† LEONIDA TONELLI

Nuove ricerche su una speciale classe di problemi di Calcolo delle Variazioni. (*)

In una Memoria *Su un nuovo tipo di problemi di Calcolo delle Variazioni* (1), che ebbe origine dallo studio di una questione di alta tecnica e che venne pubblicata nel 1941, ho dato un teorema di minimo per una classe di problemi di Calcolo delle Variazioni, che si presentano sotto condizioni diverse da quelle consuete, poichè sulle curve che in essi si prendono in considerazione deve essere costantemente verificata una certa disuguaglianza differenziale. Inoltre, il campo del piano (x, y), in cui si muovono queste curve, è un rettangolo R, a lati paralleli agli assi coordinati, e su uno dei lati paralleli all'asse delle x la funzione integranda dell'integrale da rendere minimo $\int\limits_C g(y, y')\,dx$ — che è un integrale curvilineo in forma ordinaria, con la $g(y, y')$ dipendente soltanto da y e y' — diventa singolare, perchè, fissato un qualsiasi valore positivo della y', al tendere della y all'ordinata del lato di R indicato la $g(y, y')$ diventa infinita.

Nel teorema da me dimostrato, il quale riflette le ipotesi imposte dalla questione tecnica che ad esso mi condusse, il punto iniziale, comune a tutte le curve prese in esame, è situato fuori del lato di R su cui la $g(y, y')$ diventa singolare; ed in base a ciò ho potuto liberarmi completamente della zona di singolarità per la $g(y, y')$ dimostrando preliminarmente:

1°) che ogni curva ammissibile, uscente da un punto non appartenente

---

(*) Il TONELLI presentava questo Suo Lavoro, che purtroppo fu l'ultimo, con la seguente postilla:

« Dopo un periodo dedicato ai miei doveri verso la Patria, riprendo ora la mia « attività scientifica, con la certezza che l'Italia, superando con animo forte questi « tristissimi anni, manterrà nella Scienza quel posto onorevole che seppe conquistarsi. »

(*N. d. R.*)

(1) Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) **10**, 167-189 (1941).

al lato di R che contiene la singolarità della $g(y, y')$, non può mai raggiungere tale lato;

2º) che le curve di ogni successione minimizzante per l'integrale della $g(y, y')$, tutte uscenti da uno stesso punto non situato sul lato indicato di R, si mantengono tutte ad una distanza, da tale lato, maggiore di un numero positivo fisso, determinabile *a priori*.

Per dare al mio teorema un campo d'applicazione più largo di quello che richiede la particolare questione che al teorema stesso mi ha condotto, interessa vedere che esso si estende al caso in cui le curve ammissibili escono tutte da uno stesso punto del lato di R su cui la $g(y, y')$ diviene singolare. L'indagine, in tal caso, si complica maggiormente; ma, come si vedrà in questa Memoria, introdotta qualche ulteriore precisazione sul comportamento della $g(y, y')$ nella zona di singolarità, il teorema resta ancora valido.

Il presente lavoro, il cui scopo principale è quello di ottenere l'estensione del mio teorema al caso accennato, si propone anche di ritrovare i risultati già stabiliti nella mia precedente Memoria con un nuovo procedimento. La nuova via, che qui seguo, evita completamente il passaggio dalla forma ordinaria dell'integrale da rendere minimo alla forma parametrica, e consente perciò una maggior larghezza nelle ipotesi sulla funzione integranda.

Dividerò, pertanto, la mia esposizione in due parti. Nella prima supporrò che le curve ammissibili escano tutte da uno stesso punto non situato sul lato singolare del rettangolo R; e nella seconda porrò, invece, proprio su tale lato il punto iniziale comune a tutte le curve ammissibili.

Capitolo I.

1. – Nel piano che vogliamo considerare, assumeremo un sistema cartesiano ortogonale di assi x e y, e indicheremo con R il rettangolo costituito da tutti i punti (x, y) soddisfacenti alle disuguaglianze

$$X_0 \leqslant x \leqslant X_1 , \qquad Y_0 \leqslant y \leqslant Y_1 ,$$

nelle quali X_0, X_1, Y_0, Y_1 sono delle costanti date, tali che $X_0 < X_1$ e $Y_0 < Y_1$.

Ciò posto, siano $\varphi(y)$ e $\psi(y)$ due funzioni, reali e ad un valore, definite sull'intervallo (Y_0, Y_1), continue, e tali che la prima di esse ammetta, pure finite e continue, in tutto l'intervallo detto, le due derivate $\varphi'(y)$ e $\varphi''(y)$; inoltre, si abbia

$$\varphi(Y_1) = 0 , \qquad \psi(Y_1) < 0 , \tag{1}$$

e, per ogni y soddisfacente alle disuguaglianze $Y_0 \leqslant y < Y_1$,

(2) $$\varphi(y) > 0 .$$

Sia poi $f(y, y')$ una funzione, reale e ad un valore, definita per ogni y tale che $Y_0 \leqslant y < Y_1$ e per ogni valore finito di y', e soddisfacente alle seguenti condizioni:

1°) per tutti gli y e y' indicati, essa sia continua, insieme con le sue derivate parziali dei primi due ordini, verifichi la disuguaglianza

(3) $$f_{y'y'}(y, y') > 0 ,$$

e sia tale che

(4) $$f(y, y') - y' f_{y'}(y, y') \to 0 ,$$

per $y' \to +\infty$;

2°) esistano due costanti γ e $\overline{Y}$, con $\gamma > 0$ e $Y_0 \leqslant \overline{Y} < Y_1$, in modo da risultare, per tutti gli y tali che $\overline{Y} \leqslant y < Y_1$,

(5) $$f(y, y') \geqslant 0 , \quad \text{se} \quad y' \leqslant 0 , \qquad \text{e} \qquad f(y, y') \geqslant \gamma y', \quad \text{se} \quad y' > 0 .$$

2. – Indicato con Y_i un qualsiasi valore soddisfacente alle disuguaglianze $Y_0 \leqslant Y_i < Y_1$, ci proponiamo di dimostrare che:

Nella classe K di tutte le funzioni $y(x)$, reali e ad un valore, definite in (X_0, X_1), assolutamente continue, tali che

(6) $$y(X_0) = Y_i ,$$

(7) $$Y_0 \leqslant y(x) \leqslant Y_1 , \quad \textit{in tutto} \ (X_0, X_1) ,$$

(8) $$y'(x) \geqslant \psi(y(x)), \quad \textit{in quasi tutto} \ (X_0, X_1),$$

e tali, inoltre, che la funzione $\dfrac{1}{\varphi(y(x))} f(y(x), y'(x))$ *risulti integrabile (nel senso del* LEBESGUE) *sull'intervallo* (X_0, X_1) *— intendendo di sostituire ad essa il valore* 0 *ove è* $y(x) = Y_1$ *e ove non esiste finita la* $y'(x)$ *— l'integrale*

(9) $$I[y(x)] \equiv \int_{X_0}^{X_1} \frac{f(y(x), y'(x))}{\varphi(y(x))}\, dx$$

ammette il minimo assoluto.

3. – Proviamo, innanzi tutto, che *la classe K, definita nel* n. 2, *non è vuota.*

Detto Ψ un numero maggiore di zero e più grande del massimo valore assunto dalla funzione $\psi(y)$ nell'intervallo (Y_0, Y_1), sarà sempre, per ogni y di questo intervallo,

(10) $$\psi(y) < \Psi .$$

E siccome è, per la seconda delle (1), $\psi(Y_1) < 0$, potremo determinare, in virtù della continuità della $\psi(y)$, un Y' tale che $Y_0 < Y' < Y_1$ e che, per ogni y dell'intervallo (Y', Y_1), sia

$$\psi(y) < 0 . \tag{11}$$

Ciò premesso, e indicando con η il più grande dei numeri Y' e Y_i, poniamo

$$\xi = X_0 + \frac{\eta - Y_i}{\Psi},$$

onde $\xi \geqslant X_0$, e consideriamo la funzione $y_0(x)$ definita dall'uguaglianza

$$y_0(x) = Y_i + (x - X_0)\Psi$$

nella parte dell'intervallo (X_0, X_1) contenuto in (X_0, ξ), e dall'uguaglianza

$$y_0(x) = \eta$$

in quella eventualmente esterna a (X_0, ξ).

