Una visione dell'Opera scientifica di TIBOR RADÓ (*).

Il valente matematico TIBOR RADÓ è attualmente « Research Professor in Mathematics » nello « Ohio State University ». Il suo indirizzo è il seguente: « Department of Mathematics, Ohio State University, Columbus, Ohio, U.S.A. ».

Ecco alcuni dati biografici. Egli nacque a Budapest (Ungheria) nel 1895. Finita la Scuola media superiore, entrò nel 1913 nell'Istituto Politecnico di Budapest. All'inizio del 1915 venne chiamato in servizio militare nell'esercito ungherese: passò circa un anno su il fronte russo, fino a quando (agosto 1916) venne catturato dai russi, e rimase in Siberia, come prigioniero di guerra, fino all'ottobre 1920. Ritornato in Ungheria, si laureò in Matematica nella Università di Szeged, lavorando sotto la direzione di F. RIESZ. Nel 1924 si sposò con IDA BARABÀS DE ALBIS. Fra il 1920 e il 1929 Egli lavorò nella Università di Szeged in qualità di assistente e di libero docente. In tale periodo ebbe modo, con borse di studio, di recarsi parecchie volte in Germania ad allargare e perfezionare le sue conoscenze, e nel 1928-29 andò allo « International Research Fellow » della Fondazione ROCKEFELLER. In tali occasioni il RADÓ strinse contatti con KOEBE, LICHTENSTEIN, CARATHÉODORY. Nel 1929 venne invitato negli Stati Uniti per un ciclo di conferenze nella « Harvard University » e nel « Rice Institute ». Egli decise poi, nel 1930, di stabilirsi negli Stati Uniti, come professore di Matematica nello « Ohio State University », dove presiedette il dipartimento di Matematica dal 1946 al 1948, ed ora — come sopra ho già detto — vi ha il posto di « Research Professor in Mathematics ». In qualità di « visiting professor » andò nel 1942 nella Università di Chicago e nel 1947 nella Università di Puerto Rico; nel 1944-45 venne invitato nello « Institute for Advanced Study » di Princeton. Recentemente il RADÓ è stato nominato membro straniero della « Accademia delle Scienze » di Bologna (Italia).

Ciò che segue contiene una visione del contenuto delle principali pubbli-

(*) A cura di ANTONIO MAMBRIANI, che qui ringrazia vivamente il RADÓ per avere aderito alle varie richieste di informazioni e di dati necessari a scrivere questa visione d'insieme.

cazioni del RADÓ. A facilitare questa esposizione, le pubblicazioni sono state suddivise in vari gruppi corrispondenti ai diversi argomenti generali e concatenati da esse trattati, e cioè:

Trasformazione conforme, variabili complesse (§ 1).
Calcolo delle Variazioni, problema di Plateau (§ 2).
Funzioni armoniche e subarmoniche; superficie minimanti (§ 3).
Concetti bidimensionali di variazione limitata, assoluta continuità, Jacobiani generalizzati (§ 4).
Teoria dell'area delle superficie (§ 5).

Sono poi riunite (§ 6) le pubblicazioni che trattano argomenti isolati, e viene anche accennato (§ 7) alle ricerche in corso.

In fine (§ 8) vi è l'elenco delle pubblicazioni del RADÓ, in ordine cronologico di stampa fino a tutto l'aprile 1950.

§ 1. – Trasformazione conforme, variabili complesse.

1.1. – Uno dei concetti fondamentali nella teoria della trasformazione conforme è il concetto di *superficie di Riemann*, quale campo opportuno di definizione di una funzione analitica di una variabile complessa. Per alcuni decenni nessuna definizione concettuale generale di superficie di RIEMANN venne utilizzata, fino a che apparve la trattazione assiomatica di H. WEYL nel suo fondamentale trattato su il concetto di superficie di RIEMANN. Il RADÓ nel suo lavoro [11] (1) ci dà la risposta a una questione fondamentale lasciata aperta dal WEYL. Secondo il WEYL una superficie di RIEMANN R è un ente matematico soddisfacente alle seguenti condizioni:

1ª R è uno spazio connesso di HAUSDORFF.

2ª R è, in piccolo, equivalente topologicamente al piano. Più precisamente: esiste su R un sistema $\{\omega\}$ di intorni ω tali che ogni ω è equivalente topologicamente all'interno $|z| < 1$ del cerchio unitario nel piano complesso della variabile z.

3ª R è triangolabile. In armonia con le due condizioni precedenti, si può provare che ciò è equivalente alla condizione che R soddisfi al secondo assioma numerico di HAUSDORFF.

4ª R deve ammettere delle *trasformazioni conformi in piccolo*, nel senso seguente: Esiste su R un sistema $\{D\}$ di insiemi aperti D, e per ciascun D

(1) I numeri in parentesi quadra indicano i vari lavori del RADÓ elencati in fine, nel § 8.

una trasformazione topologica f_D di D nell'interno $|z|<1$ del cerchio unitario nel piano complesso z, in modo che valgano i seguenti due fatti: *a*) Gli insiemi D coprono R. *b*) Se G è un insieme aperto contenuto nella intersezione di due insiemi D_1, D_2 del sistema $\{D\}$, e se G_1, G_2 sono i trasformati di G a mezzo delle trasformazioni corrispondenti f_{D_1}, f_{D_2}, allora la trasformazione $f_{D_2}f_{D_1}^{-1}$ deve essere una trasformazione conforme, dello stesso senso, di G_1 in G_2.

In relazione a questa astratta, o assiomatica, definizione di superficie di RIEMANN, il WEYL sollevò la questione di vedere se la condizione 3ª è realmente necessaria. La risposta è veramente interessante. Degli esempi provano che le condizioni 1ª e 2ª non implicano la condizione 3ª. Invece si ha che le condizioni 1ª, 2ª, 4ª implicano la condizione 3ª. È questo il risultato principale stabilito dal RADÓ in [11]. Tale risultato completa così la definizione assiomatica di superficie di RIEMANN. Il risultato del RADÓ viene ad illustrare il fenomeno generale che il carattere conforme di una trasformazione, o di un insieme di trasformazioni, può avere peculiari conseguenze topologiche. I lavori [2], [4], [10] del RADÓ ci dànno ulteriori prove in tale senso. Mostriamolo, estraendo da tali lavori qualche esempio.

1.2. – Diciamo che una superficie di RIEMANN R ammette una *estensione nel senso conforme* se esiste una trasformazione conforme 1-1 di R in un sottodominio *proprio* di una superficie di RIEMANN R^*. Se R è una superficie di RIEMANN chiusa (simili a quelle che si presentano nella teoria delle funzioni algebriche), allora manifestamente R non ammette una estensione. Invece se R è aperta si presenta il caso interessante. Il RADÓ in [10] ci dà un esempio di superficie di RIEMANN R aperta che ammette una estensione nel senso topologico, ma non ammette una estensione nel senso conforme (come sopra è stato definito). Questo fenomeno è stato studiato successivamente da altri che ottennero ulteriori interessanti risultati.

1.3. – Due domini G_1, G_2, nel piano della variabile complessa z, sono chiamati *conformemente equivalenti* se esiste una trasformazione conforme 1-1 di G_1 in G_2. Domini conformemente equivalenti sono manifestamente anche topologicamente equivalenti, ma l'affermazione inversa è in generale falsa. Il RADÓ ha dato su ciò, in [8], un teorema generale. Diciamo G_n, con $n \geqslant 1$, una regione di JORDAN limitata, con le curve di frontiera C_0, $C_1, \ldots, C_n$, essendo C_0 la curva frontiera esterna. Nell'interno di G_n prendiamo le curve di JORDAN C_0', $C_1', \ldots, C_n'$ tali che C_1' racchiuda C_1 e soltanto $C_1, \ldots, C_n'$ racchiuda C_n e soltanto C_n, mentre C_0' è racchiusa da C_0 e racchiude $C_1', \ldots, C_n'$. Inoltre C_0', $C_1', \ldots, C_n'$ non devono intersecarsi fra loro. Allora C_0', $C_1', \ldots, C_n'$ costituiscono la frontiera di una regione di JORDAN G'_n la quale, com'è manifesto, risulta topologicamente equivalente a G_n. D'altra parte il RADÓ ha dimostrato in uno dei teoremi di [8] che G'_n non è conformemente equivalente a G_n. Questo risultato rappresenta una generalizzazione di vari risultati particolari del KOEBE, usati dal KOEBE stesso nel suo lavoro su la teoria della uniformizzazione.

1.4. – La Nota [4] del RADÓ è relativa ad una questione sollevata dal CARATHÉODORY. Nel piano della variabile complessa w siano C_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, delle curve di JORDAN racchiudenti il punto $w = 0$. Sia $f_n(z)$ la funzione analitica che dà la trasformazione conforme 1-1 del disco unitario $|z| < 1$ nella regione interna racchiusa da C_n, dovendo valere le condizioni $f_n(0) = 0$, $f'_n(0) > 0$. Allora $f_n(z)$ resta continua (e 1-1) anche su C_n. La questione è allora la seguente: In quale guisa C_n deve convergere a C_0, in modo che conseguentemente $f_n(z)$ tenda uniformemente a $f_0(z)$ nel disco unitario chiuso $|z| \leqslant 1$? Tale questione venne studiata da diversi autori. In [4] il RADÓ dà una particolare semplice risposta servendosi dello scarto di FRÉCHET di due curve di JORDAN. Date due curve di JORDAN C' e C'' nel piano della variabile w, sia t una trasformazione continua 1-1 di C' in C'', e sia Δ la massima distanza di punti corrispondenti in C' e C''. Il minimo limite di Δ, per ogni possibile scelta di t, è lo scarto $\Delta(C', C'')$. Il RADÓ ottiene fra l'altro, in [4], il seguente notevole teorema: La condizione $\Delta(C_n, C_0) \to 0$ è necessaria e sufficiente per la uniforme convergenza di $f_n(z)$ a $f_0(z)$ su il disco unitario chiuso $|z| \leqslant 1$.

1.5. – Parecchi altri lavori del RADÓ su la trasformazione conforme sono relativi a questioni sollevate dal CARATHÉODORY. Così in [6] il RADÓ apporta un contributo allo studio dei cosiddetti *processi di saldatura* (*welding processes*) usati nella teoria di uniformizzazione. Per ottenere delle trasformazioni conformi di una superficie di RIEMANN triangolata, si parte dalla osservazione che una trasformazione del tipo desiderato è valida separatamente per ogni triangolo, in virtù del teorema di trasformazione di RIEMANN e si cerca di ottenere la trasformazione desiderata per l'intera superficie dai triangoli successivi «consecutivamente saldati» («welding together») che ricoprono la superficie. Sviluppando una idea di CARATHÉODORY, in [6] il RADÓ dimostra che ognuno dei processi di saldatura necessari può ottenersi con un numero finito di applicazioni del principio di riflessione di SCHWARZ.

