrak{C}$; data una trasformazione

$(\mathfrak{T}, \mathfrak{C})$ qualsiasi (continua su $\mathfrak{C}$) allora, posto $T = \mathfrak{T}\tau$, la trasformazione (T, C) è univoca e continua su C e costante su C^*.

Diremo che le trasformazioni (T, C), $(\mathfrak{T}, \mathfrak{C})$ sono *associate*. Diremo che due superficie S, $\mathfrak{S}$ sono *associate* se esse ammettono simultanee rappresentazioni $S: (T, C)$, $\mathfrak{S}: (\mathfrak{T}, \mathfrak{C})$ tra loro associate. Si noti che, se $(T_1, C) \sim (T_2, C)$, se T_1 e T_2 sono costanti su C^* e $(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{C})$, $(\mathfrak{T}_2, \mathfrak{C})$ sono le loro trasformazioni associate, allora $\mathfrak{T}_1 \sim \mathfrak{T}_2$; al contrario date due trasformazioni $(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{C}) \sim \sim (\mathfrak{T}_2, \mathfrak{C})$ può accadere che le relative trasformazioni associate (T_1, C), (T_2, C) non siano equivalenti.

Se (T, C), $(\mathfrak{T}, \mathfrak{C})$ sono trasformazioni associate, T costante su C^* e l'una è chiusa non degenere, allora anche l'altra ha la stessa proprietà (n. 9).

11. – Lemma. *Se J_1, J_2 sono due regioni semplici di* Jordan, *se $(T_1, J_1) \sim \sim (T_2, J_2)$ sono date trasformazioni equivalenti, allora anche $(T_1, J_1^*) \sim (T_2, J_2^*)$.*

È immediata conseguenza delle definizioni.

La curva $\mathfrak{L}$: (T, C^*) si dice il *contorno* della superficie S: (T, C). In forza del Lemma essa non dipende dalla rappresentazione della superficie S.

12. – Siano date due trasformazioni equivalenti $(T, J) \sim (T', J')$, sia Ω_n, $n = 1, 2, \ldots$, una successione di omeomorfismi tra J e J' tali che, posto $u' = \Omega_n(u)$, $u \in J$, $u' \in J'$, risulti $\{T(u), T'(u')\} \leq 1/n$, siano u_1, u_2 due punti dati di J, siano $u'_{1n} = \Omega_n(u_1)$, $u'_{2n} = \Omega_n(u_2)$, $n = 1, 2, \ldots$, ed esistano i limiti $u'_{1n} \to u'_1$, $u'_{2n} \to u'_2$, $u'_1, u'_2 \in J'$, quando $n \to \infty$, infine esista un continuo $\gamma' \subset J'$ congiungente u'_1 e u'_2 sul quale T' è costante.

Lemma. *Esiste un continuo $\gamma \subset J$ congiungente u_1 con u_2 sul quale T è costante e $T(\gamma) = T'(\gamma')$.*

Dimostrazione. La proposizione è nota e rientra in teoremi generali. Una dimostrazione diretta è la seguente. J' è connesso in piccolo e perciò esistono certi continui $\gamma'_n \in J'$, $\gamma''_n \in J'$ congiungenti u'_{1n} con u'_1, u'_{2n} con u'_2 e i cui diametri tendono a zero con $\{u'_{1n}, u'_1\}$, $\{u'_{2n}, u'_2\}$. Se δ_n è il maggiore dei diametri di γ'_n e γ''_n, allora $\delta_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Sia k'_n il continuo $k'_n = \gamma' + + \gamma'_n + \gamma''_n$ e sia k_n il continuo di J che gli corrisponde per la Ω_n. Allora u_1 e u_2 appartengono a k_n per ogni n e quindi, per il teorema di Zoretti (7), l'insieme di accumulazione γ_0 dei continui k_n, $n = 1, 2, \ldots$, è un continuo $\gamma_0 \in J$ e contiene u_1 e u_2. Siano p_1 e p_2 due punti qualsiasi di γ_0, sia k un intero qualsiasi, siano $\omega(\delta)$, $\omega'(\delta)$ i moduli di continuità delle trasformazioni T, T'. Intanto esisteranno due continui k_{n_1}, k_{n_2} con $n_1 \geq k$, $n_2 \geq k$ e due punti

---

(7) Cfr. B. v. Kerékjártó, *Vorlesungen über Topologie*, I. Berlin, Springer, 1923, VII-270; particolarmente pag. 38.

$q_1 \in k_{n_1}$, $q_2 \in k_{n_2}$ tali che $\{p_1, q_1\} \leqslant 1/k$, $\{p_2, q_2\} \leqslant 1/k$. Se $r_1 = \Omega_{n_1}(q_1)$, $r_2 = \Omega_{n_2}(q_2)$, allora $r_1 \in k'_{n_1}$, $r_2 \in k'_{n_2}$ e quindi esistono due altri punti $s_1 \in \gamma$, $s_2 \in \gamma$ con $\{s_1, r_1\} \leqslant \delta_{n_1}$, $\{s_2, r_2\} \leqslant \delta_{n_2}$. È ora $\{T(p_1), T(p_2)\} \leqslant \{T(p_1), T(q_1)\} + \{T(q_1), T'(r_1)\} + \{T'(r_1), T'(s_1)\} + \{T'(s_1), T'(s_2)\} + \{T'(s_2), T'(r_2)\} + \{T'(r_2), T(q_2)\} + \{T(q_2), T(p_2)\} \leqslant \omega(1/k) + 1/n_1 + \omega'(\delta_{n_1}) + 0 + \omega'(\delta_{n_2}) + 1/n_2 + \omega(1/k)$, ove $n_1 \geqslant k$, $n_2 \geqslant k$. Poichè $\omega(+0) = 0$, $\omega'(+0) = 0$, l'ultima espressione tende a zero al tendere all'infinito di k. Pertanto $T(p_1) = T(p_2)$ qualunque siano i punti p_1, p_2 di γ_0. Ciò prova che T è costante sul continuo γ_0 contenente u_1, u_2.

13. – In armonia con ben note convenzioni [8] diremo che su una regione di JORDAN J è fissato un reticolato R se su J sono dati certi punti $u_1, u_2, \dots, u_m$ distinti, certe curve continue semplici aperte $l_1, l_2, \dots, l_n$, a due a due senza punti in comune oltre gli estremi, certe regioni di JORDAN $t_1, t_2, \dots, t_p$ e ogni curva l_j ha per estremi due punti u_i, ogni regione t_k ha il contorno t_k^* costituito di *tre* curve l_j e $[t_1, t_2, \dots, t_p]$ costituisce una suddivisione di J in regioni di JORDAN. Diremo che t_k sono i *triangoli* del reticolato, le curve l_j i *lati*, i punti u_i i *vertici*. Se $J^* \equiv (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_\nu)$ è il contorno di J, ciascuna delle curve α_h è composta di un numero finito di archi l_j. Intenderemo che ogni triangolo sia orientato secondo le convenzioni del n. 5. Analoghe definizioni valgono per i reticolati R su $\mathfrak{C}$ con l'avvertenza che il contorno è nullo.

Diremo che una superficie S [oppure $\mathfrak{S}$] è una *superficie poliedrica*, o una *poliedrica*, se essa *a*) ammette una rappresentazione (P, J) sopra una regione di JORDAN J (di dato ordine di connessione ν) [oppure $(\mathfrak{P}, \mathfrak{C})$ sopra la sfera unità], *b*) esiste su J [su $\mathfrak{C}$] un reticolato $R \equiv [t_1, t_2, \dots, t_p]$, *c*) per ogni triangolo t_i, $i = 1, 2, \dots, p$, esiste una trasformazione monotona T_i di t_i su un triangolo rettilineo Δ; *d*) posto $P_i = PT_i$ [$\mathfrak{P}_i = \mathfrak{P}T_i$], la trasformazione (P_i, Δ) è lineare su Δ e pertanto rappresenta su Δ un triangolo Δ_i, eventualmente ridotto ad un segmento o ad un punto, dello spazio E_m. Se S [opp. $\mathfrak{S}$] sono poliedriche, diremo loro area elementare $a(S)$ [$a(\mathfrak{S})$] la somma delle aree elementari dei triangoli Δ_i. Una rappresentazione di S, o $\mathfrak{S}$, avente le proprietà dette dicesi *tipica* per la poliedrica S [$\mathfrak{S}$].

Una trasformazione (P, J) si dice *quasi lineare* se esiste un reticolato R su J i cui triangoli t_k, $k = 1, 2, \dots, \nu$, sono rettilinei e se P è (continua in J) e lineare in ciascun triangolo t_k.

Ricordiamo qui che una trasformazione T definita sopra un segmento $I \equiv [a \leqslant u \leqslant b]$ si dirà quasi lineare se I si può dividere in un numero finito di parti su ciascuna delle quali T è lineare rispetto ad u. Analoga definizione

---

[8] Cfr. loc. cit. in [7], IV Absch.

se T è definita sopra una circonferenza C^* ove si assuma come parametro l'anomalia dei punti di C^*.

14. – Diremo area di LEBESGUE $L(S)$ di una supreficie S il numero $L(S) = \underline{\lim}\, a(P)$ per tutte le poliedriche P quando $\|P, S\| \to 0$. Diremo area di LEBESGUE di una superficie $\mathfrak{S}$ il numero $L(\mathfrak{S}) = \underline{\lim}\, a(\mathfrak{P})$ per tutte le poliedriche $\mathfrak{P}$ quando $\|\mathfrak{P}, \mathfrak{C}\| \to 0$.

Sappiamo che se $\| S_n, S\| \to 0$, allora $L(S) \leqslant \underline{\lim}_{n \to 0} L(S_n)$; se $\| \mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}\| \to 0$ allora $L(\mathfrak{S}) \leqslant \underline{\lim}_{n \to \infty} L(\mathfrak{S}_n)$. Se S, $\mathfrak{S}$ sono poliedriche allora $L(S) = a(S)$, $L(\mathfrak{S}) = a(\mathfrak{S})$.

15. – Data una trasformazione (T, J) della regione di JORDAN J in un insieme $T(J)$ dello spazio E_3, sia $[J_1,\ i = 1, 2, \ldots, n]$ una suddivisione di J in regioni di JORDAN ottenuta mediante m archi di JORDAN λ_j, $j = 1, 2, \ldots, m$. Poniamo S: (T, J), S_i: (T, J_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, l_j: (T, λ_j), $j = 1, 2, \ldots, m$.

Lemma. *Vale la relazione* $\sum_i L(S_i) \leqslant L(S)$ *e, se le curve* l_j *hanno proiesioni sui piani* $x^{(h)} = 0$, $h = 1, 2, 3$, *di misura nulla, allora* $\sum_i L(S_i) = L(S)$ (9).

Analogo Lemma vale per le superficie $\mathfrak{P}$. Tale Lemma ha una dimostrazione particolarmente semplice se T è costante su ciascuno degli archi λ_j (10).

Ricordiamo qui che superficie S o $\mathfrak{S}$ ridotte a curve [ad esempio S: (T, C) se T è costante su ciascuna retta $u^{(1)} =$ costante, oppure $\mathfrak{S}$: $(\mathfrak{T}, \mathfrak{C})$ se $\mathfrak{T}$ è costante su ogni parallelo di $\mathfrak{C}$] hanno area nulla.

16. – Siano S e $\mathfrak{S}$ superficie associate (n. 10), cioè ammettano rappresentazioni simultanee S: (T, C), T costante su C^*, $\mathfrak{S}$: $(\mathfrak{T}, \mathfrak{C})$, tra loro associate (n. 10). Allora $L(S) = L(\mathfrak{S})$. Ciò è una conseguenza dell'accennato caso particolare del precedente Lemma, ma può dimostrarsi anche direttamente con lo stesso ragionamento (11).

Sia J una regione di JORDAN di ordine di connessione ν del piano $u = (u^{(1)}, u^{(2)})$. I punti di J siano i punti di una regione semplice di JORDAN π_0 non interni a ν regioni semplici di JORDAN $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_\nu$, tutte interne a π_0 e a due a due senza punti interni o del contorno in comune. Sia (T, J) una trasformazione (continua in J) la quale risulti costante sulla frontiera π_1^* di π_1. Allora anche la trasformazione $(T_1, J + \pi_1)$ definita ponendo $T_1 = T$ in tutti

(9) L. CESARI, loc. cit. in (2), *f*, pag. 326.

(10) L. CESARI, *Una uguaglianza fondamentale per l'area delle superficie*. Memorie Accademia Italia, **14**, 891-951 (1944); particolarmente pag. 904.

(11) Cfr. loc. cit. in (10).

i punti di J e stabilendo che T_1 sia costante su tutto π_1 e $T_1(\pi_1) = T(\pi_1^*)$, è continua su $J + \pi_1$. Le regioni di JORDAN J e $J + \pi_1$ sono di ordini di connessione ν e $\nu - 1$ e pertanto non esiste alcun omeomorfismo tra esse. In conseguenza le trasformazioni (T, J), $(T_1, J + \pi_1)$ non sono equivalenti e le superficie di FRÉCHET S: (T, J), S_1: $(T_1, J + \pi_1)$ sono distinte. Tuttavia diremo che esse sono ***associate*** e, dal Lemma precedente risulta che $L(S) = L(S_1)$. Analogamente se J è costante su più di una delle curve π_i^*, $i = 1, 2, \dots, n$.

