JAURÈS CECCONI (*)

Su le funzioni caratteristiche e gli Jacobiani generalizzati.

Nota 1ª: Su la nozione di "molteplicità relativa". (**)

1. – Introduzione.

In ricerche degli anni di guerra sulla quadratura delle superficie continue in forma parametrica, L. CESARI [1] (1), ha dato la condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie continua abbia area finita secondo LEBESGUE.

In successive ricerche L. CESARI ha caratterizzato [3] quelle superficie continue per le quali l'area, supposta finita, è data dall'integrale classico, ha stabilito [4] una formula generale per la trasformazione degli integrali doppi e numerose proprietà tangenziali delle superficie continue di area finita secondo LEBESGUE. Alcuni di questi risultati sono stati ottenuti, contemporaneamente e indipendentemente, anche da T. RADÓ e altri Autori [6], e il confronto tra i concetti e gli enunciati di L. CESARI e di T. RADÓ, iniziato da T. RADÓ [5], non è ancora stato completato.

Sia A il quadrato chiuso unitario del piano (u, v), siano $x(u, v)$, $y(u, v)$ funzioni continue in A e sia T la trasformazione piana continua

$$T: \qquad x = x(u, v)\,, \qquad y = y(u, v)\,, \qquad (u, v) \in A\,.$$

T. RADÓ [5] ha provato che le nozioni di trasformazione piana « a variazione limitata » e « assolutamente continua » (che indicheremo rispettivamente con le sigle B.V., A.C.) di L. CESARI e le nozioni di trasformazione piana « essenzialmente a variazione limitata » e « essenzialmente assolutamente continua » (che indicheremo rispettivamente con le sigle e.B.V., e.A.C.) di T. RADÓ sono equivalenti. Inoltre:

a) Per ogni trasformazione piana T la « funzione caratteristica »

(*) Dott.. Indirizzo: Istituto di Matematica, Università - Pisa (Italia).

(**) Lavoro ricevuto il 5-X-1949.

(1) Vedasi la Bibliografia alla fine della Nota.

$\Psi(x, y; T)$ di L. CESARI e la funzione « molteplicità assoluta essenziale » $\varkappa(x, y; T)$ di T. RADÓ sono eguali quasi dappertutto nel piano (x, y).

b) Per ogni trasformazione piana T a variazione limitata (B.V. oppure e.B.V.) la funzione « Jacobiano generalizzato assoluto » $J(u, v; T)$ di L. CESARI e la funzione « Jacobiano generalizzato assoluto essenziale » $| J_e(u, v; T) |$ di T. RADÓ sono eguali quasi dappertutto nel quadrato A.

Scopo della seguente Nota è di dimostrare il

Teorema A. *Per ogni trasformazione piana T assolutamente continua* (A.C. *oppure* e.A.C.) *le funzioni « molteplicità relativa » $n(x, y; T)$ di* L. CESARI *e* $\nu(x, y; T)$ *di* T. RADÓ *e* P. V. REICHELDERFER *coincidono quasi dappertutto nel piano* (x, y).

In una successiva Nota proverò inoltre:

Teorema B. *Per ogni trasformazione piana T a variazione limitata* (B.V. *oppure* e.B.V.) *le funzioni « Jacobiano generalizzato relativo » $H(u, v; T)$ di* L. CESARI *e « Jacobiano generalizzato relativo essenziale » $J_e(u, v; T)$ di* T. RADÓ *e* P. V. REICHELDERFER *coincidono quasi dappertutto in A.*

In tal modo ne risulta un più completo confronto fra le ricerche di L. CESARI e di T. RADÓ ed in particolare l'equivalenza delle formule di trasformazione degli Jacobiani relativi di L. CESARI e P. V. REICHELDERFER.

2. – Notazioni. Lemmi preliminari.

Sia

$$T: \qquad x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad (u, v) \in A\,,$$

una trasformazione piana continua. Sia p un poligono di A e c l'immagine secondo T della poligonale che costituisce il contorno di p. L. CESARI ha introdotto in [1] e [3] le seguenti funzioni:

$$O(x, y; c)\,, \quad o(x, y; c)\,, \quad \psi(x, y; T)\,, \quad \Psi(x, y; T)\,, \quad g(p)\,, \quad u(p)\,, \quad G(A)\,,$$

per la cui definizione il lettore deve consultare le Note sopra citate.