1.6. – Nella Nota [31] il RADÓ si occupa di un fondamentale teorema di STUDY. L'eguaglianza $w = f(z)$ definisca una trasformazione conforme 1-1 di $|z| < 1$ su un dominio convesso G del piano w. Secondo lo STUDY l'immagine di ogni disco circolare contenuto in $|z| < 1$ è allora pure convessa. Mentre per la prova di ciò venivano indicati come necessari dei procedimenti laboriosi, il RADÓ in [31] stabilisce brevemente il teorema come corollario immediato del lemma di SCHWARZ. Il metodo venne poi usato e perfezionato da vari autori.

§ 2. – Calcolo delle Variazioni, problema di Plateau.

2.1. – Gli esperimenti del fisico belga PLATEAU, i quali possono ripetersi in sostanza con membrane di sapone, conducono a uno dei classici problemi matematici. La monografia [42] del RADÓ, dal titolo *On the problem of Plateau*, apparsa nella serie degli «Ergebnisse der Mathematik» nel 1933, ci dà una dettagliata presentazione del fondo storico e dei risultati ottenuti sul problema di PLATEAU fino alla fine del 1932. Cerchiamo ora, restringendoci al minimo necessario, di porre in luce gli importanti contributi del RADÓ su questo problema.

2.2. – Nella trattazione matematica del problema di PLATEAU si parte da una curva di JORDAN nello spazio a tre dimensioni. Se questa curva limita una superficie S di area minima, e se S è sufficientemente pianeggiante, i metodi classici del Calcolo delle Variazioni provano che la lieve curvatura di S svanisce, e quindi S è una superficie minimante nel senso della Geometria differenziale. Esempi mostrano che l'inverso è in generale falso.

Nasce così *il problema di simultaneità* (*the simultaneous problem*) consistente nel provare l'esistenza di una superficie minimante che abbia l'area minima e che sia limitata da una prefissata curva di JORDAN.

Il LEBESGUE, nella sua Tesi dottorale (del 1902), applicò la sua nuova definizione di area di una superficie per affrontare il problema nella forma non parametrica. Precisamente, considerato nel piano cartesiano del punto (x, y) la curva di JORDAN C', proiezione ortogonale di una curva di JORDAN C nello spazio cartesiano del punto (x, y, z), ricercare una superficie soluzione S limitata da C e data da una equazione della forma $z = f(x, y)$. Degli esempi provano che una soluzione del problema di PLATEAU per C può esistere, ma può non ammettere una rappresentazione della forma $z = f(x, y)$. Ne segue che affinchè il problema non parametrico possa avere soluzione dovranno introdursi opportune restrizioni. Sotto simili restrizioni, che considereremo esplicitamente più avanti, il LEBESGUE ottenne una superficie S, rappresentabile nella forma $z = f(x, y)$, limitata da C, avente area minima, e soddisfacente ad una condizione di LIPSCHITZ. Se si potesse dedurre l'esistenza di derivate di $f(x, y)$ d'ordine superiore, allora il metodo classico del Calcolo delle Variazioni porterebbe a concludere che S è una superficie minimante. Il problema, allo stato in cui venne lasciato dal LEBESGUE, consiste allora nel cercare di porre un ponte di congiunzione sul distacco fra una semplice condizione di LIPSCHITZ e le più spinte condizioni restrittive richieste dalla teoria classica.

2.3. – Questo problema venne creduto, dapprima, come un caso particolare del problema generale di HILBERT su il carattere analitico delle soluzioni di problemi di un certo tipo, del Calcolo delle Variazioni. Verso il 1920 i risultati su il problema generale di HILBERT erano contenuti in alcuni pochi lavori veramente complicati e difficili. Il RADÓ nella sua grossa Memoria [17] arriva a chiarire egregiamente i vari punti oscuri di questo importante argomento.

2.4. – Su il nostro problema un passo in avanti venne fatto nel 1919 da HAAR, che considerò le superficie estremanti di problemi di integrali doppi, includenti problemi con integrandi della forma $F(p, q)$, dove p e q stanno, rispettivamente, per $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$. Supponendo soltanto, per la superficie estremante $z = f(x, y)$, la continuità delle derivate prime di $f(x, y)$, HAAR provò l'esistenza di una funzione ausiliaria $\omega(x, y)$ tale che per la superficie estremante $z = f(x, y)$ valga il sistema di equazioni differenziali, di primo ordine,

$$F_p = \omega_y\,, \qquad F_q = -\,\omega_x\,. \tag{2.4.1}$$

Nel caso speciale del problema di DIRICHLET le (2.4.1) si riducono alle equazioni di CAUCHY-RIEMANN, e perciò le equazioni (2.4.1) conducono allora al risultato che la superficie estremante, per la quale *a priori* si sa soltanto esservi le derivate parziali prime continue, è veramente analitica. HAAR formulò il problema di usare le equazioni (2.4.1) per ottenere risultati analoghi relativamente ad integrandi $F(p, q)$ generali, e in particolare per l'integrando $(1 + p^2 + q^2)^{1/2}$ del problema di PLATEAU. Il RADÓ con la sua Nota [13] ci dà un primo risultato significativo in tale direzione. In [13] la superficie S è assunta nella forma generale parametrica $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$. La superficie S è supposta avere l'area minima relativamente a questa sua frontiera, e le funzioni coordinate si suppongono soltanto avere continue le derivate parziali prime. Applicando l'idea di HAAR, conducente al sistema (2.4.1), relativamente ai tre piani coordinati, discende la esistenza di tre funzioni ausiliarie $\omega_1(x, y)$, $\omega_2(x, y)$, $\omega_3(x, y)$ soddisfacenti alle equazioni differenziali

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\omega_1}{\partial x}=\frac{q}{W}, && \frac{\partial\omega_1}{\partial y}=-\frac{p}{W},\\ &\frac{\partial\omega_2}{\partial x}=\frac{pq}{W}, && \frac{\partial\omega_2}{\partial y}=\frac{1+q^2}{W},\\ &\frac{\partial\omega_3}{\partial x}=\frac{1+p^2}{W}, && \frac{\partial\omega_3}{\partial y}=\frac{pq}{W},\end{aligned}\right. \tag{2.4.2}$$

dove $p = z_x$, $q = z_y$, $W = (1 + p^2 + q^2)^{1/2}$. Con l'introduzione delle nuove variabili $\alpha = x$, $\beta = \omega_2(x, y)$ si trova, a mezzo di calcoli diretti, che il sistema (2.4.2) si riconduce alle equazioni di CAUCHY-RIEMANN per y e z, e una ulteriore semplice discussione porta il RADÓ al risultato che $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ sono funzioni analitiche.

2.5. – Ora se S è rappresentabile nella forma $z = f(x, y)$, ed è noto che essa ha area minima solo relativamente alle superficie della stessa forma, la via precedente non può essere seguita. Ne nasce il problema di derivare le tre coppie di equazioni (2.4.2) sotto questa ipotesi più debole. Questa lacuna è colmata dal RADÓ in [14], relativamente alle estremanti $z = z(x, y)$, aventi solo le derivate parziali prime continue, dei problemi della forma $\iint F(p, q)\,dx\,dy =$ minimo. La proprietà di minimo di $z(x, y)$ è nota, ben inteso, soltanto relativamente alle superficie rappresentabili nella forma $z = z(x, y)$, e quindi non sono lecite le variazioni parallelamente a tutti e tre gli assi coordinati [le quali portano alle tre paia di equazioni (2.4.2)]. In [14], tuttavia, il RADÓ dimostra, mediante una sottile analisi del *metodo della variazione delle variabili indipendenti*, in precedenza considerato malamente, che vi sono pure tre funzioni ausiliarie $\omega_1(x, y)$, $\omega_2(x, y)$, $\omega_3(x, y)$ soddisfacenti, unitamente alla funzione estremante $z(x, y)$ o piuttosto alle sue derivate $p = z_x$, $q = z_y$, alle equazioni alle derivate parziali, del primo ordine,

$$\left\{\begin{aligned} pF_q &= \frac{\partial\omega_1}{\partial x}, & F - pF_p &= \frac{\partial\omega_1}{\partial y},\\ F - qF_q &= \frac{\partial\omega_2}{\partial x}, & qF_p &= \frac{\partial\omega_2}{\partial y},\\ F_q &= \frac{\partial\omega_3}{\partial x}, & F_p &= -\frac{\partial\omega_3}{\partial y}.\end{aligned}\right. \tag{2.5.1}$$

Le ultime due equazioni costituiscono l'originario sistema differenziale di

HAAR. Così (2.5.1) costituisce un importante completamento del RADÓ al risultato fondamentale originario di HAAR. Inoltre, nel caso del problema di PLATEAU il sistema (2.5.1) si riduce al sistema (2.4.2).

2.6. – Ritornando alla Tesi di dottorato del LEBESGUE, appare che il contrasto da superare consiste ancora nella diversità tra una condizione di LIPSCHITZ e l'esistenza delle derivate parziali prime continue. La teoria delle funzioni di variabili reali diede comunque i mezzi essenziali per appianare questo contrasto, come mostrò lo stesso HAAR. Tra le varie ulteriori difficoltà, una venne presa in considerazione dal RADÓ nel suo lavoro [18]. Come prima si disse, il LEBESGUE ottenne una estremante lipschitziana $z = z(x, y)$ sotto certe restrizioni su la prefissata curva C di frontiera. L'argomento dipende da un particolare teorema geometrico che venne usato, in modi particolari, prima dallo HILBERT, poi dal LEBESGUE, e anche da S. BERNSTEIN. In [18] il RADÓ stabilisce tale teorema geometrico nel caso generale, ed ecco in quale modo. Nel piano cartesiano del punto (x, y) sia C' una curva convessa che risulti la proiezione ortogonale di una curva C nello spazio cartesiano del punto (x, y, z). Diremo che C soddisfa a una *condizione tripunto* con la costante $\Delta > 0$, se è vero quanto segue. Se $z = ax + by + c$ è un qualsiasi piano che interseca C in almeno tre punti distinti, e se α è l'angolo acuto formato da questo piano con il piano del punto (x, y), allora è $\operatorname{tg}\alpha \leqslant \Delta$. Supponiamo ora che C soddisfi a questa condizione con una certa costante $\Delta > 0$. Sia allora $f(x, y)$ una funzione continua, definita nella regione racchiusa da C' e su C', tale che la superficie $z = f(x, y)$ sia limitata da C. Imponiamo inoltre che questa superficie sia una *superficie a sella* (*saddle-surface*), nel senso che per ogni scelta delle costanti a, b, c la differenza $f(x\,y) - (ax + by + c)$ sia una funzione monotona di x, y secondo il LEBESGUE [se $f(x, y)$ ha derivate di ordine superiore, allora questa condizione significa essenzialmente che la superficie $z = f(x, y)$ non ha punti ellittici]. Il teorema geometrico sopra considerato, stabilito dal RADÓ in [18], afferma che, sotto queste ipotesi, $f(x, y)$ soddisfa a una condizione di LIPSCHITZ con la costante Δ della condizione tripunto.

HAAR, nella sua soluzione (del 1927) del problema di PLATEAU in forma non parametrica, fece uso essenziale dei vari risultati precedenti del RADÓ. Tanto questa soluzione quanto i vari argomenti che essa coinvolge vennero studiati intensamente da parte di molti autori, con lo scopo di estenderne i metodi a problemi variazionali più generali. In particolare, il procedimento formale usato dal RADÓ in [13], relativamente al sistema (2.4.2), venne più tardi studiato dettagliatamente da HAAR e da altri, con lo scopo di estendere i risultati al sistema (2.5.1) più generale; e vennero fatti sforzi anche per semplificare questioni di dettaglio.