17. – Diremo che una trasformazione (T, J) ove J è una regione di JORDAN del piano $E_2 = v^{(1)}v^{(2)}$ è *quasi conforme* [12] in J se, posto T: $x^{(i)} = x^{(i)}(v^{(1)}, v^{(2)})$, $i = 1, 2, \dots, m$, $v = (v^{(1)}, v^{(2)}) \in J$, risulta

a) le funzioni $x^{(i)}(v^{(1)}, v^{(2)})$, $i = 1, 2, \dots, m$, sono assolutamente continue secondo TONELLI in J_0 [13];

b) le derivate parziali prime $x_k^{(i)} = \partial x^{(i)}/\partial v^{(k)}$, $k = 1, 2$, $i = 1, 2, \dots, m$, che esistono quasi ovunque in J_0, sono integrabili L^2 in J_0;

c) posto $E_{hk} = \sum_i x_h^{(i)} x_k^{(i)}$, $h, k = 1, 2$, risulta $E_{11} = E_{22}$, $E_{12} = 0$ quasi ovunque in J_0.

Diremo che una trasformazione (T, J), ove J è una regione di JORDAN della sfera $\mathfrak{C}$, è *quasi conforme* in J se, scegliendo il polo u_σ di $\mathfrak{C}$ fuori di J, la proiezione di (T, J) da u_σ sul corrispondente piano equatoriale è quasi conforme nel senso indicato sopra.

Valgono le seguenti proposizioni:

1. *Per ogni superficie S in E_3 aperta non degenere con $L(S) < +\infty$, esiste una rappresentazione (T, C) quasi conforme in C* [14].

2. *Per ogni superficie S in E_3 di tipo A con $L(S) < +\infty$, esiste una rappresentazione (T, C) tale che, se c_i, $i = 1, 2, \dots$, è un conveniente aggregato numerabile di cerchi $c_i \subset C$, a due a due disgiunti e i cui punti di accumulazione sono tutti su C^*, allora 2a) le superficie S_i: (T, c_i) sono aperte non degeneri; 2b) la rappresentazione T è quasi conforme su ciascuno dei cerchi c_i;*

---

[12] Cfr. L. CESARI, loc. cit. in [2], *b* e C. B. MORREY, *An analytic characterisation of surfaces of finite* LEBESGUE *area*. Amer. Journ. of Math., **57**, 692-702 (1935).

[13] Cioè assolutamente continue secondo TONELLI nell'insieme aperto J_0 formato dai punti interni ad J. Cfr. L. TONELLI, *Sur la semicontinuité des integrales doubles du Calcul de Variations*. Acta Mathematica, **53**, 325-346 (1929).

[14] C. B. MORREY, loc. cit. in [12]; L. CESARI, loc. cit. in [2], *b*. In questo secondo lavoro trovasi una dimostrazione della proposizione 1. fondata sul metodo diretto del Calcolo delle Variazioni. Al posto di C si può considerare il quadrato fondamentale $Q = (0, 1, 0, 1)$. Una proposizione analoga alla 1. è stata enunciata da C. B. MORREY per le superficie $\mathfrak{S}$ chiuse non degeneri.

$2c$) $\sum L(S_i) = L(S)$; $2d$) *ogni punto non interno ai cerchi c_i è congiunto a C^* da un continuo $\gamma \subset C$ su cui T è costante* [15].

Si noti che, se (T, C): $x^{(i)} = x^{(i)}(\xi, \eta)$, $i = 1, 2, 3$, $u = (\xi, \eta) \in C$, è non costante e quasi conforme, allora le funzioni $x^{(i)}(\xi, \eta)$, $i = 1, 2, 3$, sono a variazione limitata come funzioni di ξ [η] per quasi tutti i η [ξ]. Pertanto è sempre possibile scegliere poligonali chiuse su cui tali funzioni sono a variazione limitata e non tutte e tre costanti. Ad esse corrispondono su S curve *rettificabili* non ridotte ad un punto.

Analogamente, dato un punto u_0 interno a C, è possibile scegliere un arco semplice λ, interno a C, avente u_0 come punto interno (rispetto a λ) tale che T sia non costante su λ e le funzioni $x^{(i)}(\xi, \eta)$ siano a variazione limitata su ogni parte di λ non contenente u_0. Infatti, posto $u_0 = (\xi_0, \eta_0)$, si considerino due successioni $\xi_n \to \xi_0$, $\eta_n \to \eta_0$ tali che $\xi_n > \xi_{n+1}$, $\eta_n > \eta_{n+1}$ e tali che le funzioni $x^{(i)}(\xi_n, \eta)$, $x^{(i)}(\xi, \eta_n)$ siano a variazione limitata come funzioni della sola η o della sola ξ, $i = 1, 2, 3$, $n = 1, 2, \ldots$, e si considerino i segmenti congiungenti i punti (ξ_1, η_1), (ξ_1, η_2), (ξ_2, η_2), $(\xi_2, \eta_3), \ldots$. Analogamente si faccia considerare due successioni analoghe alle precedenti, con $\xi_n < \xi_{n+1}$, $\eta_n < \eta_{n+1}$. Tutti questi segmenti e il punto u_0 formano un arco di JORDAN λ avente le proprietà richieste [16]. All'arco λ corrisponde su S una curva avente le proiezioni sui piani fondamentali di misura nulla.

18. – Diremo che una superficie poliedrica P è *inscritta* nella superficie S se P ed S ammettono rappresentazioni simultanee P: (T', J'), S: (T, J) ove 1) J, J' sono regioni di JORDAN dello stesso ordine di connessione; 2) $J' \subset J$; 3) (T', J') è una rappresentazione tipica in J' (n. 13) per la poliedrica P, cioè esiste un reticolato R in J' aventi le proprietà dichiarate al n. 13; 4) nei vertici u_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, del reticolato R di J' si ha $T'(u_i) = T(u_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Se (T, J), (T', J') hanno le proprietà dette, diremo che esse sono rappresentazioni *tipiche* per le superficie S e P.

Diremo che una superficie poliedrica $\mathfrak{P}$ è *inscritta* nella superficie $\mathfrak{S}$ se $\mathfrak{P}$ ed $\mathfrak{S}$ ammettono rappresentazioni $\mathfrak{P}$: $(\mathfrak{T}' \mathfrak{C})$; $\mathfrak{S}$: $(\mathfrak{T}, \mathfrak{C})$ ove 1) $(\mathfrak{T}', \mathfrak{C})$ è una rappresentazione tipica (n. 13) per la poliedrica $\mathfrak{P}$, cioè esiste un reticolato R di $\mathfrak{C}$ avente le proprietà dichiarate al n. 13; 2) nei vertici u_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, del reticolato R di $\mathfrak{C}$ si ha $\mathfrak{T}'(u_i) = \mathfrak{T}(u_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

---

(15) L. CESARI, loc. cit. in (2), *d*, *e*, *f*. Anche qui si può considerare al posto di C il quadrato fondamentale Q.

(16) Cfr. loc. cit. in (2), *f*, pp. 345-346.

§ 2. - Teoremi di equivalenza.

19. - Lemma. *Siano A, B, regioni orientate di* JORDAN *del piano $u^{(1)}u^{(2)}$ e dello stesso ordine ν di connessione, siano α_i, β_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, \nu$, le curve semplici chiuse orientate costituenti la frontiera di A e B, α_0, β_0 frontiere esterne, le rimanenti arbitrariamente numerate, gli orientamenti essendo fissati come al n. 5, siano Ω_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, \nu$, dati omeomorfismi tra α_i e β_i (conservanti gli orientamenti), allora esiste un omeomorfismo Ω tra A e B che coincide con Ω_i tra α_i e β_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, \nu$* (17).

20. Siano i rettangoli $R_1 = (a, b; \alpha, \beta)$, $R_2 = (b, c; \alpha, \beta)$, $R = (a, c; \alpha, \beta)$ del piano $u^{(1)}u^{(2)}$ e sia (T_1, R_1) una data trasformazione.

Lemma. *Esiste una trasformazione (T, R) tale che* 1) $T(u) = T_1(u)$ *se* $u \in R_1$, 2) $(T, R) \sim (T_1, R_1)$.

Dimostrazione (18). Per semplicità supponiamo $R_1 = (0, 1; 0, 1)$, $R_2 = (1, 2; 0, 1)$, $R = (0, 2; 0, 1)$. Poniamo $T(u) = T_1(u)$ se $u \in R_1$, $T(u) = T_1(u_0)$ se $u = (u^{(1)}, u^{(2)}) \in R_2$, $u_0 = (1, u^{(2)})$. T è evidentemente continua in R e soddisfa la 1). Proviamo la 2). Sia $\omega(\delta)$ il modulo di continuità di (T_1, R_1). Per ogni intero n diciamo Ω_n l'omeomorfismo tra R_1 ed R tale che, posto $v = \Omega_n(u)$, $u = (u^{(1)}, u^{(2)}) \in R$, $v = (v^{(1)}, v^{(2)}) \in R$, è $v^{(2)} = u^{(2)}$, $v^{(1)} = nu^{(1)}/(n-1)$ se $0 \leqslant u^{(1)} \leqslant 1 - 1/n$, $v^{(1)} = 2 - n + nu^{(1)}$ se $1 - 1/n \leqslant u^{(1)} \leqslant 1$. Nel primo caso è $\{u, v\} \leqslant 1/n$ e $\{T(v), T_1(u)\} = \{T_1(v), T_1(u)\} \leqslant \omega(1/n)$; nel secondo è $\{u, u_0\} \leqslant 1/n$, $T(v) = T(u_0) = T_1(u_0)$, $\{T(v), T_1(u)\} = \{T_1(u_0), T_1(u)\} \leqslant \omega(1/n)$. Quando $n \to \infty$, allora $\omega(1/n) \to 0$ e ciò prova che $T \sim T_1$.

21. - Con le notazioni precedenti sia (T_1, R_1) una data trasformazione. Sia (T', R) la trasformazione così definita: $T'(u) = T_1(u)$ se $u = (u^{(1)}, u^{(2)})$, $0 \leqslant u^{(1)} \leqslant m$; $T'(u) = T_1(u_0)$ se $m \leqslant u^{(1)} \leqslant c - b + m$, $u_0 = (m, u^{(2)})$; $T'(u) = T_1(u_0)$ se $c - b + m \leqslant u^{(1)} \leqslant c$, $u_0 = (u^{(1)} - c + b, u^{(2)})$. Vale il

Lemma. $(T', R) \sim (T_1, R_1)$.

La dimostrazione è analoga a quella del Lemma precedente.

---

(17) Cfr. J. W. T. YOUNGS, *The extension of a homeomorphism defined on the boundary of a 2-manifold*. Bulletin Amer. Math. Soc., **54**, 805-808 (1948).

(18) Questo elementare lemma e quelli dei nn. 21, 22, 23 possono dimostrarsi anche sulla base dei teoremi di approssimazione esposti da T. RADÓ, loc. cit. in (1), pp. 71-79. Si noti che l'equivalenza qui considerata riguarda enti orientati (n. 8).

22. – Sia $\mathfrak{C}$ la sfera unità (n. 10) dello spazio $u^{(1)}u^{(2)}u^{(3)}$. Introdotte coordinate polari ρ, θ, φ il cui centro sia $(0, 0, 0)$, di asse $u^{(1)}$ e piano polare $u^{(3)} \leqslant 0$, $u^{(2)} = 0$, allora ogni punto di $\mathfrak{C}$ $(\rho = 1)$ è individuato dalla coppia (θ, φ), $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Diremo m_0 il meridiano $\varphi = 0$. Sia $(\mathfrak{T}, \mathfrak{C})$ una data trasformazione. Diciamo $(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{C})$ la nuova trasformazione così definita: $\mathfrak{T}_1(u) = \mathfrak{T}(u_0)$ ove $u = (\theta, \varphi)$, $u_0 = (\theta, 2\varphi - \pi)$ se $\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant 3\pi/2$, ove $u = (\theta, \varphi)$, $u_0 = (\theta, 0)$ se $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$ e se $3\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Vale il

Lemma. $(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{C}) \sim (\mathfrak{T}, \mathfrak{C})$.

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella del Lemma del n. 20. Sia infatti $\omega(\delta)$ il modulo di continuità di $(\mathfrak{T}, \mathfrak{C})$. Per ogni intero $n > 1$ diciamo Ω_n l'omeomorfismo di $\mathfrak{C}$ in sè così definito: $v = \Omega_n(u)$, $u = (\theta, \varphi)$, $v = (\theta, \varphi')$ ove $\varphi' = n\varphi/2$ se $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/n$; $\varphi' = \pi + n(\varphi - \pi)/2(n-1)$ se $\pi/n \leqslant \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \pi/n$; $\varphi' = 2\pi + n(\varphi - 2\pi)/2$ se $2\pi - \pi/n \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Allora Ω_n induce l'identità sul meridiano m_0. Inoltre se $v = \Omega_n(u)$, $u = (\theta, \varphi)$, $v = (\theta, \varphi')$, $v_0 = (\theta, \varphi_0)$ è $\{\mathfrak{T}(u), \mathfrak{T}_1(v)\} = \{\mathfrak{T}(u), \mathfrak{T}(v_0)\}$, $\{v, v_0\} \leqslant |\varphi - \varphi_0|$. Eseguendo i calcoli si trova $|\varphi - \varphi_0| < \pi/(n-1)$ se $\pi/n \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \pi/n$, $|\varphi - \varphi_0| \leqslant \pi/n$ altrimenti. Perciò $\{\mathfrak{T}(u), \mathfrak{T}_1(v)\} \leqslant \omega(\pi/n)$, oppure $\leqslant \omega(\pi/(n-1))$. Poichè queste espressioni tendono a zero quando $n \to \infty$, ne risulta $\mathfrak{T}_1 \sim \mathfrak{T}$.