La funzione $y_0(x)$, così definita su tutto (X_0, X_1), è assolutamente continua, verifica la (6) e, in tutto (X_0, X_1), le $Y_0 \leqslant y_0(x) \leqslant \eta < Y_1$. Essa, inoltre, verifica anche la (8), perchè, in tutta la parte di (X_0, X_1) contenuta in (X_0, ξ), è $y_0'(x) = \Psi$ e quindi, per la (10),

$$y_0'(x) = \Psi > \psi(y_0(x)) ;$$

e nella parte di (X_0, X_1), eventualmente esterna a (X_0, ξ), è $y_0'(x) = 0$, onde, essendo in essa $y_0(x) = \eta \geqslant Y'$, risulta, per la (11),

$$y_0'(x) = 0 > \psi(\eta) = \psi(y_0(x)) .$$

Infine, la funzione della x data dalla $\dfrac{f(y(x), y'(x))}{\varphi(y(x))}$ è discontinua solo nel punto $x = \xi$, è limitata su tutto l'intervallo (X_0, X_1), ed è quindi, su questo intervallo, integrabile. Se ne conclude che la $y_0(x)$ è una funzione della classe K, la quale, pertanto, *non è vuota.*

4. – Dimostriamo ora che *nessuna funzione $y(x)$ della classe K può raggiungere il valore Y_1.*

A tal fine, basterà provare che, se $y(x)$ è una funzione assolutamente continua, definita su tutto l'intervallo (X_0, X_1), tale che sia $y(X_0) = Y_i$, con $Y_0 \leqslant y(x) \leqslant Y_1$ su l'intero intervallo detto, e tale, inoltre, che, per almeno un x di (X_0, X_1), verifichi l'uguaglianza $y(x) = Y_1$, la funzione $\dfrac{f(y(x), y'(x))}{\varphi(y(x))}$ *non può risultare integrabile su tutto l'intervallo* (X_0, X_1).

Indichiamo con $\bar{x}$ il più piccolo dei valori di x dell'intervallo (X_0, X_1) nei quali è $y(x) = Y_1$, e proviamo che sull'intervallo $(X_0, \bar{x})$ la funzione $\frac{f(y(x), y'(x))}{\varphi(y(x))}$ non può essere integrabile.

Questo fatto è immediato se per qualche valore x_1, tale che $X_0 < x_1 < \bar{x}$, la $\frac{f(y(x), y'(x))}{\varphi(y(x))}$ risulta *non integrabile* su (X_0, x_1). Supponiamo dunque che la funzione ora scritta sia integrabile su ogni intervallo (X_0, x_1), con $X_0 < x_1 < \bar{x}$, e mostriamo che, per $x_1 \to \bar{x} - 0$, è

$$\int_{X_0}^{x_1} \frac{f(y(x), y'(x))}{\varphi(y(x))} \, dx \to +\infty . \tag{12}$$

Avendo ammesso che la $\varphi(y)$ abbia derivata finita in tutto l'intervallo (Y_0, Y_1) e quindi anche nel punto $y = Y_1$, scelto un numero *positivo* $\lambda > |\varphi'(Y_1)|$, potremo affermare che, per un conveniente Y_2, tale che $Y_0 < Y_2 < Y_1$, risulta

$$\varphi(y) < -\lambda(y - Y_1)$$

tutte le volte che è $Y_2 \leqslant y < Y_1$; ed allora, per gli stessi y, avremo, in virtù della (2),

$$\frac{1}{\varphi(y)} > \frac{1}{-\lambda(y - Y_1)} .$$

Chiamiamo $\overline{Y}'$ il maggiore dei due numeri Y_2 e $\overline{Y}$ (essendo questo il numero considerato nel n. 1) e scegliamo un x' tale che $X_0 \leqslant x' < \bar{x}$ e in modo che, per tutti gli x dell'intervallo $(x', \bar{x})$, escluso $x = \bar{x}$, risulti

$$\overline{Y}' \leqslant y(x) < Y_1 .$$

Per gli stessi x ora indicati ne verrà

$$\frac{1}{\varphi(y(x))} > \frac{1}{-\lambda[y(x) - Y_1]} ;$$

e, se è $x' < x_1 < \bar{x}$, risulterà pure, in virtù delle (5),

$$\int_{x'}^{x_1} \frac{f(y(x), y'(x))}{\varphi(y(x))} \, dx \geqslant \int_{x'}^{x_1} \frac{f(y(x), y'(x))}{-\lambda[y(x) - Y_1]} \, dx \geqslant -\frac{\Upsilon}{\lambda} \int_{x'}^{x_1} \frac{y'(x)}{y(x) - Y_1} \, dx .$$

Secondo il teorema d'integrazione per sostituzione, nella forma generale dovuta a DE LA VALLÉE POUSSIN, abbiamo

$$\int_{x'}^{x_1} \frac{y'(x)}{y(x) - Y_1} \, dx = \int_{y(x')}^{y(x_1)} \frac{dy}{y - Y_1}$$

e perciò

$$(13)\qquad \int_{x'}^{x_1} \frac{f(y(x),\, y'(x))}{\varphi(y(x))}\, dx \geqslant -\frac{\Upsilon}{\lambda} \int_{y(x')}^{y(x_1)} \frac{dy}{y - Y_1} =$$

$$= -\frac{\Upsilon}{\lambda}\Big[\log|\, y - Y_1\,|\Big]_{y(x')}^{y(x_1)} = -\frac{\Upsilon}{\lambda} \log \left| \frac{y(x_1) - Y_1}{y(x') - Y_1} \right|,$$

onde, per $x_1 \to \bar{x} - 0$, essendo $y(\bar{x}) = Y_1$,

$$\int_{x'}^{x_1} \frac{f(y(x),\, y'(x))}{\varphi(y(x))}\, dx \to +\infty.$$

E siccome l'integrale qui scritto differisce da quello che figura nella (12) per un numero finito dipendente da x', ma indipendente da x_1, ne risulta provata la (12) e quindi la *non integrabilità* di $\frac{f(y(x),\, y'(x))}{\varphi(y(x))}$ sull'intervallo $(X_0, \bar{x})$, essendo l'integrale una funzione continua del suo estremo superiore. Con ciò risulta anche provata la non integrabilità della $\frac{f(y(x),\, y'(x))}{\varphi(y(x))}$ su tutto (X_0, X_1), e questo, come si è detto, basta per potere affermare che nessuna $y(x)$ della classe K può raggiungere il valore Y_1.

5. – Possiamo completare il risultato or ora stabilito provando che, *fissato comunque un numero* M, *esiste* (*almeno*) *un valore* Y_M, *tale che sia* $Y_0 < Y_M < Y_1$, *e che, per tutte le funzioni* $y(x)$ *di* K (*se ne esistono*) *soddisfacenti alla disuguaglianza*

$$(14)\qquad I[y(x)] \leqslant M\,,$$

risulti sempre, in tutto (X_0, X_1),

$$(15)\qquad y(x) < Y_M\,.$$

Per stabilire questa proposizione ci è necessario premettere due lemmi, che daremo nei due nn. seguenti.

6. – *Le variazioni totali delle funzioni* $y(x)$ *della classe* K *restano tutte inferiori ad un numero fisso*; con altre parole, esiste un numero finito V tale che tutte le funzioni $y(x)$ della classe K verifichino la disuguaglianza

$$(16)\qquad \int_{X_0}^{X_1} |\, y'(x)\,|\, dx < V\,.$$

Ed infatti, detto ψ_0 il minimo valore della funzione $\psi(y)$ nell'intervallo

(Y_0, Y_1), dall'assoluta continuità delle $y(x)$ della classe K e dalla (8), segue, per ogni $y(x)$ di K, [2]

$$y(X_1) - y(X_0) = \int_{X_0}^{X_1} y'(x)\,dx \geqslant (X_1 - X_0)\psi_0 + \int_{E_y} y'(x)\,dx,$$

dove E_y rappresenta lo pseudointervallo degli x di (X_0, X_1) nei quali la $y'(x)$ esiste finita ed è positiva. È dunque

$$\int_{E_y} y'(x)dx \leqslant -(X_1 - X_0)\psi_0 + \{ y(X_1) - y(X_0) \} \leqslant -(X_1 - X_0)\psi_0 + (Y_1 - Y_0)\,.$$

Se indichiamo con E'_y lo pseudointervallo degli x di (X_0, X_1) nei quali la $y'(x)$ esiste finita ed è $\leqslant 0$, è poi, per la (8),

$$\int_{E'_y} | y'(x) |\,dx = -\int_{E'_y} y'(x)\,dx \leqslant -(X_1 - X_0)\psi_0\,,$$

e ne segue

$$\int_{X_0}^{X_1} | y'(x) |\,dx = \int_{E_y} y'(x)\,dx + \int_{E'_y} | y'(x) |\,dx \leqslant -2(X_1 - X_0)\psi_0 + (Y_1 - Y_0)\,,$$

onde la (16) risulta provata.

7. – *Esiste un numero finito N tale che, per qualsiasi funzione $y(x)$ di K e per qualunque pseudointervallo E di (X_0, X_1), valga sempre la disuguaglianza*

$$\int_E \frac{f(y(x), y'(x))}{\varphi(y(x))}\,dx > N\,. \tag{17}$$

Considerata una $y(x)$ di K ed uno pseudointervallo E di (X_0, X_1), diciamo E' il componente di E in cui è $y(x) \geqslant \overline{Y}$ ed E'' il complementare di E' rispetto ad E.