In [30] il RADÓ dà, fra altri risultati rilevanti, un teorema con il quale prova che una forma particolare, praticamente banale, del teorema geometrico concernente la condizione tripunto è del tutto sufficiente per le applicazioni. Questo fatto è interessante perchè, anche dopo semplificazioni considerevoli, proposte successivamente da altri autori, la dimostrazione del teorema geometrico su la condizione tripunto (stabilito in [18] nella sua forma generale) è sempre molto complicata se si fa la dovuta attenzione ad ogni dettaglio.

2.7. – Dopo pochi anni dalla soluzione del problema di PLATEAU nel caso non parametrico, grandi progressi si ebbero nel caso generale parametrico seguendo vie completamente differenti. Relativamente a tali progressi, il TONELLI scrisse in un suo lavoro: « Fra i risultati più belli ottenuti in questi « ultimi anni nel campo della Analisi Matematica vanno senza dubbio anno- « verati quelli relativi al problema di PLATEAU, dovuti a R. GARNIER, J. « DOUGLAS e T. RADÓ. Sopratutto estremamente generali sono i risultati del « DOUGLAS e del RADÓ, il primo dei quali ha risolto il problema di PLATEAU « per un contorno qualunque, dato da una curva di JORDAN semplice e chiusa « (e poi anche per più contorni di questa natura), mentre il secondo ha riso- « luto lo stesso problema per un contorno dato da una curva di JORDAN sem- « plice, chiusa e rettificabile od anche (più generalmente) da una curva di « JORDAN semplice, chiusa e tale che sia il contorno di almeno una super- « ficie semplicemente connessa di area finita ». I particolari dell'opera di questi autori sono esaminati nella monografia [42] del RADÓ.

2.8. – Diamo ora uno sguardo alla Memoria [32] nella quale il RADÓ dà la prima soluzione generale del *problema di simultaneità*, accennato al n. 2.2. Nello spazio cartesiano del punto (x, y, z) si consideri una curva di JORDAN Γ^* limitante almeno una superficie di area finita secondo il LEBESGUE, e diciamo m il minimo limite di tutte le aree delle superficie (immagini continue del disco circolare) limitate da Γ^*. L'idea fondamentale del RADÓ in [32] fu quella di stabilire e di risolvere dapprima il seguente *problema approssimato*.

Fissati tre punti distinti A, B, C sulla circonferenza unitaria $u^2 + v^2 = 1$ nel piano parametrico del punto (u, v), si prendano tre punti distinti A^*, B^*, C^* su Γ^*, e sia prefissato un $\varepsilon > 0$. Determinare tre funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ soddisfacenti alle seguenti proprietà:

1ª Le funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ sono armoniche per $u^2 + v^2 < 1$.

2ª Le funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ soddisfano alle relazioni

$$\iint\limits_{u^2+v^2<1} (E^{1/2} - G^{1/2})^2 \, du \, dv \leqslant \varepsilon \,, \qquad \iint\limits_{u^2+v^2<1} F \, du \, dv \leqslant \varepsilon \,,$$

dove

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \qquad F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \qquad G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2.$$

3ª Le funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ restano continue per $u^2 + v^2 = 1$ e le equazioni $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ trasformano topologicamente la circonferenza unitaria $u^2 + v^2 = 1$ in una (non assegnata) curva di JORDAN Γ_ε^* la cui distanza di FRÉCHET da Γ^* risulta $\leqslant \varepsilon$, in modo tale che le immagini A_ε^*, B_ε^*, C_ε^* di A, B, C siano nell'intorno ε dei tre prefissati punti A^*, B^*, C^*.

Una volta risoluto questo *problema d'approssimazione* ε, la *soluzione esatta* del problema di simultaneità per Γ^* s'ottiene subito con un passaggio al limite. Il punto centrale del metodo che il RADÓ ci indica in [32] è precisamente la soluzione del problema d'approssimazione ε, ed ecco come vi giunge. Si fissi un $\sigma > 0$ tale che sia $6\sigma + (6\sigma m + 6\sigma^2)^{1/2} < \varepsilon$. In virtù della definizione di m, esiste allora una poliedrica P tale che l'area di P sia minore di $m + 6$, mentre le funzioni coordinate di P soddisfano alla condizione 3ª sopra considerata. Per un classico teorema di SCHWARZ, possiamo supporre che P sia data sotto forma di una rappresentazione isotermica. Siano allora $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ le funzioni armoniche nel disco unitario $u^2 + v^2 \leqslant 1$ che s'accordano con le rispettive funzioni coordinate di P su la circonferenza $u^2 + v^2 = 1$ del disco unitario. La classica proprietà estremante delle funzioni armoniche, relativa all'integrale di DIRICHLET, ci dice allora, per mezzo di diseguaglianze del tutto elementari, che le funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ risolvono il problema d'approssimazione ε. Recenti ricerche di altri hanno mostrato che le idee contenute nella trattazione e risoluzione del problema d'approssimazione ε possono estendersi allo studio di generalizzazioni del classico problema di PLATEAU a spazi non euclidei.

2.9. – I lavori [33], [34], [35], [41] del RADÓ contengono studi di vari dettagli e di approssimazioni alternate del problema di PLATEAU in forma parametrica. In particolare, [35] contiene una discussione del ruolo di una certa *proprietà estremante di rappresentazioni isotermiche* delle superficie, la quale venne largamente usata e grandemente perfezionata da altri in successive ricerche.

I metodi usati in questi lavori per risolvere il problema di PLATEAU dipendono essenzialmente dal concetto di semicontinuità inferiore. L'importanza di questo concetto nel « metodo diretto » del Calcolo delle Variazioni è stata estesamente provata nella monumentale opera del TONELLI sui problemi integrali semplici. La verifica della proprietà di semicontinuità inferiore per certe classi di integrali doppi è stato l'argomento di una gran parte delle ricerche degli ultimi anni.

2.10. – Nel lavoro [56] il RADÓ si occupa di una generalizzazione di un lemma di MCSHANE che stabilisce un fatto fondamentale in questo ordine di studi. MCSHANE stabilì e dimostrò il suo lemma nella forma seguente.

Nel quadrato fondamentale Q: $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant 1$, siano date le terne di funzioni $x_n(u, v)$, $y_n(u, v)$, $z_n(u, v)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, con le seguenti proprietà:

1ª Le derivate parziali prime di x_0, y_0, z_0 esistono quasi ovunque in Q.

2ª I Jacobiani X_0, Y_0, Z_0, corrispondenti a x_0, y_0, z_0, sono sommabili in Q.

3ª Le funzioni x_0, y_0, z_0 sono assolutamente continue su la frontiera di Q.

4ª Valgono le formule

$$\iint_Q X_0 \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = \frac{1}{2} \int\limits_{\dots} (y_0 \, \mathrm{d}z_0 - z_0 \, \mathrm{d}y_0) \,,$$

$$\iint_Q Y_0 \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = \frac{1}{2} \int\limits_{\dots} (z_0 \, \mathrm{d}x_0 - x_0 \, \mathrm{d}z_0) \,,$$

$$\iint_Q Z_0 \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = \frac{1}{2} \int\limits_{\dots} (x_0 \, \mathrm{d}y_0 - y_0 \, \mathrm{d}x_0) \,,$$

dove nei secondi membri le linee di integrazione sono date dalla frontiera di Q.

5ª Per $n \geqslant 1$ le funzioni x_n, y_n, z_n sono quasi-lineari.

6ª Si ha $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$, $z_n \to z_0$ uniformemente in Q.

Sotto queste condizioni il lemma di MCSHANE afferma che per ogni scelta di costanti a, b, c esiste una successione di insiemi misurabili V_n in Q, tali che

$$\iint_{V_n} (aX_n + bY_n + cZ_n) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \to \iint_Q (aX_0 + bY_0 + cZ_0) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \,,$$

dove X_n, Y_n, Z_n sono gli Jacobiani corrispondenti alle terne x_n, y_n, z_n. Il risultato dimostrato dal RADÓ in [56] sta nel fatto che il lemma resta valido se si sopprimono le condizioni, apparentemente decisive, 3ª e 4ª.

2.11. – La estrema generalità del lemma così ottenuto è sfruttata dal RADÓ nella sua Memoria [59] per estendere l'applicazione di teoremi precedenti su la semicontinuità inferiore di certe classi di integrali doppi, relativamente alla classe delle superficie continue (del tipo del disco circolare) alle quali si applicano simili teoremi.

In [59] il RADÓ dimostra che la classe risultante è composta di tutte quelle superficie di area finita secondo LEBESGUE che ammettono una rappresentazione per la quale l'area è data dalla formula integrale classica. Per un recente risultato fondamentale del CESARI, ogni superficie di area finita secondo LEBESGUE ammette una simile rappresentazione. Così i risultati del

RADÓ in [59] sono decisivi fino a che intervengono gli integrali doppi contenenti gli ordinari Jacobiani. D'altra parte, i teoremi di semicontinuità inferiore ammettono delle altre generalizzazioni fondamentali se si usano gli *Jacobiani generalizzati*, come provano ricerche recenti e indipendenti di CESARI e di REICHELDERFER.

§ 3. - Funzioni armoniche e subarmoniche; superficie minimanti.

3.1. – Il «principio del massimo» è stato per lungo tempo riconosciuto come fondamentale in casi relativi a funzioni analitiche di una variabile complessa o a funzioni armoniche di due o più variabili reali. F. RIESZ introdusse il concetto di *funzione subarmonica* allo scopo di unificare e allargare le numerosissime applicazioni del «principio del massimo». La teoria delle funzioni subarmoniche subì un rapido sviluppo seguendo i primi fondamentali contributi di F. RIESZ.

Il RADÓ nella sua monografia [50], dal titolo *Subharmonic functions*, apparsa nella serie degli «Ergebnisse der Mathematik» nel 1937, ci dà una dettagliata relazione dello sviluppo della teoria della funzioni subarmoniche fino al 1936. In tale monografia, inoltre, il RADÓ ci fornisce numerose semplificazioni e perfezionamenti di dimostrazioni e di risultati, e ci presenta utili indicazioni che vennero successivamente prese in considerazione da altri.

3.2. – Diversi lavori del RADÓ si occupano della teoria e delle applicazioni delle funzioni subarmoniche.

La Nota [12], redatta in collaborazione con F. RIESZ, contiene una applicazione del problema di DIRICHLET nel piano.

La Nota [49] risolve un problema fondamentale enunciato dal RIESZ, provando che la *maggiorante armonica superiore* (*best harmonic majorant*) di una funzione subarmonica coincide con la sua *maggiorante armonica inferiore* (*least harmonic majorant*).