Se $\{ p_i;\ i = 1, 2, \ldots, \nu \}$ è un gruppo di poligoni semplici di A, a due a due senza punti interni in comune, e se $\{ c_i;\ i = 1, 2, \ldots, \nu \}$ sono le curve continue chiuse immagini, secondo T, delle poligonali che costituiscono il contorno dei poligoni $\{ p_i \}$, introduciamo i seguenti insiemi:

$E = \sum_{i=1}^{\nu} c_i$ è l'insieme dei punti del piano (x, y) che appartengono alle curve $\{ c_i \}$.

$(E)_\varrho$, con ρ numero positivo, è l'insieme dei punti del piano (x, y) la cui distanza da E è minore di ρ.

I è l'insieme dei punti del piano (x, y) in cui si ha:

$$\Psi(x, y; T) - \sum_{i=1}^{\nu} | O(x, y; c_i) | > 0 .$$

I^* è l'insieme dei punti del piano (x, y) in cui si ha:

$$\psi(x, y; T) - \sum_{i=1}^{\nu} o(x, y; c_i) > 0 .$$

L. Cesari [4] ha dimostrato il seguente

Lemma 1. Se la trasformazione piana T è B.V., se $\{ p_i ;\ 1 = 1, 2, \ldots, \nu \}$ è un gruppo di poligoni semplici di A, a due a due senza punti interni in comune, se I è l'insieme sopra introdotto relativamente ai poligoni $\{ p_i \}$, si ha [2]:

$$| I | \leqslant G(A) - \sum_{i=1}^{\nu} g(p_i) .$$

Alla stessa maniera si dimostra il seguente

Lemma 2. Se la trasformazione piana T è B.V., se $\{ p_i ;\ i = 1, 2, \ldots, \nu \}$ è un gruppo di poligoni semplici di A, a due a due senza punti interni in comune, se I^* è l'insieme sopra introdotto, relativamente ai poligoni $\{ p_i \}$, si ha:

$$| I^* | \leqslant G(A) - \sum_{i=1}^{\nu} u(p_i) .$$

L. Cesari [4] ha dimostrato il seguente

Lemma 3. Se la trasformazione piana T è B.V., se $\{ p_i ;\ i = 1, 2, \ldots, \nu \}$, $\{ p'_j ;\ j = 1, 2, \ldots, \nu' \}$ sono due gruppi di poligoni semplici di A, se i poligoni $\{ p_i \}$ sono a due a due senza punti interni in comune ed analoga proprietà hanno i poligoni $\{ p'_j \}$, se [3] $\delta[T(p'_j)] < \rho$, $\{ j = 1, 2, \ldots, \nu' \}$, se E, E', I, I' sono gli insiemi introdotti come sopra relativamente ai gruppi di poligoni $\{ p_i \}$, $\{ p'_j \}$, allora in quasi tutti i punti di $T(A) - I - I' - E - E'$ che distano da E non meno di ρ si ha:

$$\sum_{i=1}^{\nu} O(x, y; c_i) = \sum_{j=1}^{\nu'} O(x, y; c'_j) .$$

---

(2) Se B è un insieme di punti, $| B |$ ne indica la misura esterna secondo Lebesgue.

(3) Se B è un insieme di punti del piano (u, v), $T(B)$ è l'immagine di B secondo T. Se B è un insieme di punti, $\delta(B)$ è il suo diametro.

L. CESARI [3] ha dimostrato il seguente altro

Lemma 4. Se la trasformazione piana T è B.V., ad ogni numero $\varepsilon > 0$ si può far corrispondere un gruppo di poligoni semplici $\{ p_i ;\ i = 1, 2,..., n \}$ interni ad A, a due a due senza punti interni in comune, tali che se E è l'insieme introdotto come sopra, relativamente ai poligoni $\{ p_i \}$, si ha:

$$| E | < \varepsilon \ ; \qquad \delta[T(p_i)] < \varepsilon \, , \quad (i = 1,2,..., n) \ ; \qquad \sum_{i=1}^{n} u(p_i) > G(A) - \varepsilon \, .$$

Da questo Lemma, dopo avere ricordato che è $u(p_i) \leqslant g(p_i)$, si deduce facilmente il seguente