Per la (5), su E' è quasi ovunque $\dfrac{f(y(x), y'(x))}{\varphi(y(x))} \geqslant 0$, onde

$$\int_{E'} \frac{f(y(x), y'(x))}{\varphi(y(x))}\,dx \geqslant 0\,. \tag{18}$$

---

[2] Si tenga presente che, per la seconda delle (1), è $\psi_0 < 0$.

Per la (3), su E'' è quasi ovunque

$$f(y(x), y'(x)) = f(y(x), 0) + y'(x) f_{y'}(y(x), 0) + \frac{y'^2(x)}{2} f_{y'y'}(y(x), \tilde{y}'(x)) \geqslant$$
$$\geqslant f(y(x), 0) + y'(x) f_{y'}(y(x), 0) \geqslant - m_0 - |\, y'(x)\,|\, m_1 ,$$

avendo qui indicato con m_0 e m_1 i massimi valori assoluti delle $f(y, 0)$ e $f_{y'}(y, 0)$ in tutto l'intervallo $(Y_0, \overline{Y})$. Ne segue, indicando con φ_0 il minimo (> 0, per la (2)) della $\varphi(y)$ in $(Y_0, \overline{Y})$,

$$\int\limits_{E''} \frac{f(y(x), y'(x))}{\varphi(y(x))} dx \geqslant - \int\limits_{E''} \frac{m_0 + |\, y'(x)\,|\, m_1}{\varphi(y(x))} dx \geqslant - \int\limits_{E''} \frac{m_0 + |\, y'(x)\,|\, m_1}{\varphi_0} dx \geqslant$$
$$\geqslant - m_0 \frac{X_1 - X_0}{\varphi_0} - \frac{m_1}{\varphi_0} \int\limits_{E''} |\, y'(x)\,|\, dx ,$$

onde, per la (16),

$$\int\limits_{E''} \frac{f(y(x), y'(x))}{\varphi(y(x))} dx \geqslant - \frac{m_0}{\varphi_0} (X_1 - X_0) - \frac{m_1}{\varphi_0} V . \tag{19}$$

Le (18) e (19) mostrano la validità della (17).

8. – Siamo ora in grado di dimostrare la proposizione enunciata nel n. 5.

Consideriamo ancora il numero λ scelto nel n. 4 e supponiamo (cosa ben lecita) che il numero $\overline{Y}'$, pure ivi considerato, sia maggiore di Y_i (n. 2). Ciò posto, indichiamo con Y_M un numero che verifichi le disuguaglianze

$$\overline{Y}' < Y_M < Y_1 , \tag{20}$$

$$- \frac{\Upsilon}{\lambda} \log \left| \frac{Y_M - Y_1}{\overline{Y}' - Y_1} \right| > M + |\, N\,| , \tag{21}$$

dove N è il numero indicato nel lemma del n. 7.

Ammettiamo che, per una funzione $\overline{y}(x)$ della classe K soddisfacente alla disuguaglianza (14), non valga, in tutto (X_0, X_1), la (15). Allora, essendo $\overline{y}(X_0) = Y_i < \overline{Y}' < Y_M$, dovrà aversi, per qualche x di (X_0, X_1), $\overline{y}(x) = Y_M$.

Indichiamo con x^* il più piccolo degli x ora indicati, e con x_* il massimo valore degli x dell'intervallo (X_0, x^*) tali che $\overline{y}(x) = \overline{Y}'$. In tutto l'intervallo (x_*, x^*), risulterà $\overline{Y}' \leqslant \overline{y}(x) \leqslant Y_M < Y_1$ e varrà perciò, per la $\overline{y}(x)$, la (13), vale a dire, sarà

$$\int\limits_{x_*}^{x^*} \frac{f(\overline{y}(x), \overline{y}'(x))}{\varphi(\overline{y}(x))} dx \geqslant - \frac{\Upsilon}{\lambda} \log \left| \frac{\overline{y}(x^*) - Y_1}{\overline{y}(x_*) - Y_1} \right| = - \frac{\Upsilon}{\lambda} \log \left| \frac{Y_n - Y_1}{\overline{Y}' - Y_1} \right| .$$

onde, per la (21),

$$\int_{x_*}^{x^*} \frac{f(\bar{y}(x), \bar{y}'(x))}{\varphi(\bar{y}(x))} dx > M + |N|.$$

In virtù del lemma del n. 7, si potrà scrivere pertanto

$$I[y(x)] = \int_{X_0}^{X_1} \frac{f(\bar{y}(x), \bar{y}'(x))}{\varphi(\bar{y}(x))} dx > M + |N| + N \geqslant M,$$

disuguaglianza che contraddice alla (14). Ciò prova che è assurda l'ipotesi che per la $\bar{y}(x)$ non valga, in tutto (X_0, X_1), la (15).

9. – Indichiamo con i il confine (o limite) inferiore di $I[y(x)]$ in tutta la classe K. Per il lemma del n. 7, ogni funzione $y(x)$ di K verifica la disuguaglianza

$$I[y(x)] > N\,;$$

e pertanto risulta

$$i \geqslant N\,. \tag{22}$$

Consideriamo una qualsiasi successione

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x),\ \ldots$$

di funzioni di K, minimizzanti per $I[y]$ in K, tale cioè che sia, per ogni n,

$$I[y_n(x)] \leqslant i + \frac{1}{n}\,. \tag{23}$$

Allora è, per ogni n,

$$I[y_n(x)] \leqslant i + 1$$

e scelto per il numero M del teorema del n. 5 il valore di $i + 1$, e detto Y^* il numero Y_M, corrispondente a $M = i + 1$, indicato nello stesso teorema, avremo, per ogni n,

$$y_n(x) < Y^*\,. \tag{24}$$

Chiamiamo R^* il rettangolo del piano (x, y) definito dalle disuguaglianze $X_0 \leqslant x \leqslant X_1$, $Y_0 \leqslant y \leqslant Y^*$, rettangolo che è una parte di R. Per la (24), le curve C_n, definite dalle

$$y = y_n(x)\,, \qquad X_0 \leqslant x \leqslant X_1\,, \tag{25}$$

giacciono tutte in R^*, e nessuna di esse ha punti sul lato del rettangolo che sta sulla retta $y = Y^*$.

Nei punti di R^* vale sempre la (2) e le condizioni poste nel n. 1 ci assicurano che su R^* l'integrale $I[y(x)]$ è *regolare positivo.*

Osserviamo pure che, in virtù del n. 6, le lunghezze L_n delle curve C_n risultano tutte inferiori ad uno stesso numero. Infatti, essendo

$$\int_{X_0}^{X_1} | y_n'(x) | \, dx < V ,$$

abbiamo

$$L_n = \int_{X_0}^{X_1} \sqrt{1 + y_n'^2(x)} \, dx \leqslant \int_{X_0}^{X_1} \{ 1 + | y_n' | \} \, dx < (X_1 - X_0) + V . \tag{26}$$

10. – L'osservazione fatta or ora assicura (in forza di un noto teorema di HILBERT) che le curve $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ ammettono almeno una curva di accumulazione, che indicheremo con C_∞. Questa curva (continua) giace, come tutte le C_n, nel rettangolo R^*, ha il primo estremo nel punto (X_0, Y_i) e il secondo estremo sulla retta $x = X_1$, e risulta rettificabile, con lunghezza L_∞ che, per la (26), è necessariamente $\leqslant (X_1 - X_0) + V$. E siccome su ogni C_n l'ascissa del punto corrente è funzione *crescente* della lunghezza dell'arco che dal primo estremo della curva va al suo punto generico, sulla C_∞ l'ascissa del punto corrente risulterà funzione *non decrescente* della lunghezza dell'analogo arco.

Essendo la C_∞ curva di accumulazione delle C_n, si potrà estrarre dalla successione $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ una nuova successione convergente uniformemente verso la C_∞. Per semplicità di scrittura, possiamo senz'altro supporre che tutta la successione $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ converga uniformemente verso la C_∞. Questo però non ci autorizza ancora ad affermare che le funzioni $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_n(x), \ldots$ convergano uniformemente su tutto (X_0, X_1) e neppure possiamo ancora affermare che la curva limite C_∞ sia rappresentabile nella forma $y = y(x)$. Tutto ciò ci proponiamo di dimostrare nei nn. seguenti. Per il momento possiamo soltanto asserire che esiste almeno una legge che stabilisce fra la C_∞ ed ognuna delle C_n una corrispondenza continua e ordinata, tale che la distanza tra il punto generico della C_∞ ed il corrispondente della C_n tenda uniformemente allo zero al tendere di n all'infinito.

11. – Sulla curva C_∞, che è rettificabile, esiste quasi dappertutto la tangente, vale a dire, se s è la lunghezza dell'arco della C_∞ che dal primo punto della curva va al punto generico di essa, per quasi tutti gli s dell'intervallo

$(0, L_\infty)$ esiste, nel punto corrispondente della curva, la tangente alla curva medesima. Questa tangente, considerata orientata in corrispondenza agli s crescenti, forma con l'asse delle x (orientato secondo gli x crescenti) un angolo che, in valore e segno, indicheremo con α e che verificherà sempre le disuguaglianze $-90^\circ \leqslant \alpha \leqslant 90^\circ$.