Nella Nota [28], concernente una supposizione del MONTEL, il RADÓ ci dà dei risultati e dei metodi particolarmente interessanti, che vennero poi largamente sviluppati e perfezionati da vari autori. In un dominio G, del piano cartesiano del punto (x, y), sia data una funzione $u(x, y)$ semicontinua superiormente, con valori finiti e non negativi. Secondo MONTEL la funzione $v = \log u$ è allora subarmonica in G se e solo se $u \cdot \exp(\alpha x + \beta y)$ è subarmonica per ogni scelta delle costanti α, β. Tuttavia, il MONTEL dimostrò la sufficienza della condizione soltanto nel caso in cui u abbia derivate parziali continue del primo e del secondo ordine. In [28] il RADÓ ottiene il teorema in modo del tutto generale facendo uso di procedimenti integrali. Fissiamo un $h > 0$, e poniamo

$$u_h(x, y) = \frac{1}{4h^2} \int_{-h}^{h} \int_{-h}^{h} u(x + \xi, y + \eta) \, d\xi \, d\eta .$$

Il metodo seguito in [28] si basa su l'osservazione che $u_h(x, y)$ è più semplice di $u(x, y)$ e nello stesso tempo le proprietà fissate per $u(x, y)$ valgono pure per $u_h(x, y)$. Inoltre, $u_h(x, y) \to u(x, y)$ quando $h \to 0$. La ripetuta applicazione di questo procedimento semplificatore ci permette allora di ridurre il caso generale al caso di funzioni con il massimo grado desiderato di semplicità. Il metodo si presentò utile in un gran numero di casi analoghi in studi seguenti, e condusse a una trattazione di notevole chiarezza e speditezza di vari quesiti fondamentali.

3.3. – Parecchi lavori del RADÓ trattano delle applicazioni delle funzioni armoniche e subarmoniche ai problemi relativi alle superficie minimanti, in connessione al lavoro, sopra discusso, su il problema di PLATEAU.

Così [23] riguarda il seguente notevole risultato di S. BERNSTEIN. Sia $f(x, y)$ continua, insieme alle sue derivate parziali del primo e secondo ordine, in tutto il piano cartesiano del punto (x, y), e supponiamo che la superficie $z = f(x, y)$ sia una superficie minimante. Allora $f(x, y)$ deve essere una funzione lineare $ax + by + c$. In [23] questo teorema è ridotto, mediante esplicite trasformazioni elementari, al seguente lemma. In un dominio G semplicemente connesso, situato internamente a un cerchio K del piano complesso della variabile w, la $g(w)$ sia una funzione analitica di w. Si supponga: 1°) G non si identifichi con l'interno di K; 2°) $g(w)$ si annulli in ogni punto, della frontiera di G, interno a K. Allora $g(w) = 0$. Successivamente altri autori trovarono che questo lemma è collegato a vari fatti fondamentali concernenti le funzioni subarmoniche di due variabili.

Il lavoro [36] del RADÓ contiene un certo numero di teoremi geometrici su le superficie minimanti, dedotti dal principio del massimo per le funzioni armoniche. Uno di questi teoremi è un teorema di unicità per il problema di PLATEAU. Sia data una curva C di JORDAN chiusa, nello spazio cartesiano del punto (x, y, z), e supponiamo che C abbia una curva convessa semplice come proiezione centrale o parallela su qualche piano. Allora si trova che C non può limitare più di una superficie minimante (tenendo presente che si considerano solo superficie del tipo topologico del disco circolare). Inoltre, [36] contiene una discussione elementare della variazione seconda dell'integrale dell'area, ciò che porta a esempi espliciti di porzioni di superficie minimanti che non hanno area minima relativamente alla loro frontiera.

3.4. – La Memoria [39] del RADÓ, in collaborazione con E. F. BECKENBACH, si occupa di una fondamentale analogia tra le funzioni analitiche $f(w) = x(u, v) + iy(u, v)$ della variabile complessa $w = u + iv$, da una parte, e le superficie minimanti dall'altra. Il fatto che $f(w)$ sia analitica è equivalente al fatto che $x(u, v)$, $y(u, v)$ costituiscano una *coppia di funzioni armoniche coniugate*, e questo ultimo fatto può essere espresso dalle equazioni

$$x_u^2 + y_u^2 = x_v^2 + y_v^2, \qquad x_u x_v + y_u y_v = 0 .$$

Come generalizzazione puramente formale, possiamo allora definire una *terna di funzioni armoniche coniugate* $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ per mezzo delle condizioni $E = G$, $F = 0$, dove

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \qquad G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2, \qquad F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v .$$

In realtà, è noto da tempo che questa formale generalizzazione ha grande importanza geometrica. Invero, in virtù di un teorema di WEIERSTRASS, le equazioni $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ rappresentano una superficie minimante nel senso di parametri isotermici se e solo se $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ formano una terna di funzioni armoniche. In [39] si indaga questa classica analogia tra funzioni analitiche e superficie minimanti anche in una nuova direzione, e cioè dal punto di vista del principio del massimo. Il teorema fondamentale è il seguente. Tre funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, continue in un dominio, formano una terna di funzioni armoniche coniugate se e solo se il logaritmo di $[(x + a)^2 + (y + b)^2 + (z + c)^2]^{1/2}$ è subarmonico per ogni scelta delle costanti reali a, b, c. In [39] si dimostra come questo teorema permetta la estensione alle superficie minimanti del lemma di SCHWARZ e di altri vari teoremi concernenti il principio del massimo per funzioni analitiche di una variabile complessa. Tanto queste idee quanto il metodo seguito furono largamente sviluppati e successivamente perfezionati da E. F. BECKENBACH e da altri.

3.5. – Nel lavoro [40] del RADÓ, pure in collaborazione con E. F. BECKENBACH, le funzioni subarmoniche sono applicate allo studio di superficie a curvatura negativa. Sia data una superficie mediante le equazioni $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, e siano E, F, G le corrispondenti prime quantità fondamentali. Si supponga che u, v siano parametri isotermici (cioè sia $E = G$, $F = 0$), e si ponga $h = E = G$. La osservazione fondamentale in [40] è contenuta nella affermazione che la curvatura di GAUSS della superficie è allora $\leqslant 0$ se e solo se $\log h$ è subarmonica. Questa osservazione conduce a numerose applicazioni geometriche delle funzioni subarmoniche. Ad esempio, in [40] si prova che se la curvatura di GAUSS di una superficie è $\leqslant 0$, allora su la superficie si mantiene la familiare diseguaglianza isoperimetrica. Vale a dire, se A è l'area di una porzione della superficie limitata da una curva di lunghezza L, risulta $A \leqslant L^2/(4\pi)$. Realmente, in [40] si dimostra che questo risultato è equivalente al seguente teorema su le funzioni subarmoniche. Sia $g(u, v)$ continua e $\geqslant 0$ in un dominio D, e si indichi con r il raggio di un disco circolare, con centro nel punto (u, v), compreso in D. Si ponga

$$A(g, u, v, r) = \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{\xi^2+\eta^2<r^2} g(u+\xi, v+\eta)\, d\xi\, d\eta ,$$

$$L(g, u, v, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(u + r\cos\theta,\ v + r \operatorname{sen}\theta)\, d\theta .$$

Allora si dimostra che g ha un logartimo subarmonico se e solo se la diseguaglianza $[A(g^2, u, v, r)]^{1/2} \leqslant L(g, u, v, r)$ sussiste per ogni scelta di un disco circolare in D. Il lavoro [40] contiene vari altri risultati comprovanti che un certo numero di teoremi, stabiliti precedentemente per le superficie minimanti, può essere esteso alle superficie di curvature gaussiane non positive in virtù delle relazioni, sopra spiegate, fra tali superficie e le funzioni subarmoniche. Queste relazioni furono provate successivamente da altri che ottennero delle ulteriori rilevanti conseguenze.

3.6. – La caratterizzazione, data in [40], delle funzioni con un logaritmo subarmonico a mezzo di medie integrali degli ordini 2 e 1 rispettivamente, porta alla questione generale di determinare l'effetto di condizioni analoghe coinvolgenti medie integrali di ordini arbitrari α, β. Il RADÓ in [43] studia tali questioni in dettaglio per il caso analogo, ma più semplice, delle funzioni convesse di una sola variabile. L'estensione di questi risultati alle funzioni subarmoniche di due o più variabili sembra al presente una impresa pretenziosa e difficile.

§ 4. – Concetti bidimensionali di variazione limitata, assoluta continuità, Jacobiani generalizzati.

4.1. – A questi argomenti il RADÓ dedicò un certo numero di lavori e anche una parte sostanziale del suo volume [72] dal titolo *Length and Area*. Le brevi considerazioni seguenti vogliono cercare di porre questi studi sotto la loro giusta luce.

Per le funzioni $f(u)$ di una sola variabile reale u i concetti di variazione limitata, assoluta continuità, derivazione, come pure i teoremi che pongono in relazione questi concetti fra di loro e con il concetto di integrale definito, sono di importanza fondamentale in tutta quanta l'Analisi. Negli ultimi cinquanta anni furono fatte molte indagini per ottenere concetti bidimensionali e teoremi di analoghi scopi e utilità. Le idee di maggior rilievo in questa direzione devono farsi risalire a GEÖCZE, BANACH e VITALI. Intorno al 1925 BANACH e VITALI proposero, l'uno indipendentemente dall'altro, la seguente definizione.

Sia T: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ una trasformazione continua, su il piano cartesiano del punto (x, y), del quadrato fondamentale Q: $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant 1$. Sia r un rettangolo in Q, $|T(r)|$ la misura dell'immagine di r, e σ indichi un generico sistema di rettangoli in Q senza punti interni comuni. Secondo BANACH e VITALI la trasformazione T è detta allora *a variazione limitata* se è

$$\text{(4.1.1)} \qquad \limsup_{\sigma} \sum_{r \in \sigma} |T(r)| < +\infty .$$

In modo simile e conveniente ne nasce un concetto di *assoluta continuità* per trasformazioni T, e in modo egualmente conveniente s'ottiene in questa direzione il concetto di *Jacobiano generalizzato* come il limite del rapporto di aree corrispondenti nella trasformazione T.

BANACH fece anche l'osservazione fondamentale che il concetto di variazione limitata, fissato da (4.1.1), può essere presentato nel modo seguente. Sia $N(x, y)$ il numero dei punti distinti in Q trasformati da T nel punto (x, y). T è a variazione limitata quando e solo quando

$$\text{(4.1.2)} \qquad N(x, y) \quad \text{è sommabile.}$$

Indagini successive provarono che questa proprietà porta ad una bellissima teoria, ma si trovò pure che questa teoria non ha propri campi di applicazione. Inoltre la variazione totale di una trasformazione T, come è definita in questa teoria, non è semicontinua inferiormente come funzionale di T. Ciò porta a una mancanza di analogia con il caso unidimensionale, il che disturba particolarmente in vista delle desiderate applicazioni nella teoria dell'area delle superficie e nel Calcolo delle Variazioni.