23. – Nelle condizioni del n. precedente, sia $u_\sigma = (0, 0, -1)$, e sia ρ, θ, φ un sistema di coordinate polari di centro $(0, 0, 0)$ e asse $u^{(3)}$. Diciamo $(\mathfrak{T}_2, \mathfrak{C})$ la trasformazione così definita: $\mathfrak{T}_2(u) = \mathfrak{T}(u_0)$ ove $u = (\theta, \varphi)$, $u_0 = u_\sigma$ se $m \leqslant \theta \leqslant \pi$, ove $u = (\theta, \varphi)$, $u_0 = (\pi\theta/m, \varphi)$ se $0 \leqslant \theta \leqslant m$. Si noti che $\mathfrak{T}_2$ è costante su tutta la calotta $m \leqslant \theta \leqslant \pi$ di $\mathfrak{C}$ (contenente u_σ) alla quale corrisponde per la $\mathfrak{T}_2$ il punto $\mathfrak{T}(u_\sigma)$. Vale il

Lemma. $(\mathfrak{T}_2, \mathfrak{C}) \sim (\mathfrak{T}_1, \mathfrak{C})$.

La dimostrazione è analoga a quella del Lemma del n. 22.

24. – Siano J_1, J_2 regioni semplici di JORDAN senza punti interni in comune e aventi un arco t del loro contorno in comune, sia $J = J_1 + J_2$ la regione semplice di JORDAN unione di J_1 e J_2. Sia $J_1^* = t_1 t^{-1}$, $J_2^* = t t_2 t_3 t_4$, ove t, t_1, t_2, t_3, t_4 sono archi semplici, t_2 e t_4 eventualmente ridotti a semplici punti, ma t, t_1, t_3 non ridotti a punti. Intanto $J^* = t_1 t_2 t_3 t_4$. Sia (T_1, J_1) una data trasformazione.

Lemma. *Esiste una trasformazione (T, J) tale che* 1) $T(u) = T_1(u)$ *se* $u \in J_1$; 2) *T è costante su t_2* e t_4; 3) $(T, J) \sim (T_1, J_1)$.

Dimostrazione. Qualora t_2 o t_4 siano ridotti a punti possiamo sempre sostituirli con archi non nulli più ampi. Procederemo perciò come se t_2, t_4 fossero non ridotti a punti. Siano i rettangoli $R_1 \equiv ABCD \equiv (0, 1; 0, 1)$, $R_2 \equiv DCEF = (1, 2; 0, 1)$, $R \equiv ABEF = (0, 2; 0, 1)$. Fissiamo arbitrari omeomorfismi tra gli archi t_1 e $DABC$, tra t e DC, tra t_3 ed EF, tra t_2 e CE, tra t_4

e FD. Ne risultano omeomorfismi tra J_1^* e R_1^*, tra J_2^* ed R_2^* che subordinano lo stesso omeomorfismo tra t e DC. Per il Lemma del n. 19 esistono omeomorfismi tra J_1 ed R_1, tra J_2 ed R_2 che coincidono con quelli prestabiliti sulle frontiere. Pertanto essi subordinano lo stesso omeomorfismo tra $t = J_1 J_2$ e $DC = R_1 R_2$ e quindi individuano un unico omeomorfismo Ω tra J ed R.

Allora, posto $T_2 = T_1 \Omega$, abbiamo una trasformazione (T_2, R_1). Applicando il procedimento del n. 20, avremo una nuova trasformazione (T_3, R) tale che $T_3(u) = T_2(u)$ se $u \in R_1$ e T_3 è costante su CE e DF. Finalmente sia $T = T_3 \Omega^{-1}$. Si noti che da $T_3(u) = T_2(u)$ se $u \in R_1$ segue $T(u) = T_1(u)$ se $u \in J_1$. Inoltre T è costante su t_2 e t_4 e infine, da $T_1 \sim T_2$, $T_2 \sim T_3$, $T_3 \sim T$, segue $T_1 \sim T$.

Si noti che ogni punto $u \in J_2$ fa parte di un arco semplice γ, congiungente u con t e t_3 e sul quale T è costante, che è il trasformato mediante Ω di un segmento $u^{(2)} =$ costante di R_2.

25. – Siano R, R', $R' \subset R$, regioni semplici di JORDAN e siano (T, R), (T', R') due date trasformazioni. Sia $p_1, p_2, \dots, p_n$ una suddivisione di $R - R'$ in regioni semplici di JORDAN e sia $R^* = l_1 l_2 \dots l_n$, $R'^* = l'_1 l'_2 \dots l'_n$, $p_i^* = l'^{-1}_i \lambda_i l_i \lambda_{i+1}^{-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$, ove l_i, λ_i, $i = 1, 2, \dots, n$, $\lambda_{n+1} = \lambda_1$ sono archi semplici e aperti. Gli archi λ_i, in $R - R'$, sono a due a due senza punti in comune in $(R - R')_0$ e λ_{i+1} congiunge il punto comune di l'_i e l'_{i+1} in R'^* col punto comune di l_i e l_{i+1} in R^*, $i = 1, 2, \dots, n$. Gli archi λ_i sono orientati da R'^* ad R^* e non si esclude che taluni archi l_i, l'_i, λ_i siano ridotti a semplici punti. Siano $\eta(I)$, $\eta'(I)$ (n. 2) le oscillazioni delle trasformazioni T, T' e si sappia che $\eta(p_i) \leqslant c$, $i = 1, 2, \dots, n$, $c > 0$ e che $\{ T(u), T'(u) \} \leqslant c$ per ogni $u \in R'$. Vale il

Teorema. *Esiste una trasformazione (T'', R) tale che 1) $T'' \sim T'$; 2) $T''(u) = T'(u)$ per ogni $u \in R'$; 3) $\{ T(u), T''(u) \} \leqslant 3c$, per ogni $u \in R$.*

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che nessuno degli archi l_i, l'_i, λ_i sia ridotto ad un punto. Applichiamo il procedimento del n. 24 alla data trasformazione (T', R') ponendo $J_1 = R'$, $J_2 = p_1$, $J = R + p_1$, $t = l'_1$, $t_2 = \lambda_1$, $t_3 = l_1$, $t_4 = \lambda_2^{-1}$. Avremo così su $R' + p_1$ una nuova trasformazione $T_1 \sim T'$. Applichiamo ora il procedimento del n. 24 alla trasformazione T_1 ponendo $J_1 = R' + p_1$, $J_2 = p_2$, $J = R' + p_1 + p_2$, $t = l'^{-1}_2 \lambda_2$, $t_2 =$ singolo punto, $t_3 = l_2$, $t_4 = \lambda_3^{-1}$. Avremo così su $R' + p_1 + p_2$ una nuova trasformazione $T_2 \sim T_1$. E così di seguito. L'n^{mo} passo si otterrà ponendo $J_1 = R' + p_1 + \dots + p_{n-1}$, $J_2 = p_n$, $J = R' + p_1 + \dots + p_n$, $t = \lambda_1^{-1} l'^{-1}_n \lambda_n$, t_2, t_4 singoli punti, $t_3 = l_n$. Avremo allora la trasformazione cercata (T'', R) ponendo $T'' = T_n$. Si noti che $T''(u) = T_n(u) = T_{n-1}(u) = \dots = T'(u)$ per ogni $u \in R'$, ciò che dimostra la 2) e che $T'' = T_n$, $T_n \sim T_{n-1}, \dots, T_1 \sim T'$, ciò che assicura $T'' \sim T'$, ossia la 1).

Sia u un punto di R. Se $u \in R'$ allora $T''(u) = T'(u)$, $\{ T''(u), T(u) \} = \{ T'(u), T(u) \} \leqslant c$ in forza delle ipotesi. Se $u \in R - R'$, allora $u \in p_i$ per un certo i. Esiste un continuo γ di p_i sul quale T'' è costante (n. 24) che congiunge u con un punto di $l_i'^{-1}\lambda_i$ e, d'altra parte, se questo punto appartiene a λ_i, T'' è costante su λ_i. Dunque, in ogni caso, esiste un continuo (γ, oppure $\gamma\lambda_i$) congiungente u con un punto u' di l_i' sul quale T'' è costante e perciò $T''(u) = T''(u')$. D'altra parte $u' \in l_i'$, $l_i' \subset R'^*$ e quindi $T''(u') = T'(u')$. Finalmente $\{ T(u), T''(u) \} \leqslant \{ T(u), T(u') \} + \{ T(u'), T'(u') \} + \{ T'(u'), T''(u') \} + \{ T''(u'), T''(u) \} \leqslant \eta(p_i) + \{ T(u'), T'(u') \} + 0 + 0 \leqslant c + c = 2c$. Ciò vale per ogni $u \in R - R'$ e in tal modo la 3) è dimostrata.

Tutto ciò che si è detto può essere ripetuto anche se taluni archi l_i', λ_i sono ridotti a punti. Si osservi infatti che non tutti gli archi l_i' possono essere ridotti a punti, essendo $R'^* = l_1' l_2' \ldots l_n'$ e perciò, se anche l_1', l_2',..., sono ridotti a singoli punti, vi sarà un primo l_i' non ridotto a punto. Il procedimento indicato in principio può iniziarsi dalla regione p_i e indi si procederà su p_{i+1}, $p_{i+2}, \ldots, p_n, p_1, \ldots, p_{i-1}$. Perchè ciò sia possibile occorre che gli archi $l'^{-1}_{i+1}\lambda_{i+1}$, $l'^{-1}_{i+2}\lambda_{i+2}, \ldots$ siano tutti non ridotti a punti, ciò che accadrà certamente perchè se, ad esempio, fosse $l'^{-1}_{i+s}\lambda_{i+s}$ ridotto ad un punto, allora il contorno $l'^{-1}_{i+s}\lambda_{i+s} l_{i+s} \lambda'^{-1}_{i+s+1}$ della regione p_{i+s} sarebbe ridotto a $l_{i+s}\lambda^{-1}_{i+s+1}$ e perciò gli estremi di λ_{i+s+1} cadrebbero entrambi su l_{i+s}, cioè su R^*, ciò che si è escluso, a meno che λ_{i+s+1} non sia ridotto ad un punto. Ma non può essere λ_{i+s+1} ridotto ad un punto perchè in tal caso anche l_{i+s}, come arco semplice aperto di JORDAN avente primo ed ultimo estremo coincidenti dovrebbe essere ridotto ad un punto e p_{i+s} non sarebbe più una regione di JORDAN ma un semplice punto, ciò che si esclude.

Finalmente supponiamo che anche archi l_i possano essere ridotti a punti. Allora, se il procedimento precedente ha inizio al poligono p_i ed l_i è ridotto ad un punto, si ponga $t_2 = \lambda_i l_i$, $t_3 = \lambda^{-1}_{i+1}$, t_4 singolo punto. Così ad ogni passo successivo in cui l_{i+s} è un singolo punto si ponga $t_2 = l_{i+s}$, $t_3 = \lambda_{i+s}$, t_4 singolo punto. Qui è certo λ_{i+s} non ridotto ad un punto perchè in tal caso λ_{i+s-1} avrebbe entrambi gli estremi su l'_{i+s-1}, cioè su R'^*, ciò che si esclude col ragionamento fatto sopra.

La 3) vale ancora perchè anche nell'ultimo caso, u e u' non apparterranno necessariamente alla stessa regione p_i ma a regioni p_i e p_{i-k} qualora $l_{i-1}, \ldots, l_{i-k}$ siano tutti ridotti ad un singolo punto e perciò ad un unico punto u'' ed allora $\{ T(u), T(u') \} \leqslant \{ T(u), T(u'') \} + \{ T(u''), T(u') \} \leqslant \eta(p_i) + \eta(p_{i-k}) \leqslant 2c$ e infine $\{ T(u), T''(u) \} \leqslant 2c + c = 3c$.

26. – È noto [19] che trasformazioni *puntiformi* equivalenti secondo FRÉCHET sono equivalenti anche secondo LEBESGUE (n. 6). Qui non avremo però bisogno di tale generale proposizione ma soltanto della seguente particolare che dimostriamo direttamente.