Ci proponiamo innanzi tutto di dimostrare che, *quasi dappertutto sulla* C_∞ *(e cioè per quasi tutti gli* s *di* $(0, L_\infty)$*), vale la disuguaglianza*

$$\operatorname{tang} \alpha \geqslant \psi(y)\,, \tag{27}$$

dove y è l'ordinata del punto considerato della curva ed ove intendiamo di sostituire, a $\operatorname{tang} \alpha$, $+\infty$ e $-\infty$, rispettivamente, per $\alpha = 90^\circ$ e $\alpha = -90^\circ$.

Consideriamo, infatti, un punto $\overline{P} \equiv (\overline{x}, \overline{y})$ della curva C_∞, distinto dagli estremi di essa, nel quale esista la tangente alla curva, e proviamo che, detto $\overline{\alpha}$ il valore corrispondente dell'angolo α, sussiste la disuguaglianza

$$\operatorname{tang} \overline{\alpha} \geqslant \psi(\overline{y})\,. \tag{28}$$

Supponiamo, se è possibile, che questa disuguaglianza non risulti vera, e che sussista perciò, per un certo $\mu > 0$, la

$$\operatorname{tang} \overline{\alpha} < \psi(\overline{y}) - \mu\,. \tag{29}$$

Determiniamo un numero positivo δ in modo che, per ogni y dell'intervallo $(\overline{y} - \delta,\ \overline{y} + \delta)$ e appartenente a (Y_0, Y_1), risulti

$$\psi(y) > \psi(\overline{y}) - \mu\,, \tag{30}$$

e fissiamo sulla C_∞ due punti $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ e $P_2 \equiv (x_2, y_2)$, rispettivamente precedente e seguente $\overline{P}$, in modo che, su tutto l'arco $\widehat{P_1P_2}$ della C_∞, la y del punto corrente risulti sempre *interna* all'intervallo $(\overline{y} - \delta,\ \overline{y} + \delta)$, e in modo pure che risulti

$$y_2 - y_1 < (x_2 - x_1)\{\psi(\overline{y}) - \mu\}\,.$$

Poichè le curve C_n convergono verso la C_∞, potremo trovare un $\overline{n}$ in modo che la $C_{\overline{n}}$ abbia un arco $\widehat{P_{\overline{n},1}P_{\overline{n},2}}$, di estremi $P_{\overline{n},1} \equiv (x_{\overline{n},1}, y_{\overline{n},1})$, $P_{\overline{n},2} \equiv (x_{\overline{n},2}, y_{\overline{n},2})$, sul quale la y del punto corrente risulti sempre *interna* all'intervallo $(\overline{y} - \delta,\ \overline{y} + \delta)$, e tale inoltre che sia

$$y_{\overline{n},2} - y_{\overline{n},1} < (x_{\overline{n},2} - x_{\overline{n},1})\{\psi(\overline{y}) - \mu\}\,. \tag{31}$$

Allora su tutto l'arco $\widehat{P_{\overline{n},1}P_{\overline{n},2}}$ della $C_{\overline{n}}$ vale la (30), mentre poi, quasi dappertutto sullo stesso arco, è

$$y'_{\overline{n}}(x) \geqslant \psi(y_{\overline{n}}(x))\,,$$

essendo la $C_{\bar{n}}$ una curva della classe K. E pertanto, su quasi tutto l'intervallo $(x_{\bar{n},1}, x_{\bar{n},2})$ risulta

$$y'_{\bar{n}}(x) > \psi(\bar{y}) - \mu .$$

Da qui segue

$$y_{\bar{n},2} - y_{\bar{n},1} = \int_{x_{\bar{n},1}}^{x_{\bar{n},2}} y'_{\bar{n}}(x)\, dx > \{ \psi(\bar{y}) - \mu \} (x_{\bar{n},2} - x_{\bar{n},1}) ,$$

che contraddice alla (31).

È così provato che nel punto $\bar{P}$ vale la (28) e quindi che la (27) è verificata quasi dappertutto sulla C_∞.

12. – Conviene ora distinguere due casi, a seconda che è o non è verificata la condizione che, quasi dappertutto sulla C_∞, valga la disuguaglianza

$$\text{tang}\, \alpha \leqslant 2\Psi , \tag{32}$$

Ψ essendo il numero indicato al principio del n. 3.

Supponiamo dapprima che la condizione indicata sia verificata. Allora, per le (27) e (32), quasi dappertutto sulla C_∞ è

$$\psi_0 \leqslant \text{tang}\, \alpha \leqslant 2\, \Psi ,$$

dove, come si è già detto, ψ_0 è il minimo valore assunto dalla funzione $\psi(y)$ sull'intervallo (Y_0, Y_1); e ne segue, quasi dappertutto sulla C_∞, indicando con Ψ' il maggiore fra i due numeri $|\psi_0|$ e 2Ψ,

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tang}^2 \alpha}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{1 + \Psi'^2}} > 0 ,$$

e quindi, se $x = x(s)$, $y = y(x)$, $0 \leqslant s \leqslant L_\infty$, è la rappresentazione analitica della C_∞ in funzione del parametro s (lunghezza dell'arco che dal primo estremo della curva va al suo punto generico),

$$x'(s) = \cos \alpha \geqslant \frac{1}{\sqrt{1 + \Psi'^2}} ,$$

quasi dappertutto. Pertanto, se è $0 \leqslant s_1 < s_2 \leqslant L_\infty$, risulta

$$x(s_2) - x(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} x'(s) ds \geqslant \frac{s_2 - s_1}{\sqrt{1 + \Psi'^2}} > 0 ,$$

onde la $x(s)$ è funzione sempre crescente della s e ammette una funzione inversa $s(x)$, anch'essa sempre continua e crescente ed a rapporto incrementale limitato ($\leqslant \sqrt{1+\Psi'^2}$); e, posto $y(s(x)) \equiv y_\infty(x)$, la C_∞ ammette la rappresentazione $y = y_\infty(x)$, con $y_\infty(x)$ funzione assolutamente continua ed a rapporto incrementale limitato, perchè, se è $X_0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant X_2$, risulta

$$\left|\frac{y_\infty(x_2)-y_\infty(x_1)}{x_2-x_1}\right| = \left|\frac{y_\infty(x_2)-y_\infty(x_1)}{s(x_2)-s(x_1)}\right| \left|\frac{s(x_2)-s(x_1)}{x_2-x_1}\right| \leqslant \sqrt{1+\Psi'^2}\,.$$

Inoltre, dalla (27) segue quasi dappertutto

$$y'_\infty(x) = \operatorname{tang}\alpha \geqslant \psi(y_\infty(x))\,,$$

onde la $y_\infty(x)$ risulta una funzione della classe K.

Di più, poichè le curve C_n convergono uniformemente alla C_∞, e questa curva è rappresentabile, nella forma $y = y_\infty(x)$, con $y_\infty(x)$ continua, le funzioni $y_n(x)$ devono necessariamente convergere uniformemente alla $y_\infty(x)$ in tutto (X_0, X_1). Infine, per essere in R^* l'integrale $I[y(x)]$ *regolare positivo*, tale integrale è semicontinuo inferiormente ed è, per la (23),

$$I[y(x)] = \min\lim I[y_n(x)] \leqslant i\,,$$

onde

$$I[y_\infty(x)] = i\,.$$

La $y_\infty(x)$ risulta così una funzione minimante per $I[y]$ nella classe K, e, nel caso qui considerato, il teorema del n. 2 è provato.

Conviene osservare che per quanto qui si è detto, una qualunque funzione $y(x)$ minimante per $I[y]$ nella classe K e verificante quasi dappertutto la disuguaglianza (32) — ove si intenda $\operatorname{tang}\alpha = y'(x)$ — risulta *lipschitziana.*

13. – Supponiamo ora che la disuguaglianza (32) *non* risulti quasi dappertutto verificata. Sia P_0 un punto della curva C_∞, distinto dai suoi estremi, in cui esiste la tangente alla curva ed in cui la (32) non è verificata (di tali punti ne esisteranno necessariamente infiniti). Se α_0 è il valore di α per il punto P_0, avremo

$$\operatorname{tang}\alpha_0 > 2\Psi'\,. \tag{33}$$

Indicando con x_0 e y_0 le coordinate di P_0 ($P_0 \equiv (x_0, y_0)$), sarà o $X_0 \leqslant x_0 < X_1$ oppure $X_0 < x_0 \leqslant X_1$. Per fissare le idee, supponiamo che sia $X_0 \leqslant x_0 < X_1$; e scelto ad arbitrio un numero δ, maggiore di zero e minore di $X_1 - x_0$, determiniamo sulla C_∞ due punti $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ e $P_2 \equiv (x_2, y_2)$ tali che $x_0 \leqslant x_1 < < x_2 < x_0 + \delta$ e nel seguente modo.