Nacque così il problema di stabilire nuovamente i concetti bidimensionali di variazione limitata e assoluta continuità, con applicazioni più estese e utili. L'idea base di partenza, a questo fine, era stata già indicata, sebbene in modo alquanto implicito, nelle fondamentali ricerche di GEÖCZE, su la teoria dell'area secondo LEBESGUE, pubblicate tra il 1905 e il 1917. In relazione a (4.1.1), l'idea base di GEÖCZE sta nel fissare che non si deve considerare la misura

$|T(r)|$ della intera immagine $T(r)$, ma piuttosto la misura di ciò che può definirsi la parte essenziale di tale immagine. Questa idea appare nel lavoro di GEÖCZE in una forma complicatissima, e sta di fatto che la prima difficoltà base consisteva nello stabilire un più accessibile concetto della *parte essenziale della immagine*. Questa difficoltà fu superata dal RADÓ nei suoi lavori [20] e [25], rispettivamente degli anni 1927 e 1928, dove egli introdusse il vocabolo *nucleo* nel modo seguente.

Un punto (x, y) appartiene al nucleo della immagine $T(r)$ di r, se esiste un $\delta = \delta(x, y) > 0$ tale che il punto (x, y) sia contenuto nella immagine di r per tutte le trasformazioni T^* che in Q differiscono da T meno di δ (in realtà, in [20] e [25] la definizione è data in forma più generale).

Manifestamente, il nucleo è un sottoinsieme della intera immagine. È quindi plausibile che, sostituendo, nelle definizioni di BANACH e VITALI per la variazione limitata e l'assoluta continuità, la misura $|T(r)|$ della intera immaggine di r con la misura del nucleo della immagine, si ottenessero dei concetti di più vasta portata. Mentre questa aspettazione era giustificata completamente dagli sviluppi successivi, ci vollero vari anni per superare un insieme di difficoltà di carattere essenzialmente topologico, per formulare i nuovi concetti di variazione limitata e assoluta continuità in modo appropriato, e per provare questi nuovi concetti a mezzo di applicazioni. Una parte sostanziale di questo lavoro fu condotto a termine dal RADÓ con la collaborazione di P. V. REICHELDERFER. Va poi notato che durante l'ultima guerra, quando i contatti scientifici fra gli Stati Uniti e molti paesi d'Europa erano troncati, in Italia L. CESARI sviluppò indipendentemente una teoria equivalente. Ecco ora qualche dettaglio su questo argomento nell'indirizzo, diciamo così, americano.

4.2. – Consideriamo una trasformazione continua

$$T:\quad x = x(u, v)\,,\quad y = y(u, v)\,;\qquad (u, v) \in Q:\quad 0 \leqslant u \leqslant 1,\quad 0 \leqslant v \leqslant 1\,,$$

dove per semplificare si è assunto come campo di definizione di T il quadrato unitario Q. Chiamiamo $K(r)$ il nucleo, o *nucleo centrale* (*kernel*), dell'immagine $T(r)$ di un rettangolo $r \subset Q$. Mentre la definizione di $K(r)$ è completamente elementare, l'uso di questo concetto richiede una più sottile analisi topologica. Nel suo lavoro [25] il RADÓ studia questo concetto di nucleo centrale in connessione con il concetto di *indice topologico* di un punto (x, y) rispetto a una curva continua chiusa nel piano cartesiano del punto (x, y). Si dimostra che se l'indice topologico di (x, y) rispetto all'immagine del contorno di r è diverso da zero, allora (x, y) giace nel nucleo centrale $K(r)$, e su questa base sono sviluppate varie applicazioni del nucleo centrale nella teoria dell'area delle superficie. I successivi sviluppi accrebbero sempre più l'importanza dell'indice topologico.

4.3. – In [47] il RADÓ stabilì su l'indice topologico un lemma che più tardi si trovò avere un particolare significato.

Sia C una curva di JORDAN nel piano del punto (u, v), e sia T: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ una trasformazione continua definita nella regione di JORDAN limitata da C. Sia (u_0, v_0) un punto interno alla regione limitata da C e sia (x_0, y_0) la sua immagine in T. Supponiamo che 1°) nessun altro punto (u, v) sia trasformato in (x_0, y_0), 2°) l'indice topologico k di (x_0, y_0) rispetto all'immagine di C sia differente da zero. Allora esiste un $\delta > 0$ tale che ogni punto (x, y) avente distanza δ da (x_0, y_0) ha almeno $|k|$ punti distinti corrispondenti mediante T nell'interno di C. In [47] il RADÓ osserva che la validità di questo lemma va ristretta al caso bidimensionale, per questo è da considerarsi come una proprietà specifica; d'altra parte nel caso bidimensionale il lemma si verificò veramente efficace.

In [47] il lemma è applicato per chiarire un punto base nella teoria iniziata da BANACH e VITALI (considerata più sopra). Ritornando alla trasformazione continua

$$T: \quad x = x(u, v)\,, \quad y = y(u, v)\;; \qquad (u, v) \in Q: \quad 0 \leqslant u \leqslant 1\,, \quad 0 \leqslant v \leqslant 1\,,$$

sia (u_0, v_0) un punto interno a Q, e sia (x_0, y_0) l'immagine di (u_0, v_0). Sia C una curva di JORDAN racchiudente (u_0, v_0) e sia i l'indice topologico di (x_0, y_0) rispetto alla immagine di C. Se un certo intorno di (u_0, v_0) è privo di punti trasformati di (x_0, y_0), si può allora dimostrare che i è indipendente dalla scelta di C, e per questo può essere indicato con $i(u_0, v_0)$. Per i punti (u, v) non soddisfacenti alla condizione ora stabilita, si ponga $i(u, v) = 0$. Questo *indice locale* $i(u, v)$ venne introdotto da SCHAUDER nel suo studio della teoria di BANACH e VITALI, stabilendo formule di trasformazione veramente generali per gli integrali doppi. Fra le ipotesi generali di SCHAUDER, affinchè l'indice locale $i(u, v)$ possa assumere ogni valore integrale e si possa assicurare la validità generale delle sue formule di trasformazione, vi è quella che $i(u, v)$ sia limitato. Il RADÓ in [47] prova che questa restrizione non è affatto necessaria.

4.4. – In [52] il RADÓ studia inoltre le conseguenti estensioni delle considerazioni della teoria di BANACH-VITALI, e dimostra che l'insieme di questi punti (u, v) dove è $|i(u, v)| > 1$ risulta numerabile. È questo un primo esempio dei cosiddetti *teoremi di numerabilità* (*countability theorems*) che più tardi ebbero un posto importante nella teoria, e che rappresentano anche quegli aspetti della teoria bidimensionale che non sono trasportabili a dimensioni più elevate.

In questo lavoro [52] il RADÓ sviluppa ulteriormente il concetto di nucleo centrale. Sia n un intero $\geqslant 0$. Il nucleo centrale K_n di ordine n, nel piano immagine (x, y), è definito come segue. Un punto (x_0, y_0) appartiene a K_n, relativamente alla trasformazione continua T, se esiste un $\delta > 0$ tale che (x_0, y_0) abbia almeno n punti distinti corrispondenti a mezzo di tutte le trasformazioni continue T^* che differiscono da T per meno di δ. Il nucleo centrale K_∞ di ordine infinito è definito come intersezione di tutti i nuclei centrali di ordine finito. Viene allora ad introdursi una funzione $k(x, y)$ di multiplicità essenziale, nel piano immagine (x, y), rispetto alla trasformazione continua T, ed ecco come. Se $(x, y) \in K_n - K_{n+1}$, allora è $k(x, y) = n$; e se $(x, y) \in K_\infty$, allora è $k(x, y) = +\infty$. In armonia con questi concetti il RADÓ in [52] ha fatto fare alla teoria di BANACH e VITALI diversi progressi e perfezionamenti. Il chiaro risultato di questi sforzi spesi per la teoria di BANACH-VITALI ha portato tuttavia alla conclusione, come sopra già si disse, che i concetti fondamentali di variazione limitata, assoluta continuità, e Jacobiano generalizzato, come vengono sviluppati in simile teoria, sono troppo ristretti dal punto di vista delle applicazioni.

Frattanto vennero fatte delle indagini allo scopo di costruire una teoria avente una portata più vasta. L'idea base fu quella di sostituire alla *funzione $N(x, y)$ di multiplicità ordinaria* (*crude multiplicity function*) del BANACH (sopra considerata) con la *funzione $k(x, y)$ di multiplicità essenziale* (*essential multiplicity function*) spiegata nelle righe precedenti. Ciò naturalmente richiese una serie di ulteriori modifiche e adattamenti dei concetti base. Il sistematico sviluppo di questo programma fu intrapreso dal RADÓ unitamente a P. V. REICHELDERFER. La dissertazione dottorale del 1939 di P. V. REICHELDERFER contiene vari fondamentali risultati riguardanti la funzione di multiplicità essenziale $k(x, y)$.

Nella Memoria [58], del RADÓ con la collaborazione di P. V. REICHELDERFER, i precedenti risultati vengono ulteriormente perfezionati, e in combinazione con i metodi metrici sono ottenuti risultati significativi nel programma generale. Questa Memoria [58] contiene un teorema fondamentale su il fatto che la funzione $k(x, y)$ di multiplicità essenziale può essere completamente espressa a mezzo dell'indice topologico. Su questa base, l'indice locale $i(u, v)$ del SCHAUDER poteva essere sostituito da un indice locale essenziale $i_e(u, v)$ di un tipo più perfezionato, e così viene dimostrato che è $|i_e(u, v)| \leqslant 1$ ad eccezione di un insieme numerabile. Fondando su questi concetti, venne introdotto un *Jacobiano generalizzato essenziale $J_e(u, v)$* e vennero dedotte formule di trasformazione per classi estremamente generali di trasformazioni continue T. Una di queste classi, indicata con K_2 in [58], fu successivamente chiamata la classe delle trasformazioni eAC (*essenzialmente assolutamente continue*). In questa stessa Memoria [58] sono dati dei *teoremi di chiusura* i quali assicurano che sotto certe condizioni generali il limite di una successione di trasformazioni eAC è ancora una trasformazione eAC. Inoltre sono ottenuti dei teoremi riguardanti i legami tra il Jacobiano generalizzato essenziale e l'ordinario Jacobiano, se questo ultimo esiste. Simili risultati includono, come casi specialissimi, una larga varietà di risultati precedenti su classi speciali di trasformazioni continue. Questo punto è esaminato in modo più dettagliato nel lavoro [65], fatto dal Radó con la collaborazione di R. G. Helsel, e in particolare si dimostra che trasformazioni studiate precedentemente da W. H. Young sono dominate dalla teoria generale delle trasformazioni eAC.

4.5. – Lo sviluppo sistematico della teoria è esposto dal Radó nel capitolo IV della sua importante opera [72] dal titolo *Length and Area*. La terminologia relativa ai concetti fondamentali è fissata come segue.

In analogia con la teoria di Banach e Vitali, una trasformazione continua T è chiamata eBV (*essentially of bounded variation*) se la funzione di multiplicità essenziale è sommabile. Per trasformazioni eAC (*essenzialmente assolutamente continue*) viene adottata la classe K_2 della Memoria [58], a meno che la definizione sia rifatta nella forma estremamente elegante dovuta a P. V. Reichelderfer. Per il *Jacobiano generalizzato essenziale* vengono poste e studiate varie definizioni equivalenti. L'analogia fra la ottenuta teoria bidimensionale e la teoria classica unidimensionale è sviluppata in modo dettagliato. Per esempio, si dimostra che una trasformazione eBV può spezzarsi in una eAC e una parte singolare, in analogia con la decomposizione del Lebesgue di una funzione di una sola variabile.