Lemma. *Siano* I_1, I_2 *segmenti orientati, siano* $(T_1, I_1) \sim (T_2, I_2)$ *trasformazioni equivalenti secondo* FRÉCHET *ed entrambi puntiformi, sia* Ω_n, $n = 1, 2, \ldots$, *una successione di omeomorfismi tra* I_1 *ed* I_2 *tali che, se* $u_2 = \Omega_n(u_1)$, $u_1 \in I_1$, $u_2 \in I_2$, *allora è sempre* $\{ T_1(u_1), T_2(u_2) \} \leqslant 1/n$. *In tale ipotesi, allora* 1) *esiste un omeomorfismo* Ω *tra* I_1 *ed* I_2 *tale che, se* $u_1 \in I_1$, $u_2 \in I_2$, $u_2 = \Omega(u_1)$, *è* $T_1(u_1) = T_2(u_2)$; 2) *esiste una sottosuccessione* Ω_{n_k}, $k = 1, 2, \ldots$, *convergente uniformemente verso* Ω *quando* $k \to \infty$.

Dimostrazione. Possiamo supporre $I_1 \equiv [0 \leqslant \tau \leqslant 1]$, $I_2 \equiv [0 \leqslant t \leqslant 1]$, ove t, τ sono coordinate ascisse su I_1 e I_2. Pertanto Ω_n: $t = t_n(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, ove $t_n(\tau)$ è funzione continua crescente in senso stretto in $(0, 1)$ con $t_n(0) = 0$ $t_n(1) = 1$. Per il teorema di HELLY esiste una sottosuccessione $t_{n_k}(\tau)$ tale che il $\lim_{k \to \infty} t_{n_k}(\tau) = t(\tau)$ esiste per ogni $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ e quindi $t(0) = 0$, $t(1) = 1$, $0 \leqslant t(\tau) \leqslant 1$ e $t(\tau)$ è funzione non decrescente di τ in $(0, 1)$.

Dimostriamo che $t(\tau)$ è continua. Ragioniamo per assurdo e supponiamo che, per un certo τ_1, sia $t(\tau_1 + 0) = t(\tau_1) + \varepsilon$, $0 \leqslant \tau_1 < 1$, $\varepsilon > 0$. Sia $t_1 = t(\tau_1)$, $t_4 = t(\tau_1 + 0)$. Al segmento $t_1 t_4$ la trasformazione puntiforme T_2 fa corrispondere una curva continua non ridotta ad un punto e perciò di un certo diametro $5D > 0$. Esistono allora due punti t_2, t_3, $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, tali che $\{ T_2(t_2), T_2(t_3) \} \geqslant 4D$. Sia $\omega_1(\delta)$ il modulo di continuità della trasformazione T_1 e sia $\sigma > 0$ un numero tale che $\omega(\sigma) \leqslant D$. Sia τ_4 un punto tale che $\tau_1 < \tau_4 \leqslant 1$, $\tau_4 - \tau_1 \leqslant \sigma$ e sia k un intero tale $n_k \geqslant 1/D$, $| t_{n_k}(\tau_i) - t(\tau_i) | \leqslant \min [D, t_2 - t_1, t_4 - t_3]$, $i = 1, 4$. Pertanto $t_{n_k}(\tau_1) \leqslant t(\tau_1) + (t_2 - t_1) = t_1 + (t_2 - t_1) = t_2$, $t_{n_k}(\tau_4) \geqslant \geqslant t(\tau_4) - (t_4 - t_3) \geqslant t(\tau_1 + 0) - (t_4 - t_3) = t_4 - (t_4 - t_3) = t_3$, cioè $t_{n_k}(\tau_1) \leqslant t_2 < < t_3 \leqslant t_{n_k}(\tau_4)$. Per la continuità di $t_{n_k}(\tau)$ esistono due punti τ_{2k}, τ_{3k}, $\tau_1 \leqslant \tau_{2k} < < \tau_{3k} \leqslant \tau_4$ tali che $t(\tau_{ik}) = t_i$, $i = 2, 3$. Finalmente abbiamo $\{ T_2(t_2), T_2(t_3) \} \leqslant \leqslant \{ T_2(t_2), T_1(\tau_{2k}) \} + \{ T_1(\tau_{2k}), T_1(\tau_{3k}) \} + \{ T_1(\tau_{3k}), T_2(t_3) \} \leqslant 1/n_k + \omega(\sigma) + 1/n_k \leqslant \leqslant D + D + D = 3D$, ciò che è assurdo essendo $\{ T_2(t_2), T_2(t_3) \} \geqslant 4D$. In tal modo è dimostrato che $t(\tau)$ è continua a destra. Analogamente per la continuità a sinistra.

Dimostriamo che $t(\tau)$ è crescente in senso stretto in $(0, 1)$. Ragioniamo per assurdo e supponiamo che $t(\tau)$ sia costante in un intervallo (τ_1, τ_4) di $(0, 1)$. A questo intervallo la trasformazione puntiforme T_1 fa corrispondere una curva non ridotta ad un punto e perciò di un certo diametro $5D > 0$. Esiste-

---

[19] Cfr. loc. cit. in [1], pag. 57.

ranno allora due punti τ_2, τ_3, $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \tau_4$, con $\{ T_1(\tau_2), T_1(\tau_3) \} \geq 4D$. Sia $\omega_2(\delta)$ il modulo di continuità della trasformazione T_2, sia $\sigma > 0$ un numero tale che $\omega_2(\sigma) \leq D$ e sia k un intero tale che $1/n_k \leq D$, $| t_{n_k}(\tau_i) - t(\tau_i) | \leq \leq \sigma/2$, $i = 1, 4$. Poniamo $t_{ik} = t_{n_k}(\tau_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, onde $t_{1k} < t_{2k} < t_{3k} < t_{4k}$. Inoltre $t_{3k} - t_{2k} < t_{4k} - t_{1k} = t_{nk}(\tau_4) - t_{nk}(\tau_1) \leq [t(\tau_4) - t(\tau_1)] + 2(\sigma/2) = 0 + \sigma = \sigma$. Pertanto $\{ T_2(t_{2k}), T_2(t_{3k}) \} \leq D$ e infine $\{ T_1(\tau_2), T_1(\tau_3) \} \leq \{ T_1(\tau_2), T_2(t_{2k}) \} + \{ T_2(t_{2k}), T_2(t_{3k}) \} + \{ T_2(t_{3k}), T_1(\tau_3) \} \leq 1/n_k + \omega_2(\sigma) + 1/n_k \leq 3D$, ciò che è assurdo. È così dimostrato che $t(\tau)$, $0 \leq \tau \leq 1$, è continua e crescente in senso stretto in $(0, 1)$.

Per il teorema di Helly segue ora la uniforme convergenza di Ω_{nk} verso Ω_k. Si noti che per ogni $0 \leq \tau \leq 1$ si ha $\{ T_2(t_{n_k}), T_1(\tau) \} \leq 1/n_k$ se $t_{n_k} = t_{nk}(\tau)$. Passando al limite per $k \to \infty$, si ha $T_2(t) = T_1(\tau)$ se $t = t(\tau)$ per ogni $0 \leq \tau \leq 1$. Pertanto T_1 e T_2 sono equivalenti secondo Lebesgue.

Nota. Il lemma ora dimostrato si estende senza difficoltà al caso di trasformazioni definite sopra circonferenze C_1^*, C_2^*.

27. – Lemma. *Siano C_1, C_2 cerchi concentrici, $C_1 \subset C_2$, sia $R = C_2 - (C_1)_0$, sia (T_1, C_1^*) una data trasformazione. Allora esiste una trasformazione (T, R) tale che* 1) $(T, C_1^*) = (T_1, C_1^*)$; 2) *la trasformazione (T, C_2^*) è puntiforme*; 3) $(T, C_2^*) \sim (T_1, C_1^*)$; 4) *se S è la superficie S: (T, R), (definita nella corona circolare R), allora $L(S) = 0$.*

Dimostrazione. Si assumano nel piano di R coordinate polari (ρ, θ) di polo il centro di C_1 e C_2. Per fissare le idee siano C_1 e C_2 i cerchi $\rho \leq 1$, $\rho \leq 2$, onde R è la corona $1 \leq \rho \leq 2$. Indicheremo con τ e t l'anomalia θ dei punti u di C_1^* e C_2^*. Sia O l'insieme dei numeri reali τ, $0 \leq \tau \leq 2\pi$, corrispondenti a punti u di archi di C_1^* su cui T_1 è costante. L'insieme O è aperto e due componenti di O non hanno punti interni nè estremi in comune. Pertanto l'insieme $F = (0, 2\pi) - O$ è perfetto ed esiste una funzione continua e monotona $t = t(\tau)$, $0 \leq \tau \leq 2\pi$, $t(0) = 0$, $t(2\pi) = 2\pi$, la quale è costante solo e soltanto sugli intervalli di O. Per ogni τ, $0 \leq \tau \leq 2\pi$, diciamo $\gamma = \gamma(\tau)$ la curva $\theta = (2 - \rho)\tau + (\rho - 1)t(\tau)$, $1 \leq \rho \leq 2$. $\gamma(\tau)$ congiunge il punto $(\rho = 1, \theta = \tau)$ di C_1^* col punto $(\rho = 2, \theta = t(\tau))$ di C_2^*. Si noti che, per ogni $1 \leq \rho < 2$, $\theta = \theta(\tau)$ è funzione continua e crescente in senso stretto di τ e perciò per ogni punto interno ad R (nonchè per ogni punto di C_1^*) passa una ed una sola curva $\gamma(\tau)$. Definiamo la trasformazione (T, R) stabilendo che per ogni $u \in R$ sia $T(u) = T_1(u_1)$, ove u_1 è il punto $u_1 \in C_1^*$ della curva γ che passa per u. Si prova elementarmente che T è una trasformazione continua su R ed evidentemente 1) e 2) sono soddisfatte.

Sia $\omega(\delta)$ il modulo di continuità della trasformazione (T, R). La funzione $t(\tau)$ può essere approssimata mediante funzioni quasi lineari $t_n(\tau)$, $0 \leq \tau \leq 2\pi$, $n = 1, 2, \dots$, continue e crescenti in senso stretto e possiamo supporre $t_n(0) = 0$.

$t_n(2\pi) = 2\pi$, $|\, t_n(\tau) - t(\tau) \,| \leqslant 1/n$ per ogni $0 \leqslant \tau \leqslant 2\pi$. L'equazione $t = t_n(\tau)$ definisce un omeomorfismo Ω_n tra C_1^* e C_2^*.

Siano u un punto di C_1^* di anomalia τ, $0 \leqslant \tau \leqslant 2\pi$, $\gamma(\tau)$ la curva uscente da u, $u' \in C_2^*$ il punto che $\gamma(\tau)$ ha su C_2^* di anomalia $t(\tau)$, $u'' \in C_2^*$ il punto corrispondente ad u per la Ω_n e di anomalia $t_n(\tau)$, allora $\{ u'', u' \} < 2 \,|\, t_n(\tau) - t(\tau) \,| \leqslant 2/n$ e perciò $\{ T_1(u), T(u'') \} = \{ T(u'), T(u'') \} \leqslant \omega(2/n)$ ove $\omega(2/n) \to 0$ per $n \to \infty$. Ciò assicura che $(T_1, C_1^*) \sim (T, C_2^*)$.

Sia (P_1, C_1^*) una qualsiasi trasformazione, quasi lineare rispetto a τ, su C_1^* e tale che, per ogni $u \in C_1^*$ si abbia $\{ P_1(u), T_1(u) \} \leqslant 1/n$. Per ogni punto u di C_1^* di anomalia τ, diciamo $\gamma_n = \gamma_n(\tau)$ la curva $\theta = (2 - \rho)\tau + (\rho - 1)t_n(\tau)$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, congiungente il punto $(\rho = 1,\ \theta = \tau)$ di C_1^* col punto $(\rho = 2,\ \theta = t_n(\tau))$ di C_2^*. Per ogni punto $u \in R$ passa una ed una sola curva γ_n. Definiamo il vettore (P, R) ponendo $P(u) = P_1(u_1)$ per ogni punto $u \in R$ e ove u_1 è il punto $u_1 \in C_1^*$ della curva γ_n passante per u. Come sopra P è un vettore continuo in R. Dimostriamo che (P, R) rappresenta una superficie poliedrica Σ le cui faccie sono tutti segmenti. Siano $l_i = (\tau_i \leqslant \tau \leqslant \tau_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$; $\tau_{\nu+1} = \tau_1$, gli archetti di C_1^* sui quali P_1 è lineare, γ_i, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, le n curve $\gamma_n(\tau)$ che escono dai punti di C_1^* di anomalia τ_i, l'_i, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, gli archi di C_2^* congiungenti i secondi estremi delle curve γ_i. Allora R è divisa in n regioni π_i il cui contorno è $\pi_i^* = \gamma_i l'_i \gamma_{i+1}^{-1} l_i^{-1}$. Diciamo σ_i la superficie σ_i: (P, π_i), $i = 1, 2, \ldots, \nu$. Le equazioni $\theta = (2 - \rho)\tau + (\rho - 1)t_n(\tau)$, $\rho = \rho$ rappresentano un omeomorfismo Ω_i tra π_i e il rettangolo $[\tau_i \leqslant \tau \leqslant \tau_{i+1},\ 1 \leqslant \rho \leqslant 2]$ sul quale σ_i ha una rappresentazione σ_i: $x = x(\tau)$, mediante funzioni, lineari in τ, della sola τ. Pertanto σ_i è un semplice segmento e $a(\sigma_i) = 0$. Dividendo tale rettangolo in due triangoli mediante una diagonale ne risulta una divisione di π_i in due triangoli curvilinei e perciò la formazione di un reticolato in R. Pertanto la superficie Σ: (P, R) è poliedrica, (P, R) ne è una rappresentazione tipica (n. 13) e $a(\Sigma) = 0$.