Per $t = 0$, la $\overline{C}_{n,0}$ coincide con la $\overline{C}_n$.

Dalle equazioni della $\overline{C}_{n,t}$ segue che, per ogni $t \geqslant 0$, le $\xi_{n,t}$ e $\eta_{n,t}$, considerate come funzioni della x, risultano assolutamente continue in tutto l'intervallo (X_0, X_1); inoltre è, quasi dappertutto in (X_0, X_1),

$$\frac{d\xi_{n,t}}{dx} = 1 + t\omega_n'(x). \tag{38}$$

Se perciò diciamo t_0 un numero *positivo, minore di*

$$\frac{1}{2L\sqrt{1 + 9 \operatorname{tang}^2 \beta_0'}},$$

dove L è il numero, già indicato, di cui restano inferiori tutte le lunghezze $\overline{L}_n$ delle curve $\overline{C}_n$, abbiamo, per ogni t tale che $0 < t \leqslant t_0$, e quasi dappertutto in (X_0, X_1) (sempre supponendo $n > \overline{\overline{n}}$ e rammentando che in $(x_{1,n}, x_{2,n})$ è $\Psi < \overline{y}_n'(x) < 3 \operatorname{tang} \beta_0'$)

$$\frac{d\xi_{n,t}}{dx} \geqslant 1 - tc_{n,1}\sqrt{1 + 9 \operatorname{tang}^2 \beta_0'} > 1 - \frac{c_{n,1}}{2L} > 1 - \frac{\overline{L}_n}{2L} > \frac{1}{2}.$$

Dunque la funzione $\xi_{n,t}(x)$ definita dalla prima equazione di (37) è *sempre crescente* in tutto (X_0, X_1), e, in tale intervallo, varia (in virtù delle (36)) fra il valore $\xi_{n,t}(X_0) = X_0$ e quello $\xi_{n,t}(X_1) = X_1 + t\omega_n(X_1) = X_1$. Da ciò segue, intanto, che la curva $\overline{C}_{n,t}$, definita dalle (37), appartiene, per ogni t tale che $0 < t \leqslant t_0$ (e per $n > \overline{\overline{n}}$), al rettangolo R^*, al quale appartengono anche le C_n e le $\overline{C}_n$. E segue pure che la $\xi_{n,t}(x)$ ammette la funzione inversa $x_{n,t}(\xi)$, la quale risulta anch'essa definita in tutto l'intervallo (X_0, X_1) ed è ivi *sempre crescente* e con rapporto incrementale sempre compreso fra 0 e 2. Questa funzione inversa $x_{n,t}(\xi)$ è pertanto essa pure assolutamente continua in tutto (X_0, X_1), e soddisfa quasi dappertutto alle disuguaglianze

$$0 \leqslant \frac{dx_{n,t}}{d\xi} < 2. \tag{39}$$

Di più (per essere la $x_{n,t}(\xi)$ assolutamente continua e sempre crescente) la funzione

$$\overline{y}_n(x_{n,t}(\xi)) \equiv \eta_{n,t}(\xi) \tag{40}$$

risulta anch'essa assolutamente continua in tutto l'intervallo (X_0, X_1), ed è quasi dappertutto

$$\eta_{n,t}'(\xi) = \overline{y}_n'(x_{n,t}(\xi)) \frac{dx_{n,t}}{d\xi} = \overline{y}_n'(x_{n,t}(\xi)) \frac{1}{1 + t\omega_n'(x_{n,t}(\xi))}. \tag{41}$$

Proviamo che quasi dappertutto è pure

$$(42) \qquad |\eta'_{n,t}(\xi)| < 2\Lambda + \frac{1}{tc_{n,2}}.$$

Ed infatti, essendo, per le (39) e (41),

$$|\eta'_{n,t}(\xi)| < 2\,|\bar{y}'_n(x_{n,t}(\xi))|,$$

è, quasi dappertutto sull'intervallo $(\xi_{n,t}(x_{1,n}),\ \xi_{n,t}(x_{2,n}))$,

$$|\eta'_{n,t}(\xi)| < 6 \operatorname{tang} \beta'_0 < 2\Lambda.$$

Sull'insieme $E'_{A,n,t}$, che la funzione $\xi_{n,t}(x)$ fa corrispondere a $E_{A,n}$, è poi, quasi dappertutto, sempre per la (41),

$$|\eta'_{n,t}(\xi)| = |\bar{y}'_n(x_{n,t}(\xi))| \frac{1}{1 + tc_{n,2}\sqrt{1 + \bar{y}'^2_n(x_{n,t}(\xi))}} <$$

$$< |\bar{y}'_n(x_{n,t}(\xi))| \frac{1}{tc_{n,2}\,|\bar{y}'_n(x_{n,t}(\xi))|} = \frac{1}{tc_{n,2}}.$$

Nei punti di (X_0, X_1), esterni a $(\xi_{n,t}(x_{1,n}),\ \xi_{n,t}(x_{2,n}))$ ed a $E'_{A,n,t}$, è, infine, quasi dappertutto, $\omega'_n(x_{n,t}(\xi)) = 0$ e perciò

$$|\eta'_{n,t}(\xi)) = |\bar{y}'_n(x_{n,t}(\xi))| < \Lambda,$$

perchè sul complementare di $E_{A,n}$ è quasi dappertutto $|\bar{y}'_n(x)| < \Lambda$.

Con ciò la (42) risulta dimostrata.

La disuguaglianza ora provata assicura che la funzione assolutamente continua $\eta_{n,t}(\xi)$ è *lipschitziana*; e ne segue che la $f(\eta_{n,t}(\xi),\ \eta'_{n,t}(\xi)) : \varphi(\eta_{n,t}(\xi))$ è integrabile su tutto l'intervallo (X_0, X_1).

È poi, per la (40),

$$\eta_{n,t}(X_0) = \bar{y}_n(X_0) = Y_i,$$

e per potere affermare che la funzione $\eta_{n,t}(\xi)$ appartiene alla classe K resta da provare che essa verifica quasi dappertutto la disuguaglianza (8).

A tale scopo, osserviamo che, quasi dappertutto sull'intervallo

$$(\xi_{n,t}(x_{1,n}),\ \xi_{n,t}(x_{2,n})),$$

è, per la (41),

$$\eta'_{n,t}(\xi) = \bar{y}'_n(x_{n,t}(\xi)) \frac{1}{1 + t\omega'_n(x_{n,t}(\xi))} = \bar{y}'_n(x_{n,t}(\xi)) \frac{1}{1 - tc_{n,1}\sqrt{1 + \bar{y}'^2_n(x_{n,t}(\xi))}};$$

ed essendo $0 < t \leqslant t_0 < 1 : (2L\sqrt{1 + 9 \operatorname{tang}^2 \beta_0'})$, risulta

$$1 > 1 - tc_{n,1}\sqrt{1 + \overline{y}_n'^2(x_{n,t}(\xi))} > 1 - \frac{c_{n,1}}{2L} > 1 - \frac{\overline{L}_n}{2L} > \frac{1}{2}$$

e perciò

$$\eta_{n,t}'(\xi) > \overline{y}_n'(x_{n,t}(\xi)) > \Psi > \psi(\eta_{n,t}(\xi)) ,$$

vale a dire, quasi dappertutto su $(\xi_{n,t}(x_{1,n}), \xi_{n,t}(x_{2,n}))$ vale la (8).

Quasi dappertutto su $E_{A,n,t}'$ è poi, sempre per la (41),

$$\eta_{n,t}'(\xi) = \overline{y}_n'(x_{n,t}(\xi)) \frac{1}{1 + t\omega_n'(x_{n,t}(\xi))} = \overline{y}_n'(x_{n,t}(\xi)) \frac{1}{1 + tc_{n,2}\sqrt{1 + \overline{y}_n'^2(x_{n,t}(\xi))}}$$

con $\overline{y}_n'(x_{n,t}(\xi)) > \Lambda$, e perciò

$$\eta_{n,t}'(\xi) > \frac{\overline{y}_n'(x_{n,t}(\xi))}{1 + tc_{n,2}\{1 + \overline{y}_n'(x_{n,t}(\xi))\}} ;$$

onde, *supposto* t_0 *minore anche di* $1 : \{c_{n,2}(1 + \Lambda)\}$,

$$\eta_{n,t}'(\xi) > \frac{\Lambda}{2} \ (^5) .$$

Per essere $\Lambda > 3 \operatorname{tang} \beta_0' > 6\Psi$, risulta così, quasi dappertutto su $E_{A,n,t}'$,

$$\eta_{n,t}'(\xi) > 3\Psi > \psi(\eta_{n,t}(\xi)) ,$$

ossia risulta verificata, quasi dappertutto su $E_{A,n,t}'$, la (8).