4.6. – La teoria precedente è stata ancora sviluppata e perfezionata dopo la comparsa nel 1948 dell'opera [72] del Radó. Così in [77] il Radó stesso generalizza un risultato di L. Giuliano per determinare la seguente caratterizzazione di trasformazioni T che sono eAC.

Sia E l'*insieme essenziale* nel dominio di definizione della trasformazione T, nel senso della Memoria [58]; vale a dire, E sia l'insieme somma di tutti i *modelli continui massimanti essenziali* (*essential maximal model continua*) per T, come risulta definito in [58]. Allora in [77] il Radó prova che una trasformazione T che sia eBV risulta eAC se e solo se i sottoinsiemi di misura nulla del suo insieme essenziale E sono rinchiudibili in un insieme di misura nulla. Come sopra si disse, il nostro L. Cesari nel periodo dell'ultima guerra si occupò di indagini parallele a quelle ora descritte. Mentre i suoi concetti fondamentali sono definiti in una guisa differente, studi successivi hanno rilevato la completa equivalenza delle due teorie. Per i concetti eBV ed eAC la identificazione con i concetti corrispondenti del CESARI venne provata dal RADÓ in [71]. Il metodo usato in [71] è basato su lo studio simultaneo di quattro funzioni di multiplicità, ivi indicate rispettivamente con ψ, ψ^*, Ψ, Ψ^*, associate ad una trasformazione continua T. Queste includono la *funzione di multiplicità essenziale* sopra descritta e la *funzione caratteristica* usata dal CESARI nel suo lavoro. In [71] il RADÓ dimostra che tutte queste funzioni di multiplicità coincidono ad eccezione per un insieme misurabile. La equivalenza dei concetti eBV ed eAC con i corrispondenti concetti del CESARI segue allora senza difficoltà. La identificazione del Jacobiano generalizzato essenziale con il corrispondente concetto nella teoria del CESARI venne compiuta recentemente dal CECCONI. Come risultato di queste identificazioni le due teorie parallele si fondano in una sola, la cui caratteristica fondamentale è la sua notevole e profonda analogia con la teoria classica unidimensionale di variazione limitata e di assoluta continuità.

§ 5. – Teoria dell'area delle superficie.

5.1. – Su questo argomento il RADÓ ha pubblicato parecchie importanti Note e Memorie ed inoltre l'opera notevole [72] dal titolo *Length and Area*. Indicherò ora succintamente i punti fondamentali di questi studi del RADÓ, da lui iniziati nel 1926 con la Nota [15] nei «Comptes Rendus de l'Acad. Sci. Paris».

Il lato più rimarchevole della letteratura su l'area delle superficie è dato dal numero stragrande e sempre crescente delle definizioni e metodi che furono proposti, durante gli ultimi cinquanta anni, per lo studio di questo concetto base nella Geometria e nella Analisi. Molti di questi metodi non vanno al di là della pura definizione. E ancora, molti di questi metodi sono dovuti a matematici di alto valore, e risulta pure manifesto che in definitiva tutte queste svariate definizioni proposte per l'area di una superficie sono basate su idee geometriche intuitive fondamentali, di cui si dovrebbe tenere conto nella costruzione di una teoria comprensiva. D'altra parte per mezzo di esempi espliciti abbastanza semplici si può dimostrare che se queste varie idee geometriche intuitive fondamentali sono espresse mediante definizioni formali precise in una guisa rigorosa, allora vengono a presentarsi conflitti seri su ciò che può ritenersi il «caso elementare». Alla frase *caso elementare* (*elementary range*) può assegnarsi, in base alla esperienza dei passati cinquanta anni, un significato del tutto preciso: Se la superficie S è data a mezzo di una rappresentazione parametrica

$$S: \qquad x = x(u, v)\,, \quad y = y(u, v)\,, \quad z = z(u, v)\,,$$

dove per semplicità supponiamo che il campo dei parametri coincida con il quadrato unitario Q: $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant 1$, e se le funzioni coordinate $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ soddisfano a una condizione di Lipschitz, allora l'area di S *deve* essere data all'integrale classico. Su questo punto vi è concordanza generale, anche se i vari procedimenti proposti si scostano grandemente dal caso lipschitziano.

Le ricerche del Radó, da esaminare ora, sono motivate dalla convinzione che la diversità, come pure il carattere generalmente frammentario, dei vari metodi proposti per la teoria dell'area delle superficie, sia dovuto a certe difficoltà fondamentali inerenti al concetto di area delle superficie, e che la vera natura di queste difficoltà fondamentali può essere compresa soltanto se qualche metodo particolarmente rilevante è sviluppato al punto da potere essere giustamente considerato come una teoria comprensiva. Per soddisfare al programma delineato da queste osservazioni, il concetto di area di una superficie viene scelto dal Radó nel modo come fu definito dal Lebesgue. Per quanto riguarda l'implicito concetto di superficie, egli ha adottato le idee del Fréchet, quantunque la espressione finale del concetto di una F-superficie del tipo della bicella (come viene usato, per esempio, nel libro [72]) non può concordare del tutto con i pensieri originali del Fréchet. Per le definizioni precise vedasi il libro [72].

5.2. – Supponiamo, dunque, noto soltanto che una F-superficie S del tipo della bicella, o brevemente una *superficie*, possa essere data con una rappresentazione:

$$S:\quad x = x(u, v),\quad y = y(u, v),\quad z = z(u, v);\quad (u, v) \in Q:\ 0 \leqslant u \leqslant 1,\ \ 0 \leqslant v \leqslant 1,$$

dove le funzioni coordinate sono supposte soltanto continue. Inversamente, ciascuna di tali rappresentazioni determina una superficie S, e due simili rappresentazioni determinano la stessa superficie S se e solo se la loro distanza di Fréchet è uguale a zero. Tra queste superficie le *poliedriche* P sono definite in modo plausibile, e in modo egualmente plausibile è definita l'area elementare $E(P)$ di una poliedrica P.

La classe delle superficie S è cambiata in uno spazio metrico con la introduzione della distanza di Fréchet $\mathrm{d}(S', S'')$ di due superficie S', S''. L'area di Lebesgue $A(S)$ è allora definita dalla eguaglianza

$$A(S) = \underline{\lim}\, \liminf E(P_n)\ ,$$

dove il minimo limite è preso riguardo a tutte le successioni di poliedriche P_n tali che $\mathrm{d}(S, P_n) \to 0$. Una immediata conseguenza di questa definizione è che $A(S)$ è un funzionale semicontinuo inferiormente. Vale a dire, $\mathrm{d}(S, S_n) \to 0$ implica che $A(S) \leqslant \liminf A(S_n)$. Questa *proprietà di semicontinuità inferiore* è la ragione per la quale molti cultori del Calcolo delle Variazioni adottarono la definizione di area superficiale del LEBESGUE; infatti, il principio di semicontinuità è una delle qualità basilari del metodo diretto nel Calcolo delle Variazioni.

Un primo problema base, in connessione con l'area $A(S)$ del LEBESGUE, è il problema detto dal RADÓ del *controllo effettivo*: precisamente, come si può determinare, per una data superficie S, una successione di poliedriche $P_n \to S$ tali che l'area elementare di P_n converga al minimo valore possibile $A(S)$? Come ci disse lo stesso LEBESGUE, questo problema fu sollevato dal JORDAN appena vide il manoscritto della famosa dissertazione del LEBESGUE. Di più, questo problema del *controllo effettivo* di $A(S)$ fu il maggior problema affrontato nelle profonde ricerche del GEÖCZE (1905-1917).

5.3. – I primi importanti progressi si compirono nel caso non parametrico, nel quale una superficie S è data nella forma

$$(a) \qquad S: \quad z = f(x, y) , \qquad (x, y) \in Q: \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 , \quad 0 \leqslant y \leqslant 1 .$$

Per questo caso il GEÖCZE propose il seguente procedimento. Sia R: $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$ un rettangolo in Q. Poniamo

$$\alpha_R = \int_a^b | f(x, d) - f(x, c) | \, dx ,$$

$$\beta_R = \int_c^d | f(b, y) - f(a, y) | \, dy ,$$

$$\gamma_R = (b - a)(d - c) ,$$

$$g_R = (\alpha_R^2 + \beta_R^2 + \gamma_R^2)^{1/2} .$$

Sia D una generica notazione per una suddivisione di Q in rettangoli R e sia $\| D \|$ la norma di D (vale a dire, il massimo diametro dei rettangoli che cadono in Q). Infine, poniamo $G(D) = \sum g_R$, $R \in D$. In vari casi specialmente importanti, il GEÖCZE prova che $G(D) \to A(S)$ se $\| D \| \to 0$, e ha creduto che questo sia vero in generale quando si sa solo che $f(x, y)$ è continua. Questa opinione è stata provata dal RADÓ in [19], e subito dopo il SAKS notò che il risultato stabilisce che $A(S)$ è semplicemente l'integrale di BURKILL della funzione di rettangolo g_R sopra definita. Così, nel caso non parametrico l'area $A(S)$ del LEBESGUE divenne un risultato acquisito in Analisi. SAKS s'occupò anche di fare altre importanti applicazioni di questo fatto, e in particolare ha ottenuto dimostrazioni veramente semplici di certi risultati fondamentali del TONELLI. Il TONELLI introdusse i concetti di variazione limitata e assoluta continuità per funzioni $f(x, y)$ di due variabili, concetti che saranno richiamati rispettivamente con BVT (« bounded variation » nel senso del TONELLI) e ACT (assolutamente continua nel senso del TONELLI), e provò i brillanti teoremi seguenti:

L'area $A(S)$ della superficie S, data nella forma (a) sopra scritta, è finita se e solo se $f(x, y)$ è BVT. Se ciò accade, l'integrale classico dell'area ha allora significato, le integrazioni essendo intese nel senso del LEBESGUE, ed esso risulta $\leqslant A(S)$. Il segno di eguaglianza vale se e solo se $f(x, y)$ è ACT.

Questi teoremi sono completamente analoghi ai corrispondenti ben noti teoremi su la lunghezza degli archi. Inoltre, i teoremi del TONELLI risolvono il problema del « controllo effettivo » di $A(S)$ per il caso ACT. Per il caso generale il problema venne risoluto dal RADÓ in [19] con la dimostrazione della supposizione del GEÖCZE circa le *somme di Gecöze* $G(D)$.

Insieme alla risoluzione del problema di PLATEAU nel caso non parametrico fatta da HAAR (considerata sopra), intendendo l'area nel senso del LEBESGUE, la teoria del *caso non parametrico* apparve essenzialmente completa verso il 1930.