Lemma 5. Se la trasformazione piana T è B.V., esistono quante si vogliono successioni di gruppi di poligoni di A, $\{ p_i^{(n)} ;\ i = 1, 2,..., \nu_n \}$, $(n = 1, 2,...)$, tali che per ogni n:

a) i poligoni $\{ p_i^{(n)} ;\ i = 1, 2,..., \nu_n \}$ sono a due a due senza punti interni in comune,

b) $\quad | E_n | = | \sum_{i=1}^{\nu_n} c_i^{(n)} | < 1/2^{n+1} \, ,$

c) $\quad | I_n | \leqslant G(A) - \sum_{i=1}^{\nu_n} g(p_i^{(n)}) \leqslant G(A) - \sum_{i=1}^{\nu_n} u(p_i^{(n)}) < 1/2^{n+1} \, ,$

d) $\quad | I_n^* | \leqslant G(A) - \sum_{i=1}^{\nu_n} u(p_i^{(n)}) < 1/2^{n+1} \, ,$

e) $\quad \delta[T(p_i^{(n)})] < 1/2^{n+1} \, ,$

f) indicato con ρ_n il massimo numero reale tale che $| (E_n)_{\rho_n} | < | E_n | + 1/2^{n+1}$, si ha

$$\delta[T(p_i^{(n+1)})] < \rho_n \, ,$$

g) si può supporre $\rho_1 \geqslant \rho_2 \geqslant ... \geqslant \rho_n \geqslant ...$, $\lim_{n \to \infty} \rho_n = 0$,

ove $\{ c_i^{(n)} \}$, E_n, I_n, I_n^* hanno rispetto al gruppo di poligoni $\{ p_i^{(n)} \}$ il significato che, sopra, $\{ c_i \}$, E, I, I^* hanno rispetto ai poligoni $\{ p_i \}$.

3. – Dimostrazione del Teorema A.

Sia T una trasformazione piana A.C., sia $\{ p_i^{(n)} ;\ i = 1, 2,..., \nu_n \}$, $(n=1, 2,...)$ una successione di gruppi di poligoni verificante tutte le ipotesi del Lemma 5.

Sia H l'insieme, numerabile [5], dei punti (x, y) in cui non si ha $\psi(x, y;\ T) = \Psi(x, y;\ T) = \varkappa(x, y;\ T)$. Sia K l' insieme, di misura nulla, dei punti (x, y) in cui si ha $\Psi(x, y;\ T) = + \infty$.

Sia L l'insieme dei punti (x, y) i cui modelli continui massimali essenziali [5] non sono ridotti a punti. Anche l'insieme L ha misura nulla [5].

Per ogni coppia di interi n, $n+p$, in virtù del Lemma 3, esiste un insieme di punti (x, y), di misura nulla, che chiamerò $R_{n,n+p}$, tale che per tutti i punti (x, y) di $T(A) - I_n - I_{n+p} - (E_n)_{\varrho_n} - R_{n,n+p} - E_{n+p}$ si ha:

$$(\alpha) \qquad \sum_{i=1}^{\nu_n} O(x, y; c_i^{(n)}) = \sum_{j=1}^{\nu_{n+p}} O(x, y; c_j^{(n+p)}) .$$

Inoltre, per il Lemma 1, in tutti i punti di $T(A) - I_n$ si ha

$$(\beta) \qquad \sum_{i=1}^{\nu_n} | O(x, y; c_i^{(n)}) | = \Psi(x, y; T) ,$$

e, per il Lemma 2, in tutti i punti di $T(A) - I_n^*$ si ha

$$(\gamma) \qquad \sum_{i=1}^{\nu_n} o(x, y; c_i^{(n)}) = \psi(x, y; T) .$$

Se pongo

$$R_n = \sum_{m=n}^{\infty} [I_m + I_m^* + (E_m)_{\varrho_m} + \sum_{p=1}^{\infty} R_{m,m+p} + H + K + L] ,$$

poichè $I_m - H \subset I_m^*$, si ha

$$| R_n | \leqslant \sum_{m=n}^{\infty} (1/2^{m+1} + 1/2^{m+1} + 1/2^{m+1}) = 3/2^n ,$$

e quindi, per essere $R_1 \supset R_2 \supset R_3 \supset \ldots \supset R_n \supset \ldots$, risulta

$$R = \lim_{n\to\infty} R_n , \qquad | R | = 0 .$$

Sia (x, y) un punto di $T(A) - R$. Esisterà un intero $n_0 = n_0(x, y)$ tale che il punto (x, y) è esterno ad R_{n_0}, a tutti gli R_n con $n > n_0$, ed a tutti gli I_n, I_n^*, $(E_n)_{\varrho_n}$, $R_{n,n+p}$, H, K, L se $n \geqslant n_0$ e $p \geqslant 1$. Perciò per $n \geqslant n_0$ e $p \geqslant 1$ valgono le (α), (β), (γ). Esistono quindi per ogni punto (x, y) di $T(A) - R$, i seguenti limiti

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\nu_n} O(x, y; c_i^{(n)}) ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\nu_n} | O(x, y; c_i^{(n)}) | = \Psi(x, y; T) ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\nu_n} o(x, y; c_i^{(n)}) = \psi(x, y; T) ,$$

al primo dei quali L. CESARI ha dato il nome di « funzione caratteristica relativa ». Essa è indipendente dalla successione di poligoni considerata [4].