Nei punti di (X_0, X_1) esterni a $(\xi_{n,t}(x_{1,n}), \xi_{n,t}(x_{2,n}))$ ed a $E_{A,n,t}'$ è infine, quasi dappertutto, $\omega_n'(x_{n,t}(\xi)) = 0$, onde

$$\eta_{n,t}'(\xi) = \overline{y}_n'(x_{n,t}(\xi)) ,$$

ed essendo

$$\eta_{n,t}(\xi) = \overline{y}_n(x_{n,t}(\xi)) , \quad \overline{y}_n'(x_{n,t}(\xi)) \geqslant \psi(\overline{y}_n(x_{n,t}(\xi))) ,$$

---

[5] Per $z > 0$, la derivata della funzione $\dfrac{z}{1 + tc_{n,2}(1 + z)}$ è

$$\frac{1 + tc_{n,2}(1 + z) - tc_{n,2}z}{\{1 + tc_{n,2}(1 + z)\}^2} = \frac{1 + tc_{n,2}}{\{1 + tc_{n,2}(1 + z)\}^2} > 0 .$$

onde la funzione è sempre crescente; e si ha pertanto, per $z > \Lambda$,

$$\frac{z}{1 + tc_{n,2}(1 + z)} > \frac{\Lambda}{1 + tc_{n,2}(1 + \Lambda)} > \frac{\Lambda}{2} ,$$

se è $1 + tc_{n,2}(1 + \Lambda) < 2$, ossia $t < 1 : \{c_{n,2}(1 + \Lambda)\}$.

ne viene

$$\eta'_{n,t}(\xi) \geqslant \psi(\eta_{n,t}(\xi))$$

e la (8) risulta così verificata, quasi dappertutto su (X_0, X_1), dalla funzione $\eta_{n,t}(\xi)$. Questa funzione appartiene pertanto alla classe K (supposto $n > \overline{\overline{n}}$ e $0 < t \leqslant t_0$, con t_0 avente il grado di piccolezza indicato).

15. – Valutiamo ora la differenza $I[\eta_{n,t}] - I[\overline{y}_n]$, sempre per gli n ed i t indicati or ora. Abbiamo, per (40), (41) e (38),

$$(43) \qquad I[\eta_{n,t}] - I[\overline{y}_n] = \int_{X_0}^{X_1} \frac{f(\eta_{n,t}(\xi), \eta'_{n,t}(\xi))}{\varphi(\eta_{n,t}(\xi))} \mathrm{d}\xi - \int_{X_0}^{X_1} \frac{f(\overline{y}_n(x), \overline{y}'_n(x))}{\varphi(\overline{y}_n(x))} \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{X_0}^{X_1} \left\{ f\left(\overline{y}_n(x), \frac{\overline{y}'_n(x)}{1 + t\omega'_n(x)}\right) \frac{1 + t\omega'_n(x)}{\varphi(\overline{y}_n(x))} - \frac{f(\overline{y}_n(x), \overline{y}'_n(x))}{\varphi(\overline{y}_n(x))} \right\} \mathrm{d}x =$$

$$= t \int_{X_0}^{X_1} \frac{\omega'_n}{\varphi(\overline{y}_n)} \left\{ f\left(\overline{y}_n, \frac{\overline{y}'_n}{1 + \theta t\omega'_n}\right) - \frac{\overline{y}'_n}{1 + \theta t\omega'_n} f_{y'}\left(\overline{y}_n, \frac{\overline{y}'_n}{1 + \theta t\omega'_n}\right) \right\} \mathrm{d}x = t \left[\int_{x_{1,n}}^{x_{2,n}} \ldots + \int_{E_{A,n}} \ldots \right].$$

Sull'intervallo $(x_{1,n}, x_{2,n})$ è sempre $\Psi < \overline{y}'_n(x) < 3 \operatorname{tang} \beta'_0$ ed anche

$$0 < \frac{\overline{y}'_n}{1 + \theta t\omega'_n} = \frac{\overline{y}'_n}{1 - \theta t c_{n,1} \sqrt{1 + \overline{y}'^2_n}} < \frac{\overline{y}'_n}{1 - c_{n,1}/(2L)} < 2\overline{y}'_n < 6 \operatorname{tang} \beta'_0,$$

e ne deduciamo, in virtù delle (3) e (4), che in $(x_{1,n}, x_{2,n})$ l'espressione

$$(44) \qquad \frac{1}{\varphi(\overline{y}_n)} \left\{ f\left(\overline{y}_n, \frac{\overline{y}'_n}{1 + \theta t\omega'_n}\right) - \frac{\overline{y}'_n}{1 + \theta t\omega'_n} f_{y'}\left(\overline{y}_n, \frac{\overline{y}'_n}{1 + \theta t\omega'_n}\right) \right\}$$

resta maggiore di un numero $l > 0$. Ed invero, dalla (3), segue che l'espressione $f - y' f_{y'}$ per $y' > 0$ è funzione di y' *sempre decrescente*, perchè, se è $0 < y'_1 < y'_2$, risulta

$$\{ f(y, y'_2) - y'_2 f_{y'}(y, y'_2) \} - \{ f(y, y'_1) - y'_1 f_{y'}(y, y'_1) \} =$$
$$= y'_1 \{ f_{y'}(y, y'_1) - f_{y'}(y, \tilde{y}'_n) \} + y'_2 \{ f_{y'}(y, \tilde{y}') - f_{y'}(y, y'_2) \} < 0,$$

essendo $y'_1 < \tilde{y}' < y'_2$; e poichè per la (4) è $f - y' f_{y'} \to 0$ per $y' \to +\infty$, ne viene, per $y' > 0$, $f - y' f_{y'} > 0$. Ne segue, in forza della continuità delle φ, f e $f_{y'}$, che l'espressione $\frac{1}{\varphi}(f - y' f_{y'})$ ha, per tutti gli y di (Y_0, Y^*) e per tutti gli y' tali che $0 \leqslant y' \leqslant 6 \operatorname{tang} \beta'_0$, un minimo $2l$, maggiore di zero; ed è così provato che l'espressione (44) resta in tutto l'intervallo $(x_{1,n}, x_{2,n})$ maggiore di $l > 0$.

di equazione $y = \overline{y}_\infty(x)$. E siccome la $\overline{C}_\infty$ coincide con la C_∞ nei punti di questa curva non interni all'arco $\widehat{P_1P_2}$, ne viene che, tolto al più l'arco ora detto, nelle altre parti la C_∞ è rappresentabile nella forma $y = y(x)$, con $y(x)$ funzione assolutamente continua. Osservando poi che, se l'ascissa x_1 di P_1 fosse uguale a quella x_0 di P_0, dovrebbe essere $y_1 > y_0$ e l'arco della C_∞ che termina in P_1 non potrebbe essere rappresentato nella forma $y = y(x)$, ne risulta che è necessariamente $x_1 > x_0$. Se allora ripetiamo il ragionamento fatto, partendo ancora dal punto P_0 ma prendendo un nuovo δ minore della differenza $x_1 - x_0$, otterremo, in luogo dell'arco $\widehat{P_1P_2}$, un nuovo arco $\widehat{P_1'P_2'}$ della C_∞ il quale, avendo i suoi punti tutti di ascisse minori di $x_0 + (x_1 - x_0) = x_1$, apparterrà all'arco della C_∞ che termina in P_1; e pertanto tutto l'arco della C_∞ che ha come primo estremo il punto P_1 risulterà rappresentabile nella forma $y = y(x)$, con $y(x)$ assolutamente continua. In tal modo tutta la curva C_∞ risulta rappresentabile nella forma $y = y_\infty(x)$, con $y_\infty(x)$ funzione assolutamente continua.