Osserviamo ora che le curve $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = \gamma_n(0) = \gamma_n(2\pi)$ coincidono col raggio $1 \leqslant \rho \leqslant 2$ di anomalia $\theta = 0$. Di più se due curve $\gamma(\tau)$, $\gamma_n(\tau')$ $0 < \tau < 2\pi$, $0 < \tau' < 2\pi$, hanno un punto in comune (ρ, θ), $1 < \rho < 2$, allora $0 < \theta < 2\pi$ e $(2 - \rho)(\tau' - \tau) + (\rho - 1)[t_n(\tau') - t(\tau)] = 0$ e quindi secondochè è $\tau' \gtreqless \tau$ è anche $t_n(\tau') \lesseqgtr t(\tau)$ ed esse non hanno altri punti in comune. Di più se $\gamma(\tau)$ e $\gamma_n(\tau')$ partono dallo stesso punto $\tau = \tau'$, $\rho = 1$ di C_1^*, oppure arrivano allo stesso punto $t_n(\tau') = t(\tau)$, $\rho = 2$ di C_2^*, esse o coincidono completamente, o non hanno altri punti in comune.

Sia ora $u \in R$ un punto di R e siano $u_1 \in C_1^*$, $u_2 \in C_2^*$ i punti che la curva $\gamma(t)$ passante per u ha su C_1^* e C_2^*. Siano $u'_1 \in C_1^*$, $u'_2 \in C_2^*$ i punti che la curva γ_n passante per u ha su C_1^* e C_2^*. Se $u_1 < u'_1$ su C_1^*, allora $u'_2 < u_2$ e, d'altra parte, se $\bar{u}_2 \in C_2^*$ è il punto di C_2^* della curva $\gamma_n(\tau)$ che passa per u_1 e che diremo $\bar{\gamma}_n$, le curve $\bar{\gamma}_n$ e γ_n non hanno punti in comune e, da $u_1 < u'_1$

segue $\bar{u}_2 < u_2'$ su C_2^* e quindi $\bar{u}_2 < u_2' < u_2$. Se τ è l'ascissa di u si ha $\{u_2', u_2\} \leqslant \leqslant \{\bar{u}_2, u_2)\} \leqslant 2 \mid t_n(\tau) - t(\tau) \mid \leqslant 2/n$. Ne segue $\{P(u), T(u)\} = \{P(u_2'), T(u_2)\} \leqslant \leqslant \{P(u_2'), T(u_2')\} + \{T(u_2'), T(u_2)\} \leqslant 1/n + \omega(2/n)$ e ciò vale per ogni $u \in R$. Analogo ragionamento se $u_1' < u_1$. Poichè l'ultima espressione tende a zero per $n \to \infty$ ne risulta che $\|\Sigma, S\| \to 0$ per $n \to \infty$ e perciò, essendo $a(\Sigma) = 0$, anche $L(S) = 0$.

28. – Lemma. *Siano C_1, C_2 cerchi concentrici, $C_1 \subset C_2$, sia $R = C_2 - (C_1)_0$, sia (T_1, C_1) una data trasformazione. Allora esiste una trasformazione (T, C_2) tale che* 1) $(T, C_1) = (T_1, C_1)$; 2) *la trasformazione (T, C_2^*) è puntiforme*; 3) $(T, C_2^*) \sim (T_1, C_1^*)$; 4) $(T, C_2) \sim (T_1, C_1)$; 5) *se S è la superficie S: (T, R), allora* $L(S) = 0$.

Dimostrazione. Definita la trasformazione (T, R) come nel n. 27, si osservi che $(T, C_1^*) = (T_1, C_1^*)$. Perciò, posto $(T, C_1) = (T_1, C_1)$, la trasformazione $T = (T, C_2)$ risulta definita e continua in tutto C_2. Le 1), 2), 3), 5) seguono dal n. 27. Dobbiamo dimostrare la 4).

Sia $\omega(\delta)$ il modulo di continuità della trasformazione (T, C_2). Per ogni intero n diciamo δ_n un numero tale che $\omega(\delta_n) \leqslant 1/n$ e sia δ_n minore del raggio M_1 di C_1. Sia $C_{1n} \subset C_1$ il cerchio concentrico a C_1 di raggio $M_1 - \delta_n$. Dividiamo C_1^* in archi $l_1, l_2, \ldots, l_m$ sui quali T sia non costante e abbia una oscillazione $\leqslant 1/n$. Siano u_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, i punti di divisione su C_1^*. Facciamo passare per u_i la curva di Jordan formata dal segmento r_i del raggio per u_i tra C_{1n}^* e C_1^* e dalla curva γ_i del n. 27 uscente da u_i congiungente u_i di C_1^* con un punto di C_2^*. Se u_i', u_i'' sono gli estremi di $r_i\gamma_i$, $u_i' \in C_{1n}^*$, $u_i'' \in C_2^*$, allora i punti u_i', $i = 1, 2, \ldots, m$, sono distinti e ordinati su C_{1n}^* e altrettanto per i punti u_i'', $i=1, 2, \ldots, m$, su C_2^*. Diciamo l_i' gli archi $u_i'u_{i+1}'$ di C_1^*, diciamo l_i'' gli archi $u_i''u_{i+1}''$ di C_2^*, $i=1, 2, \ldots, m$, $u_{m+1}'' = u_i''$. Diciamo J_i, J_i' le regioni di Jordan $J_i \subset C_1 - C_{1n}$, $J_i' \subset C_2 - C_{1n}$, tali che $J_i^* = l_i r_{i+1}^{-1} l_i'^{-1} r_i$, $J_i'^* = l_i'' \gamma_{i+1}^{-1} r_{i+1}^{-1} l_i'^{-1} r_i \gamma_i$. Fissiamo un omeomorfismo qualsiasi t_i tra r_i e $r_i\gamma_i$, un omeomorfismo qualsiasi τ_i tra l_i e l_i'' e diciamo Ω_i l'omeomorfismo tra J_i^* e $J_i'^*$ che coincide con l'identità su l_i', con t_i tra r_i e $r_i\gamma_i$, con t_{i+1} tra r_{i+1} e $r_{i+1}\gamma_{i+1}$, con τ_i tra l_i e l_i''. Allora possiamo estendere Ω_i come un omeomorfismo tra J_i e J_i' (n. 19). Diciamo Ω l'omeomorfismo tra C_1 e C_2 che coincide con l'identità su C_{1n} e con Ω_i tra J_i e J_i', $i=1, 2, \ldots, m$. Siano u_1, u_2 punti qualsiasi tali che $u_1 \in C_1$, $u_2 \in C_2$, $u_2 = \Omega(u_1)$. Se $u_1 \in C_{1n}$ allora $u_1 = u_2$ e $T(u_2) = T_1(u_1)$. Se $u_1 \in C_1 - C_{1n}$, allora $u_1 \in J_i$ per un dato i e dista non più di δ_n da un punto u_1' di l_i su C_1^*. D'altra parte $u_2 \in J_i'$ e perciò u_2 è su un raggio r o su una curva γ di costanza per T ed r, o γ, congiungono u_2 con un punto u_2' di l_i su C_1^*. In entrambi i casi è $\{T(u_2), T(u_2')\} \leqslant \leqslant \omega(\delta_n) \leqslant 1/n$. Finalmente $\{T(u_1'), T(u_2')\} \leqslant 1/n$ e infine $\{T_1(u_1), T(u_2)\} \leqslant \leqslant \{T_1(u_1), T_1(u_1')\} + \{T_1(u_1'), T(u_1')\} + \{T(u_1'), T(u_2')\} + \{T(u_2'), T(u_2)\} \leqslant 1/n + + 0 + 1/n + 1/n = 3/n$. Ciò vale per ogni n e perciò $(T_1, C_1) \sim (T, C_2)$.

Si noti che la 3) segue anche dalla 4) e dal n. 11. Il lemma è così dimostrato.

Siano $C_1 \subset C_2 \subset C$ cerchi concentrici e $R_1 = C_2 - (C_1)_0$, $R_2 = C - (C_2)_0$, $R = R_1 + R_2$. Sia (T_1, R_2) una data trasformazione. Allora esiste una trasformazione (T, R) tale che 1) $(T, R_2) = (T_1, R_2)$; 2) (T, C_1^*) è puntiforme; 3) $(T, C_1^*) \sim (T_1, C_2^*)$; 4) $(T, R) \sim (T_1, R_2)$; 5) se S è la superficie S: (T, R_1), allora $L(S) = 0$.

La dimostrazione è analoga alla precedente.

29. – Lemma. *Siano C_1, C_2 cerchi concentrici, $C_1 \subset C_2$, sia $R = C_2 - (C_1)_0$, siano $(T_1, C_1^*) \sim (T_2, C_2^*)$ date trasformazioni puntiformi ed equivalenti definite su C_1^* e C_2^*. Allora esiste una trasformazione (T, R) tale che* 1) $(T, C_1^*) = (T_1, C_1^*)$, 2) $(T, C_2^*) = (T_2, C_2^*)$; 3) *se S è la superficie S: (T, R), allora $L(S) = 0$.*

Dimostrazione. Si assumano nel piano di R coordinate polari (ρ, θ) di polo il centro di C_1 e C_2. Per fissare le idee siano C_1 e C_2 i cerchi $\rho \leqslant 1$, $\rho \leqslant 2$. Indicheremo con τ e t l'anomalia θ dei punti u di C_1^* e C_2^* rispettivamente. Essendo T_1 e T_2 puntiformi e $T_1 \sim T_2$, esiste (n. 26, nota) tra C_1^* e C_2^* un omeomorfismo Ω tale che, se $u_2 \in C_2^*$, $u_1 \in C_1^*$, $u_2 = \Omega(u_1)$ è $T_1(u_1) = T_2(u_2)$. Tale omeomorfismo può essere rappresentato da una funzione $t = t(\tau)$ continua, crescente in senso stretto e tale che $t(2\pi) - t(0) = 2\pi$. Sia $t_1 = t(0)$, onde $t(2\pi) = t_1 + 2\pi$ e $t_1 \leqslant t(\tau) \leqslant t_1 + 2\pi$ per ogni $0 \leqslant \tau \leqslant 2\pi$. Per ogni τ, $0 \leqslant \tau \leqslant 2\pi$, diciamo $\gamma(t)$ la curva di JORDAN $\theta = (2 - \rho)\tau + (\rho - 1)t(\tau)$, $1 \leqslant \rho \leqslant 2$. Non c'è ora che ripetere parola per parola il ragionamento del n. 27.

30. – Lemma. *Siano C_1, C_2 cerchi concentrici, $C_1 \subset C_2$, sia $R = C_2 - (C_1)_0$, sia (T_1, C_1) una data trasformazione la quale sia puntiforme su C_1^*, sia (T_2, C_2^*) una altra trasformazione, definita solo su C_2^* e puntiforme, tale che $(T_2, C_2^*) \sim$ $\sim (T_1, C_1^*)$. Allora esiste una trasformazione (T, C_2) tale che* 1) $(T, C_1) = (T_1, C_1)$; 2) $(T, C_2^*) = (T_2, C_2^*)$; 3) $(T, C_2) \sim (T_1, C_1)$; 4) *se S è la superficie S: (T, R), allora $L(S) = 0$.*

Si proceda come nel n. 28 valendosi del n. 29 anzichè del n. 27.

31. – Teorema. *Siano $C_1 \subset C_2 \subset C$ cerchi concentrici, siano (T, C), (T_1, C_1) date trasformazioni e sia $(T_1, C_1) \sim (T, C_2)$. Allora esiste una trasformazione (T_0, C) tale che* 1) $(T_0, C) \sim (T, C)$; 2) $(T_0, C_1) = (T_1, C_1)$; 3) $(T_0, C - C_2) =$ $= (T, C - C_2)$.

Dimostrazione. Siano (ρ, θ) coordinate polari di polo il centro di C_1, C_2, C. Per fissare le idee supponiamo che C_1, C_2, C siano i cerchi $\rho \leqslant 1/3$, $\rho \leqslant 2/3$, $\rho \leqslant 1$. Sia (T_2, C) la trasformazione così definita: $T_2(u) = T(u)$ se

$u \in C - C_2$; $T_2(u) = T(u_0)$ se $u(\rho, \theta) \in C_2 - C_1$, $u_0 = (2/3, \theta)$; $T_2(u) = T(u_0)$ se $u = (\rho, \theta) \in C_1$, $u_0 = (2\rho, \theta)$. Il passaggio da T a T_2 è analogo a quello del n. 21 e perciò, con identico ragionamento, si ha $(T, C) \sim (T_2, C)$. Siano C_3, C_4 i cerchi $\rho \leqslant 4/9$, $\rho \leqslant 5/9$, $C_1 \subset C_3 \subset C_4 \subset C_2$. Si noti che $(T, C_2) \sim (T_2, C_1)$ e perciò anche $(T_2, C_1) \sim (T_1, C_1)$.