Considero ora un punto (x, y) di $T(A) - R$. Per esso si abbia $\psi(x, y; T) = \Psi(x, y; T) = \varkappa(x, y; T) = \mu$. In virtù di quanto è detto sopra esiste un intero $n_0(x, y)$ tale che se $n \geqslant n_0$ si ha:

$$\sum_{i=1}^{\nu_n} O(x, y; c_i^{(n_i)}) = n(x, y; T),$$

$$\sum_{i=1}^{\nu_n} | O(x, y; c_i^{(n)}) | = \sum_{i=1}^{\nu_n} o(x, y; c_i^{(n)}) = \Psi(x, y; T) = \psi(x, y; T) = \mu.$$

Esistono dunque μ e non più di μ poligoni fra i $\{ p_i^{(n)} \}$, siano essi $p_{i_1}^{(n)}, p_{i_2}^{(n)}, \ldots, p_{i_\mu}^{(n)}$, per i quali è $O(x, y; c_{i_s}^{(n)}) \neq 0$, $(s=1, 2, \ldots, \mu)$, mentre per i rimanenti $p_i^{(n)}$, $i \neq i_s$ si ha $O(x, y; c_i^{(n)}) = 0$.

All'interno di ciascuno dei poligoni $p_{i_s}^{(n)}$, $(s = 1, 2, \ldots, \mu)$ appartiene [6] perciò un modello continuo massimale essenziale di (x, y), e poichè i modelli massimali continui essenziali di (x, y) sono μ punti (u_1, v_1), $(u_2, v_2), \ldots, (u_\mu, v_\mu)$, ognuno di essi è interno ad uno dei poligoni $p_{i_s}^{(n)}$, $(s = 1, 2, \ldots, \mu)$. Sia, per fissare le idee, (u_s, v_s) interno al poligono $p_{i_s}^{(n)}$.

Gli indici topologici $O(x, y; c_{i_s}^{(n)})$ sono perciò gli indici locali essenziali $i_e(u_s, v_s; T)$, secondo T. RADÓ e P. V. REICHELDERFER [6], relativi ai punti (u_s, v_s).

È dunque in definitiva, per il fissato punto (x, y),

$$n(x, y; T) = \sum_{s=1}^{\mu} i_e(u_s, v_s; T),$$

e poichè l'insieme dei punti che sono modelli continui massimali essenziali di (x, y) è costituito dai soli punti (u_1, v_1), $(u_2, v_2), \ldots, (u_\mu, v_\mu)$ ne risulta

$$n(x, y; T) = \nu(x, y; T),$$

ove $\nu(x, y; T)$ è la funzione di « molteplicità relativa » di T. RADÓ e P. V. REICHELDERFER.

Ciò accade per ogni punto di $T(A) - R$, ed R ha misura nulla.

Il Teorema A è così provato.

Osservazione. Se la trasformazione piana T è B.V. anzichè A.C., le funzioni $n(x, y; T)$ e $\nu(x, y; T)$ possono anche differire in un insieme di misura positiva. Ciò si ha, ad esempio, per la trasformazione piana B.V., ma non A.C., introdotta da L. CESARI in [2]. Infatti in quasi tutti i punti della linea C di tale esempio, che costituiscono un insieme di misura positiva, la funzione $n(x, y; T)$ vale 1, mentre la funzione $\nu(x, y; T)$ vale zero.

Bibliografia.

[1]. L. CESARI, *Caratterizzazione analitica delle superficie continue di area finita secondo* LEBESGUE. Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) **10**, 253-294 (1941).

[2]. L. CESARI, *Sul concetto di trasformazione assolutamente continua.* Boll. Un. Mat. Ital. (2) **4**, 5-10 (1942).

[3]. L. CESARI, *Sui fondamenti geometrici dell'integrale classico per l'area delle superficie in forma parametrica.* Mem. Accad. Italia, **13**, 1323-1481 (1943).

[4]. L. CESARI, *Sulla trasformazione degli integrali doppi.* Ann. Mat. Pura App. (4) **27**, 321-374 (1948).

[5]. T. RADÓ, *Two dimensional concepts of bounded variation and absolute continuity* Duke Math. J., **14**, 587-608 (1947).

[6]. T. RADÓ and P. V. REICHELDERFER, *A theory of absolutely continuous transformations in the plane.* Trans. Amer. Math. Soc. **49**, 258-307 (1941).

Direttore responsabile: A. MAMBRIANI Tip. Compositori - Bologna