Ora, poichè le curve C_n convergono uniformemente alla C_∞, e questa è rappresentabile nella forma $y = y_\infty(x)$, con $y_\infty(x)$ continua, le funzioni $y_n(x)$, che dànno le equazioni $y = y_n(x)$ delle C_n, devono necessariamente convergere uniformemente alla $y_\infty(x)$ in tutto (X_0, X_1). E siccome su R^* l'integrale $I[y]$ è *regolare positivo*, e quindi semicontinuo inferiormente, dalla (23) segue che la funzione

$$\frac{f(y_\infty(x), y'_\infty(x))}{\varphi(y_\infty(x))}$$

è integrabile su (X_0, X_1) e che vale la

$$I[y_\infty(x)] \leqslant \min\lim I[y_n(x)] \leqslant i \quad (8).$$

Infine, poichè sulla C_∞ è verificata la (27), la funzione $y_\infty(x)$ appartiene alla classe K ed è così

$$I[y_\infty(x)] = i,$$

vale a dire, la $y_\infty(x)$ risulta una funzione minimante per $I[y]$ nella classe K, e *il teorema enunciato nel n. 2 risulta pienamente provato in tutti i casi.*

17. – Osserviamo che la *funzione $y_\infty(x)$ or ora considerata, od una qualsiasi altra funzione minimante per $I[y]$ nella classe K, risulta lipschitziana.* Ed infatti, supposto che sulla $y_\infty(x)$ non sia verificata quasi dappertutto la (32), assu-

---

(8) Cfr. i miei *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, Vol. I, nn. 153 e 170; vedi pure la mia Memoria: *Sugli integrali del Calcolo delle Variazioni, in forma ordinaria* [Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) 3, 401-450 (1934)], nn. 3 e 6.

mendo come successione minimizzante per $I[y]$ su K quella per la quale sia, per tutti gli n, $y_n(x) \equiv y_\infty(x)$, la disuguaglianza (45) darà, per tutti gli $n > \overline{\overline{n}}$,

$$\int_{E_{\Lambda,n}} \overline{y}'_\infty \, dx \leqslant \frac{4}{n l_0 l(x_2 - x_1)} ,$$

dove $E_{\Lambda,n}$ risulta indipendente da n ed è l'insieme dei punti di (X_0, X_1) nei quali la derivata $\overline{y}'_\infty(x)$ esiste finita e $\geqslant \Lambda$, insieme che potremo indicare semplicemente con $\overline{E}_\Lambda$. Dalla disuguaglianza scritta si trae, per $n \to \infty$,

$$\int_{\overline{E}_\Lambda} \overline{y}'_\infty \, dx = 0 ;$$

e poichè è $\overline{y}_\infty(x) = y_\infty(x)$ tranne negli x interni all'intervallo (x_1, x_2), ed è $x_2 - x_1 < \delta'$, dove δ' è stato scelto ad arbitrio, ne viene anche

$$\int_{E_\Lambda} y'_\infty \, dx = 0 ,$$

dove E_Λ è l'insieme dei punti di (X_0, X_1) in cui la $y'_\infty(x)$ esiste finita e $\geqslant \Lambda$. Ciò prova che è, quasi dappertutto su (X_0, X_1), $y'_\infty(x) < \Lambda$; e poichè la $y_\infty(x)$ è assolutamente continua e verifica quasi ovunque la (8), essa risulta *lipschitziana.*

18. – *La funzione $y_\infty(x)$ già considerata — od una qualsiasi altra funzione minimante per $I[y]$ nella classe K — ammette sempre la derivata $y'_\infty(x)$ finita e continua, ovunque soddisfacente alla disuguaglianza* (8).

Per la dimostrazione di questa proposizione non c'è che da ripetere i ragionamenti fatti nei nn. 13 e 14 della mia Memoria citata in (1).

Capitolo II.

19. – Da ora in poi, mantenendo inalterate le altre ipotesi fatte nel n. 1, modificheremo quella contenuta nella condizione 2°), di tale n.°, relativa alla $f(y, y')$, precisando maggiormente il comportamento di questa funzione in prossimità del valore $y = Y_1$, per il quale la $\varphi(y)$ si annulla.

Sostituiremo dunque alla condizione 2°) la seguente:

2') esistano due costanti, γ e $\overline{Y}$, con $\gamma > 0$ e $Y_0 \leqslant \overline{Y} < Y_1$, e due fun-

22. – Indicato con i il confine inferiore di $I[y]$ nella classe K_1, e osservato che le proposizioni dei nn. 6 e 7 valgono anche per la classe K_1, possiamo asserire, come al n. 9, che *i è finito.*

Consideriamo anche qui una successione

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \dots,\ y_n(x),\dots$$

di funzioni di K_1, minimizzate per $I[y]$ in K_1, onde sarà, per tutti gli n,

$$I[y_n(x)] \leqslant i + 1/n\,. \tag{54}$$

E per le stesse ragioni dette nel n. 9, anche ora le lunghezze L_n delle curve C_n, definite dalle $y = y_n(x)$, $(X_0 \leqslant x \leqslant X_1)$, risultano tutte inferiori ad uno stesso numero finito. Le C_n ammetteranno perciò almeno una curva di accumulazione C_∞; e per semplicità di scrittura potremo supporre che tutta la successione $C_1,\ C_2,\dots,\ C_n,\dots$ converga uniformemente alla C_∞. Questa curva limite C_∞ risulterà rettificabile, col primo estremo nel punto $(X_0,\ Y_1)$ e con l'ascissa del punto corrente non decrescente al crescere della lunghezza dell'arco, contata a partire dal primo estremo.

23. – Dimostriamo che *la curva C_∞ non può avere un arco coincidente con un segmento della retta $y = Y_1$ e avente il primo estremo nel punto $(X_0,\ Y_1)$.*

Supponiamo, infatti, il contrario, vale a dire, supponiamo che la curva C_∞ abbia un arco coincidente col segmento della retta $y = Y_1$ avente per estremi i punti $(X_0,\ Y_1)$, $(X_0 + 2l,\ Y_1)$, essendo $0 < 2l < X_1 - X_0$ [10]. Allora, per la convergenza uniforme delle curve $C_1,\ C_2,\dots,\ C_n,\dots$ verso la C_∞, avremo che, nell'intervallo $(X_0,\ X_0 + l)$, la successione $y_1(x),\ y_2(x),\dots,\ y_n(x),\dots$ convergerà uniformemente verso la funzione $y = Y_1$.

Presi due numeri maggiori di zero, che preciseremo in seguito, δ e η, consideriamo l'insieme E_n dei punti x dell'intervallo $(X_0,\ X_0 + l)$ in cui esiste finita la derivata $y_n'(x)$ ed è $y_n'(x) < -(2 + \eta)\delta$. Risulterà

$$\int_{E_n} y_n'(x)\,\mathrm{d}x < -(2 + \eta)\delta\, m(E_n)\,,$$

avendo indicato con $m(E_n)$ la misura dell'insieme E_n.

---

[10] Si osservi che, per la condizione (50), nessuna curva C_n ha punti al disotto della retta $y = Y_1 + (x - X_0)\psi_0$ (ψ_0 essendo il minimo valore della funzione $\psi(y)$ nell'intervallo $(Y_0,\ Y_1)$); perciò anche la C_∞ non ha punti al disotto di tale retta, e tutti i punti della C_∞ di ascissa minore di $X_0 + 2l$ appartengono all'arco indicato giacente sulla retta $y = Y_1$.

Per ogni n maggiore di un certo n_0, dipendente da δ, sarà, in tutto $(X_0, X_0 + l)$,

$$Y_1 - \delta l < y_n(x) \leqslant Y_1,$$

e quindi, indicando con E'_n e E^*_n gli insiemi dei punti dell'intervallo (X_0, X_0+l) in cui esiste finita la $y'_n(x)$ ed è, rispettivamente, $-(2+\eta)\delta \leqslant y'_n(x) \leqslant 0$ e $y'_n(x) > 0$, risulterà

$$\int_{X_0}^{X_0+l} y'_n(x)\,dx = y_n(X_0 + l) - y_n(X_0) > (Y_1 - \delta l) - Y_1 = -\delta l,$$

$$\int_{X_0}^{X_0+l} y'_n(x)dx = \int_{E_n} \ldots + \int_{E'_n} \ldots + \int_{E^*_n} \ldots,$$

onde

$$-\delta l < \int_{E_n} \ldots + \int_{E^*_n} \ldots < -(2+\eta)\delta\, m(E_n) + \int_{E^*_n} \ldots,$$

da cui

$$\int_{E^*_n} y'_n(x)\,dx > \delta\{(2+\eta)\, m(E_n) - l\}. \tag{55}$$

Supponendo $\delta < \dfrac{Y_1 - \overline{Y}}{l}$, per la condizione 2') del n. 19 potremo scrivere, per ogni $n > n_0$,

$$\int_{E^*_n} \frac{f(y_n, y'_n)}{\varphi(y_n)}\,dx \geqslant \gamma \int_{E^*_n} \frac{y'_n}{\varphi(y_n)}\,dx. \tag{56}$$

Ora osserviamo che, avendo supposto (n. 1) $\varphi(Y_1) = 0$ e $\varphi(y) > 0$ per $Y_0 \leqslant y < Y_1$, dalla continuità ammessa per la funzione $\varphi(y)$ segue l'esistenza di infiniti valori di δ, piccoli quanto vuolsi, e tali che nell'intervallo $(Y_1 - \delta l,\ Y_1)$ sia sempre $\varphi(y) \leqslant \varphi(Y_1 - \delta l)$. Intenderemo di scegliere δ fra i valori di questa categoria ed allora potremo scrivere, a seguito delle (56) e (55),

$$\int_{E^*_n} \frac{f(y_n, y'_n)}{\varphi(y_n)}\,dx > \frac{\gamma}{\varphi(Y_1 - \delta l)} \int_{E^*_n} y'_n\,dx > \frac{\gamma\delta}{\varphi(Y_1 - \delta l)}\{(2+\eta)\, m(E_n) - l\}.$$

Di qui noi deduciamo che deve essere $m(E_n) < \frac{l}{2}$. Ed infatti, nell'ipotesi contraria, seguirebbe

$$\int_{E^*_n} \frac{f(y_n, y'_n)}{\varphi(y_n)}\,dx > \frac{\gamma\eta}{2}\,\frac{\delta l}{\varphi(Y_1 - \delta l)}.$$

Osserviamo ora che la curva C_∞ non può avere punti al disotto della retta $y = Y_1 + (x - X_0)\psi_0$, ($\psi_0$ essendo il minimo valore della $\psi(y)$ in (Y_0, Y_1)) (12) ed ha l'ascissa del punto corrente che è funzione non decrescente della lunghezza dell' arco, contata a partire dal primo estremo della curva stessa. La C_∞ ha perciò tutti i suoi punti, escluso il primo estremo, di ascisse maggiori di X_0. Pertanto, se $\overline{P}$ è un punto della C_∞ che non sia il suo primo estremo, per un ε positivo e abbastanza piccolo $\overline{P}$ appartiene a $C_{\infty,\varepsilon}$, e ne viene che la (57) risulta verificata quasi dappertutto sull'intera curva C_∞, e che questa curva è tutta rappresentabile nella forma $y = y_\infty(x)$.