5.4. – Per superficie in forma parametrica generale

$$(b) \qquad S: \quad x = x(u, v)\,, \quad y = y(u, v)\,, \quad z = z(u, v)$$

il completamento della teoria richiese una grande quantità di sforzi ulteriori. Tuttavia, la meta generale da raggiungere era manifesta: il compito consisteva nello sviluppare i concetti di variazione limitata e assoluta continuità tali che in base a questi concetti si potessero stabilire teoremi, per il caso parametrico generale, analoghi ai classici teoremi su la lunghezza d'arco. Infatti, questo scopo generale servì come motivo base per lo sviluppo e lo studio dei concetti eBV, eAC, e di Jacobiano generalizzato essenziale, sopra considerati.

5.5. – Il RADÓ nella sua Nota [25], apparsa nel 1928, fissa una questione preliminare, cioè la questione della *consistenza nel caso lipschitziano*. Egli dimostra che se la rappresentazione parametrica (b) è lipschitziana, allora l'area di LEBESGUE $A(S)$ è data dalla classica formula integrale; e con ciò egli dà forma accessibile ad una precedente dimostrazione del GEÖCZE. Il concetto di *nucleo centrale* (sopra visto) viene per primo introdotto e studiato in questo lavoro.

5.6. – Parecchi altri lavori sono relativi a questioni del carattere seguente.

Sotto varie speciali ipotesi riguardanti la rappresentazione parametrica (b), furono stabiliti dei teoremi con lo scopo che l'area di S, in conformità con qualche definizione particolare di area, fosse eguale al classico integrale dell'area. In particolare, W. H. YOUNG ottenne un insieme di teoremi di tale tipo, e, indipendentemente, MCSHANE e MORREY trovarono dopo che nella maggior parte dei casi considerati da W. H. YOUNG il risultato poteva essere esteso all'area $A(S)$ nel senso del LEBESGUE. Una parte delle restrizioni considerate, e in realtà una parte sostanziale, fu necessaria nell'intento di provare che sotto certe condizioni il classico integrale dell'area risulta $\leqslant A(S)$.

In [51] il RADÓ dimostra, su la base dei teoremi stabiliti nel lavoro [48], che simile diseguaglianza sussiste automaticamente ogni volta che il classico integrale dell'area è senza significato. Come conseguenza, precedenti risultati poterono essere assai generalizzati; tuttavia questi risultati generalizzati furono ancora insufficienti in una direzione essenziale. Infatti, questi risultati furono espressi a mezzo del classico comune Jacobiano e a mezzo dei concetti BVT e ACT, applicati singolarmente alle funzioni coordinate che si presentano nella rappresentazione (*b*). La forma non soddisfacente dei risultati ottenuti in base a questi concetti riposa sul fatto che in ciascun caso le ipotesi furono sufficienti, però manifestamente non necessarie. Casi particolarmente importanti di questo tipo furono studiati dal RADÓ in [46].

5.7. – In quel tempo si iniziò il lavoro di ottenere risultati di carattere definitivo in base ai concetti eBV, eAC sopra considerati. Però, una lacuna estremamente seria differì la conclusione di questi studi per diversi anni. Questa lacuna nacque in relazione a certe difficoltà topologiche, come segue.

Ritornando alla rappresentazione parametrica (*b*) della superficie S, ogni punto (x, y, z) di S dà origine a un certo insieme di punti trasformati (u, v), e questo insieme a sua volta si decompone in componenti che possono essere chiamati *maximal model continua*. In questo modo la regione parametrica Q è scissa in un insieme di « maximal model continua », il cui aggregato è chiamato al presente una collezione di continui semicontinua superiormente. Tali collezioni vennero considerate dai topologisti per giungere a un certo numero di problemi importanti. Si trovò estremamente utile l'interpretare ciascun continuo della collezione come un punto di un nuovo spazio, il cosiddetto *medio-spazio* (*middle-space*) corrispondente alla rappresentazione (*b*) per la superficie S. Si trovò che la struttura di questo medio-spazio rappresenta un fattore decisivo nello studio dell'area di LEBESGUE $A(S)$. In particolare, il KERÉJÁKRTÓ nel 1927 cominciò uno studio di questo cosiddetto *medio-spazio topologico*, precisamente con lo scopo di farne applicazione alla teoria dell'area delle superficie. Il lavoro del KERÉKJÁRTÓ in ungherese, come pure un successivo e indipendente lavoro altrove, vennero ad eliminare delle complicazioni. Si comprese che i risultati di questi lavori avevano importanti legami con la teoria dei concetti eBV ed eAC, ma le applicazioni vennero ritardate per vari anni a motivo di vari punti oscuri nella teoria topologica.

Nel 1940 J. W. T. YOUNGS scoperse delle discrepanze fondamentali nella teoria topologica, e procedette ad una revisione fondamentale di tutta la situazione. Il completamento di questa impresa, che portò a risultati profondi ed eleganti, occupò circa dieci anni. Frattanto, si trovò che la penetrazione assolutamente necessaria nella topologia combinatoria poteva ottenersi in un modo più ristretto e anche più economico, fino a che non si fecero applicazioni dell'area secondo LEBESGUE. Lo strumento topologico necessario venne sviluppato dal RADÓ nei poderosi lavori [63], [69] e vari altri perfezionamenti furono più tardi sviluppati in [79] con la collaborazione di E. J. MIKLE. Su questa base, al RADÓ fu possibile incorporare nel suo libro [72] un insieme di teoremi, aventi carattere definitivo, relativi all'area $A(S)$ del LEBESGUE (la Nota [68] del RADÓ contiene un annuncio preliminare di ciò). I principali teoremi si enunciano come segue.

Data la superficie S come in (*b*), siano T_i, $i = 1, 2, 3$, le trasformazioni continue, nei tre piani coordinati, ottenute omettendo ciascuna volta una delle tre funzioni coordinate.

Teorema. Supponiamo $A(S) < +\infty$. Allora le tre trasformazioni T_1, T_2, T_3 sono eBV, i corrispondenti Jacobiani generalizzati essenziali esistono quasi ovunque in Q e ivi sono sommabili. Inoltre, se I_e indica l'integrale dell'area scritto mediante questi Jacobiani generalizzati, risulta $I_e \leqslant A(S)$. Il segno di eguaglianza vale se e solo se le trasformazioni T_1, T_2, T_3 sono eAC.

Se accade che i Jacobiani ordinari esistano quasi ovunque in Q (ciò che in generale non avverrà), allora il teorema resta vero sostituendo gli ordinari Jacobiani ai Jacobiani generalizzati.

Per formulare l'altro teorema di [68], sono necessarie le seguenti definizioni relative alla rappresentazione

$$S: \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v); \quad (u, v) \in Q: \quad 0 \leqslant u \leqslant 1, \quad 0 \leqslant v \leqslant 1.$$

Consideriamo ancora le tre trasformazioni continue T_1, T_2, T_3 (le proiezioni di S su i tre piani coordinati). Detto D un qualunque dominio (insieme connesso aperto) nell'interno di Q, sia $k_i(x, y, D)$ la funzione di multiplicità essenziale relativa a T_i e D. Se $k_i(x, y, D)$ è sommabile, definiamo con $g_i(D)$ il suo integrale rispetto a x, y; altrimenti poniamo $g_i(D) = +\infty$. Indichiamo poi con $g(D)$ la radice quadrata di $g_1(D)^2 + g_2(D)^2 + g_3(D)^2$. Infine, diciamo *area inferiore* $a(S)$ della superficie S il minimo limite delle somme $g(D_1) + g(D_2) + \ldots$, dove il minimo limite è preso relativamente a tutti i sistemi, finiti o infiniti, di domini distinti D_1, D_2,... nell'interno di Q. L'area inferiore $a(S)$ è basata, essenzialmente, su idee originali di GEÖCZE, ed è la più larga fra le varie altre aree inferiori che furono chiamate *area di Geöcze*. Il confronto dell'area inferiore $a(S)$ con l'area $A(S)$ del LEBESGUE conduce a uno dei più ardui e difficili problemi della teoria. Dal punto di vista intuitivo $A(S)$ rappresenta semplicemente un limite superiore per l'area, e $a(S)$ rappresenta semplicemente un limite inferiore, e la eguaglianza di $A(S)$ e $a(S)$ può essere interpretata nel senso che l'area di S sia stata definitivamente fissata, in certo qual modo, da una sezione di DEDEKIND. La importanza e il significato del problema di provare che $a(S) = A(S)$ venne già rilevata dal RADÓ in [27]; lavoro presentato al Congresso internazionale dei Matematici a Bologna, nel 1928. Parziali risultati furono ottenuti successivamente da vari autori. Nel lavoro [68] il RADÓ ci dà il seguente risultato.

Teorema. È sempre $a(S) \leqslant A(S)$. Se è $A(S) < +\infty$ oppure $a(S) = 0$, risulta $a(S) = A(S)$.

Le prove esplicite dei risultati contenuti in [68] sono incluse nel libro [72]. Dopo che, all'inizio del 1946, fu completato il manoscritto di questo libro, negli Stati Uniti si venne a conoscenza della brillante opera del CESARI, svolta in Italia durante gli anni di guerra. Come sopra già è detto, l'opera del CESARI è strettamente parallela a quella del RADÓ e della sua Scuola.

Fra i più brillanti risultati del CESARI, su la teoria dell'area delle superficie, vi è un legame assai importante che rimase in sospeso nel lavoro [68] del RADÓ. Precisamente CESARI dimostrò che l'eguaglianza $a(S) = A(S)$ sussiste sempre, anche se $A(S) = +\infty$. Come diretta conseguenza di ciò, ne seguì l'ulteriore fatto fondamentale che $A(S)$ è finita se e solo se le tre trasformazioni T_1, T_2, T_3 sono eBV.

Dal punto di vista della analogia fondamentale con la teoria classica della lunghezza d'arco, la teoria dell'area secondo LEBESGUE appare ora essenzialmente completa.

5.8. – In vista delle difficili comunicazioni di alcuni primi anni del dopoguerra, non fa meraviglia che vari altri fatti fondamentali nella teoria dell'area delle superficie venissero scoperti indipendentemente negli Stati Uniti e in Italia.

Così nel lavoro [80] il RADÓ si occupa di un teorema fondamentale che fu trovato indipendentemente anche dal CESARI. Sia data, come sopra, una superficie S nella forma parametrica generale, e siano S^i, $i = 1, 2, 3$, le *superficie piatte* (*flat surfaces*) ottenute proiettando S ortogonalmente su i tre piani coordinati. Sia inoltre S_n una successione di superficie; siano S_n^i, $i = 1, 2, 3$, le corrispondenti superficie piatte; e supponiamo che S_n converga ad S *in area* [vale a dire, $\mathrm{d}(S, S_n) \to 0$ e $A(S_n) \to A(S)$]. Allora il principale teorema del lavoro [80] stabilisce che $A(S_n^i) \to A(S^i)$, $i = 1, 2, 3$. Questa è una generalizzazione conclusiva di una lunga serie di risultati, dovuti a vari autori, su la *convergenza in lunghezza* (*convergence in legth*), e la *convergenza in area* (*convergence in area*). In particolare, i lavori del RADÓ [57] e [61] (in collabo razione con P. V. REICHELDERFER) e [76] (in collaborazione con MIRIAM C. AYER) si riferiscono a simili speciali studi.