Sia $\mathfrak{L}$ la curva continua chiusa definita dalla trasformazione (T, C_2^*). Da $(T, C_2) \sim (T_2, C_1) \sim (T_1, C_1)$ segue $(T, C_2^*) \sim (T_2, C_1^*) \sim (T_1, C_1^*)$, (n. 11). In forza del n. 28 possiamo definire in C_3 e in $C - C_4$ trasformazioni (T_3, C_3), $(T_4, C - C_4)$ tali che 1) $(T_3, C_1) = (T_1, C_1)$, $(T_4, C - C_2) = (T_2, C - C_2)$; 2) $(T_3, C_3) \sim (T_1, C_1)$, $(T_4, C - C_4) \sim (T_2, C - C_2)$; 3) T_3 è puntiforme su C_3^*, T_4 è puntiforme su C_4^*. Si noti che $(T_1, C_1^*) \sim (T_3, C_3^*) \sim (T_4, C_4^*) \sim (T_2, C_2^*)$ sono rappresentazioni della stessa curva $\mathfrak{L}$ e che le due centrali sono puntiformi. Si noti ancora che $(T_3, C_3) \sim (T_1, C_1)$, che $(T_1, C_1) \sim (T_2, C_1)$ e perciò $(T_3, C_3) \sim (T_2, C_1)$.

Da $(T_3, C_3) \sim (T_2, C_1)$, $(T_4, C - C_4) \sim (T_2, C - C_2)$ segue che, per ogni p intero, esistono omeomorfismi Ω'_p tra C_1 e C_3, Ω''_p tra $C - C_2$ e $C - C_4$ tali che, se u_1, u_2 sono punti corrispondenti si ha $\{ T_2(u_1), T_3(u_2) \} \leqslant 1/p$, $\{ T_2(u_1), T_4(u_2) \} \leqslant 1/p$. Diciamo Ω_0 l'omeomorfismo tra C_2^* e C_1^* che fa corrispondere al punto $u = (2/3, \theta) \in C_2^*$ il punto $\bar{u} = (1/3, \theta) \in C_1^*$. Sappiamo che $T_2(u) = T_2(\bar{u})$ essendo T_2 costante sul segmento di raggio congiungente u con $\bar{u}$. Per ogni punto $u \in C_2^*$, poniamo $\bar{u} = \Omega_0(u)$, $u' = \Omega'_p(\bar{u})$, $u' \in C_3^*$, $u'' = \Omega''_p(u)$, $u'' \in C_4^*$. Si ha $\{ T_3(u'), T_4(u'') \} \leqslant \{ T_3(u'), T_2(\bar{u}) \} + \{ T_2(\bar{u}), T_2(u) \} + \{ T_2(u), T_4(u'') \} \leqslant 1/p + 0 + 1/p = 2/p$. In altre parole se diciamo Ω_p l'omeomorfismo $\Omega'_p \Omega_0 \Omega''_p$ tra C_3^* e C_4^* e i punti $u' \in C_3^*$, $u'' \in C_4^*$ si corrispondono in Ω_p, allora $\{ T_3(u'), T_4(u'') \} \leqslant 2/p$. Essendo (T_3, C_3^*), (T_4, C_4^*) entrambi puntiformi, possiamo applicare il Lemma del n. 26, nota. Esisterà una sottosuccessione Ω_{p_k}, $k = 1, 2, \ldots$, convergente verso un omeomorfismo Ω tra C_3^* e C_4^* avente la proprietà che, se $u'' = \Omega(u')$, $u' \in C_3^*$, $u'' \in C_4^*$, allora $T_3(u') = T_4(u'')$.

Applichiamo alla corona circolare $C_4 - C_3$ il procedimento indicato nella dimostrazione del Lemma del n. 29 ove dobbiamo utilizzare proprio l'omeomorfismo Ω dianzi determinato. Ne risulta definita in $C_4 - C_3$ una trasformazione $(T_0, C_4 - C_3)$ che coincide con T_3 su C_3^* e con T_4 su C_4^*. Pertanto se diciamo (T_0, C) la trasformazione definita su C che coincide con T_4 su $C - C_4$, con T_0 su $C_4 - C_3$, con T_3 su C_3, allora (T_0, C) è continua in C. Da $(T_0, C_3) = (T_3, C_3)$, $(T_3, C_1) = (T_1, C_1)$ segue $(T_0, C_1) = (T_1, C_1)$ ciò che dimostra la 2). Da $(T_0, C - C_4) = (T_4, C - C_4)$, $(T_4, C - C_2) = (T_2, C - C_2) = (T, C - C_2)$ segue $(T_0, C - C_2) = (T, C - C_2)$ ciò che dimostra la 3).

Sia $\omega(\delta)$ il modulo di continuità della trasformazione (T_0, C). Fissato un intero n qualsiasi sia $\delta > 0$ un numero tale che $\omega(\delta) \leqslant 1/n$. Dividiamo C_2^* in archi l_{2i}, $i = 1, 2, \ldots, m$, su ciascuno dei quali T_0 sia non costante ma abbia una oscillazione $\leqslant 1/n$. Conducendo i raggi per i punti di divisione anche su

C_1^* abbiamo una corrispondente divisione in archi l_{1i}, $i=1, 2,\ldots, m$. Se u_{1i}, u_{2i}, $i=1, 2,\ldots, m$, sono i punti di divisione su C_1^* e C_2^*, gli omeomorfismi Ω'_{p_k}, Ω''_{p_k} fanno corrispondere ad essi certi punti $u'_{ik} \in C_3^*$, $u''_{ik} \in C_4^*$, $i=1, 2, \ldots, m$. Quando $k \to \infty$ (eventualmente considerando una opportuna sottosuccessione della p_k) esistono i limiti $u'_{ik} \to u'_i$, $u''_{ik} \to u''_i$, $u'_i \in C_3^*$, $u''_i \in C_4^*$, $i=1, 2, \ldots, m$. I punti u'_i, u''_i sono ciclicamente ordinati su C_3^* e C_4^*, sono distinti e $u''_i = \Omega(u'_i)$, $i=1, 2,\ldots, m$.

Siano γ_i, $i=1, 2,\ldots, m$, le curve del n. 29 congiungenti i punti u'_i con u''_i in $C_4 - C_3$ e sulle quali sappiamo già che T_0 è costante. Le curve γ_i non hanno a due a due punti in comune, neppure estremi. Sia $2\delta' > 0$ la loro mutua distanza. Diciamo γ'_i curve di JORDAN di $C_4 - C_3$ congiungenti u'_{ik} con u''_{ik} ove si supponga k il più piccolo intero tale che $p_k \geqslant n$, $\{ u'_{ik}, u'_i \} \leqslant \min [\delta, \delta']$, $\{ u''_{ik}, u''_i \} \leqslant \min [\delta, \delta']$, $i=1, 2,\ldots, m$. Si può supporre che la curva γ'_i faccia parte dell'insieme dei punti u di $C_4 - C_3$ che hanno da γ_i distanza $\leqslant \delta_0$ ove $\delta_0 = \min [\delta, \delta']$. Allora le curve γ'_i, $i=1, 2,\ldots, m$, non hanno a due a due punti in comune, congiungono i punti ciclicamente ordinati $u'_{ik} \in C_3^*$ con i punti ciclicamente ordinati $u''_{ik} \in C_4^*$, $i=1, 2,\ldots, m$. Diciamo r_i i raggi congiungenti u_{1i} con u_{2i}, diciamo l'_i gli archi $u'_{ik}u'_{i+1,k}$ di C_3^*, diciamo l''_i gli archi $u''_{ik}u''_{i+1,k}$ di C_4^*, diciamo $J_i \subset C_2 - C_1$, $J'_i \subset C_4 - C_3$ le regioni di JORDAN tali che $J_i^* = l_{1i}^{-1} r_i l_{2i} r_{i+1}^{-1}$, $J_i'^* = l_i'^{-1}\gamma'_i l''_i \gamma'^{-1}_{i+1}$, $i=1, 2,\ldots, m$. Diciamo ora t_i omeomorfismi qualsiasi tra r_i e γ'_i, τ'_i gli omeomorfismi subordinati da Ω'_{p_k} tra l_{1i} e l'_i, τ''_i quelli subordinati da Ω''_{p_k} tra l_{2i} e l''_i, $i=1, 2,\ldots, m$. Allora, se Ω_i è l'omeomorfismo tra J_i^* e $J_i'^*$ che coincide con t_i tra r_i e γ'_i, con t_{i+1} tra r_{i+1} e γ'_{i+1}, con τ'_i tra l_{1i} e l'_i, con τ''_i tra l_{2i} e l''_i, allora Ω_i può essere completato (n. 19) in un omeomorfismo tra J_i e J'_i che indicheremo ancora con Ω_i. Diciamo Ω' l'omeomorfismo di C in se stesso che coincide con Ω'_{p_k} tra C_1 e C_3, con Ω''_{p_k} tra $C - C_2$ e $C - C_4$, con Ω_i tra J_i e J'_i, $i=1, 2,\ldots, m$.

Siano $u_2 \in C$, $u_1 \in C$ punti qualsiasi con $u_2 = \Omega'(u_1)$. Se $u_1 \in C_1$ onde $u_2 \in C_3$, oppure se $u_1 \in C - C_2$ onde $u_2 \in C - C_4$, allora sappiamo già che $\{ T_0(u_2), T_2(u_1) \} = \{ T_3(u_2), T_2(u_1) \} \leqslant 1/n$, oppure $\{ T_0(u_2), T_2(u_1) \} = \{ T_4(u_2), T_2(u_1) \} \leqslant 1/n$. Se $u_1 \in C_2 - C_1$, allora $u_1 \in J_i$, $u_2 \in J'_i$ per un certo i ed u_1 è congiunto da un segmento di raggio ad un punto $u'_1 \in C_2^*$, $T_2(u_1) = T_2(u'_1)$ e $u'_1 \in l_{2i}$. D'altra parte o u_2 è congiunto da un arco γ ad un punto $u'_2 \in C_4$, $T_0(u_2) = T_0(u'_2)$ e $u'_2 \in l''_i$, oppure u_2 dista meno di δ da un punto u_{20} di γ_i (o γ_{i+1}) e posto $u'_2 = u''_i$ (o $u'_2 = u''_{i+1}$) si ha $\{ T_0(u_2), T_0(u'_2) \} \leqslant \{ T_0(u_2), T_0(u_{20}) \} + \{ T_0(u_{20}), T_0(u'_2) \} \leqslant \omega(\delta) + 0 \leqslant 1/n$. Di più, essendo $u'_2 \in C_4$ è $T_0(u'_2) = T_4(u'_2)$. Se $\overline{u}_2 = \Omega''_{p_k}(u'_2)$, allora $\overline{u}_2 \in C_2^*$, $\overline{u}_2 \in l_{2i}$, $\{ T_4(u'_2), T_2(\overline{u}_2) \} \leqslant 1/p_k$. Finalmente, su l_{2i}, T_2 ha una oscillazione $\leqslant 1/n$ e perciò $\{ T_2(\overline{u}_2), T_2(u'_1) \} \leqslant 1/n$. Pertanto $\{ T_2(u_1), T_0(u_2) \} \leqslant \{ T_2(u_1), T_2(u'_1) \} + \{ T_2(u'_1), T_2(\overline{u}_2) \} + \{ T_2(\overline{u}_2), T_4(u'_2) \} + \{ T_4(u'_2), T_0(u'_2) \} + \{ T_0(u'_2), T_0(u_2) \} \leqslant 0 + 1/n + 1/p_k + 0 + 1/n \leqslant 3/n$. Dunque in ogni caso $\{ T_2(u_1), T_0(u_2) \} \leqslant 3/n$ per ogni $u_1 \in C$, $u_2 \in C$, $u_2 = \Omega'(u_1)$.

Poichè ciò vale per ogni n si ha $(T_0, C) \sim (T_2, C)$. Da $(T_2, C) \sim (T, C)$ segue infine $(T_0, C) \sim (T, C)$, ciò che dimostra la 1).

32. – I Lemmi dei nn. 27, 28, 29 30 e il teorema del n. 31 possono essere enunciati anche per trasformazioni (T, C), (T_1, C_1) ove C, C_1 sono cerchi di $\mathfrak{C}$ concentrici. Tali casi si riducono ai precedenti utilizzando convenientemente il n. 10. Gli stessi enunciati valgono altresì per trasformazioni definite in corone circolari concentriche del piano o della sfera $\mathfrak{C}$.

§ 3. – Teoremi di rappresentazione per superficie chiuse.