Per l'osservazione già fatta relativamente alla retta $y = Y_1 + (x - X_0)\psi_0$, la $y_\infty(x)$ è continua nel punto $x = X_0$. Essa, inoltre, coincide con la $y_{\infty,\varepsilon}(x)$ per $x > X_0 + \varepsilon$; e poichè la $y_{\infty,\varepsilon}(x)$ è assolutamente continua per $x > X_0 + \varepsilon$, la $y_\infty(x)$ risulta continua in tutto l'intervallo (X_0, X_1) e assolutamente continua in ogni intervallo $(X_0 + \delta, X_1)$, con $0 < \delta < X_1 - X_0$. Ma la curva C_∞ è rettificabile, e quindi la $y_\infty(x)$ è a variazione limitata in tutto (X_0, X_1). Da ciò segue che la $y'_\infty(x)$ è integrabile (nel senso del LEBESGUE) in (X_0, X_1); e poichè, per l'assoluta continuità in tutto $(X_0 + \delta, X_1)$, è

$$\int_{X_0+\delta}^{X_1} y'_\infty(x)\, dx = y_\infty(X_1) - y_\infty(X_0 + \delta),$$

passando al limite per $\delta \to +0$, si ottiene

$$\int_{X_0}^{X_1} y'_\infty(x)\, dx = y_\infty(X_1) - y_\infty(X_0),$$

onde la

$$y_\infty(x) = y_\infty(X_1) - \int_x^{X_1} y'_\infty(x)\, dx$$

vale per ogni x di (X_0, X_1), e la $y_\infty(x)$ risulta assolutamente continua in tutto l'intervallo ora detto.

Essendo poi $Y_\varepsilon < Y_1$, e poichè per $x > X_0 + \varepsilon$ è $y_\infty(x) \leqslant Y_\varepsilon$, la $y_\infty(x)$ verifica le condizioni (48) e (49). Essa verifica anche la (50), poichè abbiamo già detto che sulla C_∞ vale quasi dappertutto la (57).

Per potere asserire che la $y_\infty(x)$ è una funzione della classe K_1, resta da provare che la funzione $\dfrac{f(y_\infty(x), y'_\infty(x))}{\varphi(y_\infty(x))}$ è integrabile su tutto (X_0, X_1).

A questo scopo, teniamo presente che essendo C_∞ la curva a cui convergono uniformemente le curve $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$, e poichè la C_∞ è rappresen-

(12) Ciò, come si è già notato, è conseguenza della condizione (50).

tabile nella forma $y = y_\infty(x)$, con $y_\infty(x)$ continua, le funzioni $y_1(x)$, $y_2(x)$,..., $y_n(x)$,... dovranno convergere uniformemente, in tutto (X_0, X_1), verso la $y_\infty(x)$.

Per un qualsiasi δ positivo e minore di $X_1 - X_0$, è

$$\int_{X_0+\delta}^{X_1} \frac{f(y_n, y_n')}{\varphi(y_n)} dx = I[y_n] - \int_{X_0}^{X_0+\delta} \frac{f(y_n, y_n')}{\varphi(y_n)} dx , \tag{58}$$

e richiamando ancora l'osservazione che la curva C_∞ non ha punti al disotto della retta $y = Y_1 + (x - X_0)\psi_0$, possiamo asserire che, per δ minore di un δ_0 convenientemente piccolo, è, in tutto $(X_0, X_0 + \delta)$, $y_\infty(x) > \overline{Y}$ [essendo $\overline{Y}$ il numero indicato nella condizione 2') del n. 19], onde anche, per ogni n maggiore di un certo n_0, $y_n(x) > \overline{Y}$, e quindi (per la condizione ora rammentata) sempre in tutto $(X_0, X_0 + \delta)$, e per $n > n_0$,

$$\frac{f(y_\infty(x), y_\infty'(x))}{\varphi(y_\infty(x))} \geqslant 0 ; \qquad \frac{f(y_n(x), y_n'(x))}{\varphi(y_n(x))} \geqslant 0. \tag{59}$$

Ne segue dalla (58) e per la (54), se è $\delta < \delta_0$,

$$\int_{X_0+\delta}^{X_1} \frac{f(y_n, y_n')}{\varphi(y_n)} dx \leqslant I[y_n] \leqslant i + \frac{1}{n} \leqslant i + 1 ,$$

la quale disuguaglianza risulta valida per ogni $n > n_0$.

Poichè $y_n(x)$ converge uniformemente, per $n \to \infty$, alla $y_\infty(x)$ in tutto $(X_0 + \delta, X_1)$, sul quale intervallo è sempre $y_\infty(x) < Y_1$; e poichè l'integrale $I[y]$ è nel rettangolo R, escluso il lato $y = Y_1$, *regolare positivo* e quindi semicontinuo inferiormente, la disuguaglianza sopra scritta assicura che la funzione $\dfrac{f(y_\infty(x), y_\infty'(x))}{\varphi(y_\infty(x))}$ è integrabile in $(X_0 + \delta, X_1)$ [13], e che è

$$\int_{X_0+\delta}^{X_1} \frac{f(y_\infty, y_\infty')}{\varphi(y_\infty)} dx \leqslant i , \tag{60}$$

con $\delta < \delta_0$.

Dalla prima delle (59) si deduce poi che, per $\delta < \delta_0$, l'integrale del primo membro della (60) è funzione non decrescente al decrescere di δ; e pertanto tale integrale ha limite per $\delta \to +0$ e tale limite è finito e $\leqslant i$. Da ciò e

---

[13] V. loc. cit. in [8].

ancora dalla prima delle (59) segue l'integrabilità della $\dfrac{f(y_\infty, y'_\infty)}{\varphi(y_\infty)}$ su tutto l'intervallo (X_0, X_1), e che è

$$\int_{X_0}^{X_1} \frac{f(y_\infty(x), y'_\infty(x))}{\varphi(y_\infty(x))}\, dx \leqslant i\,.$$

Con ciò resta stabilito che la $y_\infty(x)$ è una funzione della classe K_1, e la disuguaglianza ora scritta si trasforma nell'uguaglianza

$$\int_{X_0}^{X_1} \frac{f(y_\infty(x), y'_\infty(x))}{\varphi(y_\infty(x))}\, dx = i\,,$$

la quale esprime che la $y_\infty(x)$ è una funzione minimante assoluta per $I[y]$ su K_1. Così il teorema enunciato nel n. 20 è definitivamente provato.

25. – Se $\bar{x}$ è un'ascissa tale che $X_0 < \bar{x} < X_1$, la funzione $y_\infty(x)$, considerata nel n. precedente, è, nell'intervallo $(\bar{x}, X_1)$, una minimante assoluta per l'integrale $I[y]$, nella classe di tutte le funzioni $y(x)$ assolutamente continue in $(\bar{x}, X_1)$, assumenti in $\bar{x}$ il valore $y_\infty(\bar{x})$, verificanti su tutto $(\bar{x}, X_1)$ le disuguaglianze $Y_0 \leqslant y(x) \leqslant Y_1$, in quasi tutto l'intervallo ora detto la $y'(x) \geqslant \psi(y(x))$, e tali inoltre da rendere integrabile in $(\bar{x}, X_1)$ la funzione $\dfrac{f(y(x), y'(x))}{\varphi(y(x))}$. Pertanto, per quanto abbiamo dimostrato nel Cap. I, la $y_\infty(x)$ ammette in tutto l'intervallo $(\bar{x}, X_1)$ la derivata $y'_\infty(x)$ finita e continua, ovunque soddisfacente alla (8). Possiamo perciò affermare che *la funzione $y_\infty(x)$ considerata nel n. precedente — od una qualsiasi altra funzione minimante per $I[y]$ nella classe K_1 — ammette, per tutti gli $x > X_0$, la derivata prima, finita, continua e soddisfacente alla disuguaglianza* (8).