33. – Teorema I. *Ogni superficie $\mathfrak{S}$ dello spazio euclideo E_3 chiusa non degenere, con $L(\mathfrak{S}) < +\infty$, ammette una rappresentazione $\mathfrak{S}$: $(\mathfrak{T}, \mathfrak{C})$ sulla sfera unità $\mathfrak{C}$ avente le seguenti proprietà:* 1) *le superficie S_σ: $(\mathfrak{T}, E_\sigma)$, S_ν: $(\mathfrak{T}, E_\nu)$, ove E_σ, E_ν sono gli emisferi inferiore e superiore* (n. 10), *sono aperte non degeneri, oppure di tipo A;* 2) $L(S_\nu) + L(S_\sigma) = L(\mathfrak{C})$; 3) *in E_ν ed E_σ esistono aggregati numerabili di cerchi $c_{\nu i}$, $c_{\sigma i}$, $i = 1, 2, \ldots$, su ciascuno dei quali $\mathfrak{T}$ è quasi conforme;* 4) *le superficie $S_{\nu i}$: $(\mathfrak{T}, c_{\nu i})$, $S_{\sigma i}$: $(\mathfrak{T}, c_{\sigma i})$, $i = 1, 2, \ldots$, sono aperte non degeneri e $\Sigma L(S_{\nu i}) + \Sigma L(S_{\sigma i}) = L(\mathfrak{S})$;* 5) *la curva l: $(\mathfrak{T}, q)$, q circonferenza equatoriale, è rettificabile* ([20]).

Dimostrazione. Sia $(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{C})$ una rappresentazione qualsiasi di $\mathfrak{S}$ su $\mathfrak{C}$. Esiste su $\mathfrak{C}$ necessariamente una circonferenza σ' sulla quale $\mathfrak{T}_1$ è non costante. Diciamo l' la curva l': $(\mathfrak{T}_1, \sigma')$. Scelto un omeomorfismo Ω' di σ' in q, tale omeomorfismo può essere completato (n. 19) in un unico omeomorfismo, che diremo ancora Ω', della sfera $\mathfrak{C}$ in sè. Se $\mathfrak{T}_2 = \mathfrak{T}_1\Omega'$, allora $\mathfrak{S}$: $(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{C}) \sim$ $\sim (\mathfrak{T}_2, \mathfrak{C})$, le superficie S'_ν: $(\mathfrak{T}_2, E_\nu)$, S'_σ: $(\mathfrak{T}_2, E_\sigma)$ sono aperte non degeneri o di tipo A (n. 9) e $L(S'_\nu) + L(S'_\sigma) \leq L(\mathfrak{S})$ (n. 15).

Sia (T_2, C) la trasformazione che si ottiene proiettando dal polo u_σ sul cerchio equatoriale C di $\mathfrak{C}$ la trasformazione $(\mathfrak{T}_2, E_\nu)$. Diciamo C_0 il cerchio concentrico a C e raggio $1/\sqrt{3}$. Per il n. 17 esiste una trasformazione (T'_2, C_0) tale che 1) $(T'_2, C_0) \sim (T_2, C)$; 2) esiste in C_0 un aggregato numerabile di cerchi c'_i, $i = 1, 2, \ldots$, (eventualmente uno solo che può coincidere con C_0) e su ciascuno di essi T'_2 è quasi conforme. Proiettando (T'_2, C_0) dal polo u_σ su $\mathfrak{C}$ si ottiene una trasformazione $(\mathfrak{T}'_2, C_\nu)$ ove C_ν è la calotta dei punti (θ, φ) di $\mathfrak{C}$

([20]) Questo come il teorema del n. 34 sono teoremi di rappresentazione per superficie chiuse, ottenuti partendo dai teoremi enunciati al n. 17 per le superficie aperte non degeneri e di tipo A.

con $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/3$ e $(\mathfrak{T}_2', C_\nu) \sim (\mathfrak{T}_2, E_\nu)$. Qui abbiamo introdotto coordinate polari di centro O il centro di $\mathfrak{C}$ e asse polare l'asse Ou_ν. Per i nn. 31-32 esiste una trasformazione $(\mathfrak{T}_3, \mathfrak{C})$ avente le seguenti proprietà 1) $\mathfrak{S}$: $(\mathfrak{T}_2, \mathfrak{C}) \sim (\mathfrak{T}_3, \mathfrak{C})$; 2) S_ν': $(\mathfrak{T}_2, E_\nu) \sim (\mathfrak{T}_2', C_\nu) = (\mathfrak{T}_3, C_\nu)$; 3) S_σ': $(\mathfrak{T}_2, E_\sigma) = (\mathfrak{T}_3, E_\sigma)$.

Esiste ora su E_ν (ad esempio nel cerchio c_1 di E_ν corrispondente al cerchio c_1' di C_0) una curva semplice chiusa orientata σ su cui $\mathfrak{T}_3$ è non costante e vi rappresenta una curva chiusa l: $(\mathfrak{T}_3, \sigma)$ *rettificabile* (n. 17). Scelto un omeomorfismo Ω di σ in q, tale omeomorfismo può essere completato (n. 19) in un unico omeomorfismo, che diremo ancora Ω della sfera $\mathfrak{C}$ in sè. Se $\mathfrak{T}_4 = \mathfrak{T}_3\Omega$, allora $\mathfrak{S}$: $(\mathfrak{T}_3, \mathfrak{C}) \sim (\mathfrak{T}_4, \mathfrak{C})$, le superficie S_ν: $(\mathfrak{T}_4, E_\nu)$, S_σ: $(\mathfrak{T}_4, E_\sigma)$ sono aperte non degeneri o di tipo A (n. 9) e $L(S_\nu) + L(S_\sigma) \leqslant L(\mathfrak{S})$ (n. 15). Di più la curva l: $(\mathfrak{T}_3, \sigma) \sim (\mathfrak{T}_4, q)$ è rettificabile e perciò (n. 15) $L(S_\nu) + L(S_\sigma) = L(\mathfrak{S})$.

Sia (T_4, C) la trasformazione che si ottiene proiettando $(\mathfrak{T}_4, E_\nu)$ dal polo u_σ su C. Per il n. 17 esiste una trasformazione (T_4', C_0) sul cerchio C_0 tale che 1) $(T_4', C_0) \sim (T_4, C)$; 2) esiste in C_0 un aggregato numerabile di cerchi $c_{\nu i}'$, $i = 1, 2, \ldots$, su ciascuno dei quali T_4' è quasi conforme e vi rappresenta una superficie $S_{\nu i}$ aperta non degenere con $\sum L(S_{\nu i}) = L(S_\nu)$. Proiettando (T_4', C_0) dal polo u_σ su $\mathfrak{C}$ si ottiene una trasformazione $(\mathfrak{T}_4', C_\nu) \sim (\mathfrak{T}_4, E_\nu)$. Per i nn. 31, 32 esiste una trasformazione $(\mathfrak{T}_5, \mathfrak{C})$ avente le proprietà seguenti: 1) $\mathfrak{S}$: $(\mathfrak{T}_4, \mathfrak{C}) \sim (\mathfrak{T}_5, \mathfrak{C})$; 2) S_ν: $(\mathfrak{T}_4, E_\nu) \sim (\mathfrak{T}_4', C_\nu) = (\mathfrak{T}_5, C_\nu)$; 3) S_σ: $(\mathfrak{T}_4, E_\sigma) = (\mathfrak{T}_5, E_\sigma)$; 4) se $c_{\nu i}$ sono i cerchi proiezione dei cerchi $c_{\nu i}'$ di C_0 da u_σ su $\mathfrak{C}$, allora $S_{\nu i}$: $(\mathfrak{T}_4, c_{\nu i}) = (\mathfrak{T}_5, c_{\nu i})$ e $\mathfrak{T}_5$ è quasi conforme su $c_{\nu i}$, $i = 1, 2, \ldots$.

Sia (T_5, C) la trasformazione che si ottiene proiettando $(\mathfrak{T}_5, E_\sigma)$ dal polo u_ν su C. Per il n. 17 esiste una trasformazione (T_5', C_0) sul cerchio C_0 tale che 1) $(T_5', C_0) \sim (T_5, C)$; 2) esiste in C_0 un aggregato numerabile di cerchi $c_{\sigma i}'$, $i = 1, 2, \ldots$, su ciascuno dei quali T_5' è quasi conforme e vi rappresenta una superficie $S_{\sigma i}$ aperta non degenere con $\sum L(S_{\sigma i}) = L(S_\sigma)$. Proiettando (T_5', C_0) dal polo u_ν su $\mathfrak{C}$ si ottiene una trasformazione $(\mathfrak{T}_5', C_\sigma) \sim (\mathfrak{T}_5, E_\sigma)$, ove C_σ è la calotta dei punti (θ, φ) di $\mathfrak{C}$ con $2\pi/3 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Per i nn. 31-32 esiste una trasformazione $(\mathfrak{T}, \mathfrak{C})$ avente le seguenti proprietà: 1) $\mathfrak{S}$: $(\mathfrak{T}_5, \mathfrak{C}) \sim (\mathfrak{T}, \mathfrak{C})$; 2) S_ν: $(\mathfrak{T}_5, C_\nu) = (\mathfrak{T}, C_\nu)$; 3) S_σ: $(\mathfrak{T}_5, E_\sigma) \sim (\mathfrak{T}_5', C_\sigma) = (\mathfrak{T}, C_\sigma)$; 4) $S_{\nu i}$: $(\mathfrak{T}_5, c_{\nu i}) = (\mathfrak{T}, c_{\nu i})$, $i = 1, 2, \ldots$, e $\mathfrak{T}$ è quasi conforme su $c_{\nu i}$; 5) se $c_{\sigma i}$ sono i cerchi proiezione dei cerchi $c_{\sigma i}'$ di C_0 da u_ν su $\mathfrak{C}$, allora $S_{\sigma i}$: $(\mathfrak{T}_5, c_{\sigma i}) = (\mathfrak{T}, c_{\sigma i})$, $i = 1, 2, \ldots$, e $\mathfrak{T}$ è quasi conforme su $c_{\sigma i}$; 6) $\sum L(S_{\nu i}) + \sum L(S_{\sigma i}) = L(S_\nu) + L(S_\sigma) = L(\mathfrak{S})$; 7) la curva l: $(\mathfrak{T}_4, q) = (\mathfrak{T}_5, q) = (\mathfrak{T}, q)$ è rettificabile. Il teorema è con ciò completamente dimostrato.

34. – Teorema II. *Ogni superficie S dello spazio euclideo E_3 chiusa non degenere con $L(S) < +\infty$, ammette una rappresentazione S: (T, C) sul cerchio unità C tale che, indicato con C_1 il cerchio concentrico di raggio $1/2$ ed R la regione $R = C - C_1$, si ha* 1) *la superficie S_1: (T, C_1) è aperta non degenere o* *di tipo A e la superficie* S_2: (T, R) *è di area nulla*; 2) $L(S_1) = L(S)$; 3) *in* C_1 *esiste un aggregato numerabile di cerchi* c_i, $i = 1, 2, \ldots$, *su ciascuno dei quali* T *è quasi conforme*; 4) *le superficie* S_i: (T, c_i), $i = 1, 2, \ldots$, *sono aperte non degeneri e* $\sum L(S_i) = L(S)$; 5) *la curva continua e chiusa* l: (T, C_1^*) *ha le sue proiezioni, sui piani* $x^{(h)} = 0$, $h = 1, 2, 3$, *di misura nulla* [21].

Dimostrazione. Sia (T_1, C) una qualsiasi rappresentazione della S sul cerchio C. Allora T_1 è costante su C^* e fa corrispondere a C^* un solo punto $x_0 = T(C^*)$. Sia $(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{C})$ la trasformazione associata alla (T_1, C) secondo il n. 10 e $\mathfrak{S}$: $(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{C})$. Si noti che $x_0 = \mathfrak{T}_1(u_\sigma)$. Diciamo g_0 il continuo della collezione $G(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{C})$ che contiene u_σ (n. 3). Tale continuo non ricopre $\mathfrak{C}$ e nell'insieme aperto $\mathfrak{C} - g_0$ possiamo scegliere un arco σ' di cerchio massimo di $\mathfrak{C}$ sul quale $\mathfrak{T}_1$ è non costante e $\sigma' g_0 = 0$. Mediante un omeomorfismo Ω' di $\mathfrak{C}$ in sè che trasforma l'arco σ' nel meridiano $m_0 \equiv [u^{(2)} = 0,\ u^{(3)} \leq 0,\ u^{(1)2} + u^{(3)2} = 1]$ di $\mathfrak{C}$ e applicando il procedimento del n. 22, avremo una nuova trasformazione $(\mathfrak{T}_2, \mathfrak{C})$ e si avrà 1) $(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{C}) \sim (\mathfrak{T}_2, \mathfrak{C})$; 2) la superficie S'_ν: $(\mathfrak{T}_2, E_\nu)$ è aperta non degenere o di tipo A (n. 9); 3) la superficie S'_σ: $(\mathfrak{T}_2, E_\sigma)$ è di area nulla (n. 15); 4) $L(S'_\nu) + 0 = L(S'_\nu) + L(S'_\sigma) \leq L(\mathfrak{S}) = L(S)$ (nn. 15-16). Sia (T_2, C) la trasformazione che si ottiene proiettando $(\mathfrak{T}_2, E_\nu)$ da u_σ sul cerchio equatoriale C. Diciamo C_0 il cerchio concentrico a C di raggio $1/\sqrt{3}$. Per il n. 17 esiste una trasformazione (T'_2, C_0) tale che 1) $(T'_2, C_0) \sim (T_2, C)$; 2) esiste in C_0 un aggregato numerabile di cerchi $\bar{c}'_i$, $i = 1, 2, \ldots$, su ciascuno dei quali T'_2 è quasi conforme. Proiettando (T'_2, C_0) dal polo u_σ su E_ν si ottiene una trasformazione $(\mathfrak{T}'_2, C_\nu) \sim (\mathfrak{T}_2, E_\nu)$. Per i nn. 31, 32 esiste una trasformazione $(\mathfrak{T}_3, \mathfrak{C})$ avente le seguenti proprietà: 1) $\mathfrak{S}$: $(\mathfrak{T}_2, \mathfrak{C}) \sim (\mathfrak{T}_3, \mathfrak{C})$; S'_ν: $(\mathfrak{T}_2, E_\nu) \sim (\mathfrak{T}'_2, C_\nu) = (\mathfrak{T}_3, C_\nu)$; 3) S'_σ: $(\mathfrak{T}_2, E_\sigma) = (\mathfrak{T}_3, E_\sigma)$. Diciamo $\bar{c}_i$, $i = 1, 2, \ldots$, i cerchi di E_ν proiezione dei cerchi $\bar{c}'_i$ di C_0. La trasformazione $\mathfrak{T}_3$ è quasi conforme sui cerchi $\bar{c}_i$, $i = 1, 2, \ldots$, (n. 17).

Sappiamo che $(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{C}) \sim (\mathfrak{T}_2, \mathfrak{C})$ e perciò per opportuni omeomorfismi Ω'_n, $n = 1, 2, \ldots$, si ha $\{\mathfrak{T}_1(u'), \mathfrak{T}_2(u'')\} \leq 1/n$ se $u'' = \Omega'_n(u')$. Inoltre (n. 22) si può supporre che Ω'_n si riduca su σ' all'omeomorfismo Ω', tra σ' e il meridiano m_0, indipendente da n. Sappiamo che $(\mathfrak{T}_2, \mathfrak{C}) \sim (\mathfrak{T}_3, \mathfrak{C})$ e perciò per opportuni omeomorfismi Ω''_n, $n = 1, 2, \ldots$, si ha $\{\mathfrak{T}_2(u''), \mathfrak{T}_3(u''')\} \leq 1/n$ se $u''' = \Omega''_n(u'')$. Inoltre si può supporre che Ω_n si riduca (nn. 31, 32) sul meridiano m_0 all'identità. Posto $\Omega_n = \Omega''_n \Omega'_n$, allora $\{\mathfrak{T}_3(u'''), \mathfrak{T}_1(u')\} \leq 2/n$ se $u''' = \Omega_n(u')$.

Poniamo $u_n = \Omega_n(u_\sigma)$. Esisterà una sottosuccessione Ω_{n_k} per la quale esiste il limite $u_{n_k} \to u_0$, ove u_0 sarà un opportuno punto di $\mathfrak{C}$, quando $k \to \infty$. Dimostriamo che u_0 è punto *interno* ad uno dei cerchi $\bar{c}_i$ di C_ν. Infatti, nella ipotesi opposta, esisterebbe (n. 17) un continuo γ congiungente u_0 con c_ν^*

---

[21] Cfr. un'altra dimostrazione di questo stesso teorema, in loc. cit. in [2], *f*, pp. 342-350.

e perciò anche con q (nn. 31-32) e col meridiano m_0 (n. 22) sul quale continuo γ la trasformazione $\mathfrak{T}_2$ è costante. Diciamo che γ congiunge u_0 con il punto $\bar{u} \in m_0$. Ora $\bar{u}$ è il corrispondente per Ω' di un ben determinato punto u' di σ' e non solo $\bar{u} = \Omega'(u_\sigma)$, ma anche $\bar{u} = \Omega_n(u')$ per ogni n. Dunque $\bar{u} = \Omega_n(u')$, $u_n = \Omega_n(u_\sigma)$, $u_n \to u_0$, $u_0 \in \gamma$, $\bar{u} \in \gamma$. Dal n. 12 segue che esiste un continuo $\gamma' \subset \mathfrak{C}$ congiungente u' con u_σ sul quale $\mathfrak{T}_1$ è costante. Allora $\gamma' \subset g_0$ e poichè $\gamma'\sigma' \neq 0$, anche $g_0\sigma' \neq 0$ ciò che è assurdo. Abbiamo dimostrato che u_0 è un punto interno di un cerchio $\bar{c}_i$ di E_ν.

Posto $\delta_k = \{u_{nk}, u_0\}$ diciamo j_k il cerchio di $\mathfrak{C}$ di centro u_0 e raggio $2\delta_k$. A j_k corrisponde per Ω_{nk} una regione di JORDAN j'_k su $\mathfrak{C}$ contenente u_σ (perchè j_k contiene u_{nk}) e l'oscillazione (n. 2) di Ω_{nk} su j'_k è esattamente $4\delta_k$ (il diametro di j_k). Possiamo modificare Ω_{nk} in j'_k in modo che al polo u_σ corrisponda non il punto u_{nk} ma il punto u_0. Basterà dividere j'_k e j_k in convenienti parti e applicare il n. 19. Si avrà ora $u_0 = \Omega_{nk}(u_\sigma)$ e $\{\mathfrak{T}_1(u), \mathfrak{T}_3(u')\} \leq 2/n_k + 4\delta_k$ se $u' = \Omega_{nk}(u)$, $k = 1, 2,\ldots$, ove $\delta_k \to 0$ quando $k \to \infty$. Con una conveniente scelta della successione n_k e scrivendo Ω'_k al posto di Ω_{nk} avremo $\{\mathfrak{T}_1(u), \mathfrak{T}_3(u')\} \leq 1/k$ se $u' = \Omega'_k(u)$. Inoltre $u_0 = \Omega'_k(u_\sigma)$, $k = 1, 2,\ldots$.

Possiamo ora scegliere su $\bar{c}_i$ un arco semplice aperto σ contenente u_0 come punto interno, completamente interno a $\bar{c}_i$, sul quale $\mathfrak{T}_3$ è non costante e $\mathfrak{T}_3$ fa corrispondere a σ una curva l avente le tre proiezioni sui piani coordinati di misura nulla (n. 17). Mediante un omeomorfismo Ω di $\mathfrak{C}$ in sè trasformiamo σ nel meridiano m_0 in modo che u_0 vada nel polo u_σ e applichiamo alla $(\mathfrak{T}_3, \mathfrak{C})$ il procedimento del n. 22. Avremo una nuova trasformazione $(\mathfrak{T}_4, \mathfrak{C})$ tale che 1) $\mathfrak{S}$: $(\mathfrak{T}_3, \mathfrak{C}) \sim (\mathfrak{T}_4, \mathfrak{C})$; 2) la superficie S_ν: $(\mathfrak{T}_4, E_\nu)$ è aperta non degenere o di tipo A; 3) la superficie S_σ: $(\mathfrak{T}_4, E_\sigma)$ è di area nulla. Perciò (nn. 15-16) $L(S_\nu) + 0 = L(S_\nu) + L(S_\sigma) = L(\mathfrak{S}) = L(S)$, poichè ora la curva $\mathfrak{L} = ll^{-1}$: $(\mathfrak{T}_4, q)$ ha proiezioni sui piani coordinati di misura nulla (n. 15). È così dimostrato che $L(S_\nu) = L(S)$.

Sia (T_4, C) la trasformazione che si ottiene proiettando $(\mathfrak{T}_4, E_\nu)$ dal polo u_σ sul cerchio C. Per il n. 17 esiste una trasformazione (T'_4, C_0) tale che 1) $(T'_4, C_0) \sim (T_4, C)$; 2) esiste in C_0 un aggregato numerabile di cerchi c'_i, $i=1, 2,\ldots$, su ciascuno dei quali T'_4 è quasi conforme e le superficie S_i: (T_4, c'_i) sono aperte non degeneri con $\sum L(S_i) = L(S_\nu)$. Proiettando (T'_4, C_0) da u_σ su $\mathfrak{C}$ si ottiene una trasformazione $(\mathfrak{T}'_4, C_\nu) \sim (\mathfrak{T}_4, E_\nu)$. Per i nn. 31-32 esiste una trasformazione $(\mathfrak{T}, \mathfrak{C})$ tale che *a*) $\mathfrak{S}$: $(\mathfrak{T}_4, \mathfrak{C}) \sim (\mathfrak{T}, \mathfrak{C})$; *b*) S_ν $(\mathfrak{T}_4, E_\nu) \sim (\mathfrak{T}'_4, C_\nu) = (\mathfrak{T}, C_\nu)$; *c*) S_σ: $(\mathfrak{T}_4, E_\sigma) = (\mathfrak{T}, E_\sigma)$; *d*) se c_i sono i cerchi di E_ν corrispondenti ai cerchi c'_i di C_0 si ha S_i: $(\mathfrak{T}, c_i) = (\mathfrak{T}_4, c_i) \sim (T_4, c'_i)$ e $\sum L(S_i) = L(S_\nu) = L(S)$.

Diciamo (T, C) la trasformazione associata alla $(\mathfrak{T}, \mathfrak{C})$ secondo il n. 10 e ricordiamo che la $\mathfrak{T}$ del n. 10 si riduce tra C_1 ed E_ν al prodotto di una omotetia di rapporto 2 e della proiezione da u_σ su $\mathfrak{C}$ e quindi essa conserva le trasformazioni conformi. Posto $S_- = S_\nu$ è S_1: $(\mathfrak{T}, E_\nu) \sim (T, C_1)$ e, da b), d) seguono 1) e 4) del teorema. Se diciamo S_2 la superficie S_2: (T, R), allora $L(S_2) = L(S_\sigma) = 0$ e anche tutte le rimanenti proposizioni del teorema sono provate. Dobbiamo solo dimostrare che $(T, C) \sim (T_1, C)$.

Sappiamo che $(\mathfrak{T}_3, \mathfrak{C}) \sim (\mathfrak{T}, \mathfrak{C})$ e quindi, per opportuni omeomorfismi Ω''_k, $k = 1, 2, \ldots$, si ha $\{ \mathfrak{T}_3(u), \mathfrak{T}(u') \} \leqslant 1/k$ se $u' = \Omega''_k(u)$. Possiamo supporre che, per ogni k, sia $\Omega''_k(u_0) = u_\sigma$ come si è anche detto avanti (basta ripetere il ragionamento). Allora, posto $\Omega_k = \Omega''_k \Omega'_k$, si ha $\{ \mathfrak{T}_1(u), \mathfrak{T}(u') \} \leqslant 2/k$ se $u' = \Omega_k(u)$. Inoltre $\Omega_k(u_\sigma) = \Omega''_k \Omega'_k(u_\sigma) = \Omega''_k(u_0) = u_\sigma$, $k = 1, 2, \ldots$. Si noti ancora che $\{ \mathfrak{T}_1(u_\sigma), \mathfrak{T}(u_\sigma) \} \leqslant 2/k$ per ogni k e perciò $\mathfrak{T}_1(u_\sigma) = \mathfrak{T}(u_\sigma)$.

Diciamo $\omega(\delta)$ il modulo di continuità della trasformazione $(\mathfrak{T}, \mathfrak{C})$. Sia j_k il cerchio di centro u_σ e raggio $1/k$ e j'_k la regione semplice di JORDAN contenente u_σ che corrisponde a j_k per la Ω_k. Si noti che Ω_k^{-1} ha su j'_k una oscillazione $= 2/k$. Siano $j_{k0} = j'_{k0}$ cerchi uguali di centro u_σ e completamente contenuti in j_k e j'_k rispettivamente. Si noti che $\mathfrak{T}_1$ ha su j_k una oscillazione $\leqslant \omega(2/k)$ e $\mathfrak{T}$ ha su j'_k una oscillazione $\leqslant \omega(2/k) + 4/k$. Definiamo un nuovo omeomorfismo Ω_k stabilendo che esso coincida con il precedente tra $\mathfrak{C} - j_k$ e $\mathfrak{C} - j'_k$, coincida con l'identità in j_{k0} e j'_{k0} e poichè Ω_k è così già definito sulle frontiere delle regioni di JORDAN di connessione 1, $j_k - j_{k0}$, $j'_k - j'_{k0}$, Ω_k può essere completata sulle stesse regioni (n. 19). In tal modo si ha $\{ \mathfrak{T}_1(u), \mathfrak{T}(u') \} \leqslant 2/k$ se $u \in \mathfrak{C} - j_k$, $\leqslant \{ \mathfrak{T}_1(u), \mathfrak{T}_1(u_\sigma) \} + \{ \mathfrak{T}_1(u_\sigma), \mathfrak{T}(u_\sigma) \} + \{ \mathfrak{T}(u_\sigma), \mathfrak{T}(u') \} \leqslant \omega(2/k) + 0 + \omega(2/k) + 4/k = 4/k + 2\omega(2/k)$ se $u \in j_k$. Se ora poniamo $\Omega_{0k} = \tau^{-1}\Omega_k\tau$, allora Ω_0 è un omeomorfismo di C in sè, identico su C^* e si ha $\{ T_1(u), T(u') \} \leqslant 4/k + 2\omega(2/k)$ se $u' = \Omega_{0k}(u)$, $u \in C$, $u' \in C$. Poichè l'ultima espressione tende a zero quando $k \to \infty$, ne risulta $T_1 \sim T$.

Università di Bologna.