Riprendiamo ancora la superficie S data, come sopra, nella rappresentazione parametrica generale, e supponiamo $A(S) < +\infty$. La data rappresentazione di S dà allora origine a tre Jacobiani generalizzati essenziali, relativi ai tre piani coordinati, esistenti quasi ovunque nel quadrato parametrico Q. Supponiamo ora che venga introdotto un nuovo sistema di coordinate cartesiane. Nasce allora la questione fondamentale se i nuovi Jacobiani generalizzati sono legati ai vecchi ciascuno mediante le classiche formule di trasformazione che valgono per i Jacobiani ordinari. Usando il teorema su la convergenza in area, stabilito in [80], P. V. REICHELDERFER mostrò che la legge di trasformazione vale quasi ovunque nel quadrato parametrico Q (anche questo risultato fu ottenuto indipendentemente dal CESARI). L'insieme eccezionale di misura nulla dipende, naturalmente, dalla scelta del nuovo sistema di coordinate, e così nasce la questione fondamentale se esiste in Q un insieme *fisso* di misura nulla, il quale contenga tutti gli insiemi eccezionali di misura nulla corrispondenti a tutte le scelte possibili del nuovo sistema di coordinate. Questioni di questo tipo « *uniformly almost everywhere* » sono studiate per esteso dal RADÓ in [83], con la collaborazione di P. V. REICHELDERFER. Le conclusioni possono chiarire vari punti oscuri della teoria dell'area delle superficie.

5.9. – Diversi lavori del RADÓ hanno per oggetto generale di determinare la validità di varie richieste intuitive, espressamente formulate, nella teoria dell'area secondo LEBESGUE.

Sotto un certo aspetto, gli studi e i risultati su l'area inferiore $a(S)$, sopra considerata, appartengono a questa categoria. In realtà, l'idea intuitiva che si intravvede nella definizione di $a(S)$ è basata su l'aspettativa che l'area di una piccola porzione di una superficie S sia approssimativamente eguale alla radice quadrata della somma dei quadrati delle aree delle sue proiezioni su i piani coordinati.

In [74] il cosiddetto *concetto geometrico-integrale di area delle superficie* è esteso dal RADÓ all'aera nel senso del LEBESGUE, nel modo seguente. Data la superficie S mediante la rappresentazione parametrica generale sopra scritta, risulta definito, per ogni linea g nello spazio del punto (x, y, z), un *numero di intersezioni essenziali* $N_e(g, S)$ fra g e S. In [74] il RADÓ (con la collaborazione di E. J. MICKLE) dimostra allora che, introducendo una misura μ di HAAR giustamente normalizzata, nello spazio G di tutte le linee orientate g dello spazio del punto (x, y, z), l'area $A(S)$ nel senso del LEBESGUE della superficie S

può essere espressa con la formula

$$A(S) = \int_G N_e(g, S)\, d\mu_g ,$$

con la condizione che l'integrale del secondo membro sia eguale a $+\infty$ se $N_e(g, S)$ non risulta sommabile.

In [75] il RADÓ (con la collaborazione di R. G. HELSEL) fa uno studio simile per il concetto di CAUCHY di area delle superficie, con il risultato seguente. Diciamo U la sfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Per ciascun punto P di U, chiamiamo $a(P)$ l'integrale della funzione di multiplicità essenziale corrispondente alla proiezione ortogonale della superficie S su il piano per l'origine e perpendicolare al raggio che passa per P. Si trova allora che l'area $A(S)$ di LEBESGUE è data dalla formula

$$A(S) = \frac{1}{2\pi} \int_U a(P)\, d\sigma_P ,$$

dove $d\sigma_P$ è l'elemento d'area di U, e l'integrale è uguale a $+\infty$ se $a(P)$ non risulta sommabile.

5.10. – Il RADÓ dedicò parecchi lavori al celebre *problema di Geöcze.*

Nel definire l'area $A(S)$ di LEBESGUE *non* si richiede che le poliedriche usate siano *inscritte* in S. Se si fa questa richiesta, si ottiene un'area che, con il RADÓ, indicheremo con $A^*(S)$. Manifestamente risulta $A^*(S) \geqslant A(S)$, e il problema di GEÖCZE consiste nel decidere se vale il segno di eguaglianza. Il GEÖCZE ottenne una risposta affermativa in vari casi speciali.

In [64] il RADÓ si propose di determinare il risultato più generale che possa ottenersi applicando i più moderni mezzi della Analisi nella direzione originale di pensiero del GEÖCZE, nel caso non parametrico [caso, cioè, di superficie data nella forma $z = f(x, y)$]. Il risultato ottenuto è molto più generale del risultato migliore del GEÖCZE, ma esso è ancora lontano dal caso generale, e il metodo seguito è assai complicato.

Subito dopo H. D. HUSKEY ottenne un risultato molto più generale con un metodo sorprendentemente semplice, usando certi procedimenti analitici sviluppati da L. C. YOUNG in relazione a una certa questione su la teoria dell'area delle superficie. La Memoria [61] del RADÓ, con la collaborazione di P. V. REICHELDERFER, è dedicata ad una analisi del metodo di HUSKEY. Si trova che l'essenza del metodo sta nel fatto che può stabilirsi, con mezzi elementari, un certo raffronto statistico per le aree delle poliedriche inscritte.

La soluzione finale del problema di GEÖCZE, *nel caso non parametrico*, venne ultimamente ottenuta da MAMBRIANI (1947) e in modo del tutto generale da MULHOLLAND (1950) con un metodo che è un brillante perfezionamento del metodo di HUSKEY (come è interpretato in [61]). In [78] il RADÓ mostra che il procedimento analitico alquanto complesso seguito da MAMBRIANI può venire semplificato sostanzialmente con l'uso dei metodi statistici sviluppati in [61].

Queste ricerche portarono il RADÓ anche a una distinzione fra una forma *forte* e una forma *debole* del problema di GEÖCZE. *La forma debole del problema di Geöcze nel caso parametrico generale* venne risoluta recentemente dal CESARI.

5.11. – È stato menzionato sopra che la prima soluzione generale del problema di PLATEAU fu ottenuta usufruendo del concetto di area secondo LEBESGUE. Un altro classico problema, il problema isoperimetrico per le superficie, fu pure risoluto usufruendo di questo concetto di area.

Sia U la sfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Una *F-superficie del tipo della bisfera* è data da una rappresentazione (continua)

$$S: \qquad x = x(P)\,, \quad y = y(P)\,, \quad z = z(P)\,; \qquad P \in U\,.$$

La definizione dell'area $A(S)$ di LEBESGUE si estende a questo caso in un modo ovvio. Il problema isoperimetrico richiede di mostrare che $V(S)^2 \leqslant \frac{1}{36\pi} A(S)^3$, dove $V(S)$ è il volume del solido racchiuso da S. Chiamiamo ora (S) l'insieme dei punti (x, y, z) corrispondenti ai vari punti di U in virtù della data rappresentazione di S (naturalmente, la F-superficie S e l'insieme (S) di punti sono enti geometricamente del tutto differenti). Esempi relativamente semplici, dovuti a GEÖCZE, NÖBELING e BESICOVITCH, provano che l'insieme (S) di punti può avere una misura tridimensionale, positiva, arbitrariamente grande, mentre nello stesso tempo l'area $A(S)$ di LEBESGUE può essere arbitrariamente piccola. Ne nasce la necessità di una definizione precisa del volume $V(S)$ racchiuso, in modo che sussista la diseguaglianza isoperimetrica. In [70] il RADÓ ottiene il risultato seguente. Indichiamo con $i(x, y, z)$ l'indice topologico del punto (x, y, z) relativamente alla data superficie S. Definiamo $V(S)$ come l'integrale di $|\, i(x, y, z)\,|$ se $i(x, y, z)$ è sommabile, e altrimenti poniamo $V(S) = +\infty$. Allora in [70] il RADÓ dimostra che la diseguaglianza isoperimetrica vale per questo $V(S)$ e l'area $A(S)$ di LEBESGUE. Questo risultato è stato poi ulteriormente perfezionato da J. W. T. YOUNGS e da R. G. HELSEL.

§ 6. – Miscellanea.

In ciò che precede sono esaminati quei lavori del RADÓ che trattano argomenti generali e concatenati di ricerca. Diamo ora uno sguardo ad alcuni lavori, del nostro Autore, che si occupano di questioni isolate.

I lavori [7] e [9] si rivolgono a questioni sollevate, nella teoria delle funzioni di una variabile complessa, da FEJÉR e BLASCHKE rispettivamente.

La Nota [24] pone un problema, apparentemente semplice e tuttavia ancora insoluto, relativo al teorema di copertura di VITALI.

In [45] si fa uno studio della teoria di trasversalità nel Calcolo delle Variazioni.

Il lavoro [54] (in collaborazione con P. V. REICHELDERFER) e il lavoro [55] (in collaborazione con J. W. T. YOUNGS) si rivolgono a questioni relative alla teoria degli elementi ciclici negli spazi di PEANO.

Nella Nota [66] il RADÓ studia delle funzioni di rettangolo relative ad alcuni lavori fatti da L. C. YOUNG nella teoria dell'area delle superficie.

In [73] (lavoro in collaborazione con M. HALL) si studiano certe rappresentazioni tipiche di sottogruppi di un gruppo aperto.

Il lavoro [81] (in collaborazione con E. J. MICKLE) contiene una generalizzazione di un risultato notevole di CESARI su le funzioni semicontinue superiormente.

I lavori [37], [60], [62] contengono esposizioni di argomenti che vennero richiesti al RADÓ, e in un certo senso il libro [72] appartiene a questa categoria. In realtà, essi sono delle elaborazioni di quattro conferenze tenute alla « American Mathematical Society » nel suo Convegno del 1945 a Chicago.

§ 7. – Ricerca in corso.

Il RADÓ continua ad occuparsi del programma di incorporare nella teoria dell'area secondo LEBESGUE varie idee intuitive che vennero usate in altre questioni. La direzione principale di lavoro riguarda, comunque, lo studio e l'applicazione dei concetti di variazione limitata essenziale, di continuità assoluta essenziale, e di Jacobiano generalizzato essenziale (trattati sopra per il caso di due dimensioni) nel caso generale n-dimensionale.

La Nota [82] (in collaborazione con P. V. REICHELDERFER) è l'annuncio di un primo insieme di risultati in tale senso, riguardanti le formule di trasformazione degli integrali multipli.

§ 8. – Elenco delle pubblicazioni di Tibor Radó.

(fino all'aprile 1950) (*).

[1] *Su le radici delle equazioni algebriche* (in Ungherese). Math. Phys. Lapok **28**,32-37 (1921).

[2] *Zur Theorie der mehrdeutigen konformen Abbildungen.* Acta Univ. Szeged. Sect. Sci. Math. **1**, 55-64 (1922).

[3] *Bemerkung zu einem Unitätssatze der konformen Abbildung.* Acta Univ. Szeged. Sect. Sci. Math. **1**, 101-103 (1923).

[4] *Sur la représentation conforme de domaines variables.* Acta Univ. Szeged. Sect. Sci. Math. **1**, 180-186 (1923).

[5] *Über die Fundamentalabbildung schlichter Gebiete.* Acta Univ. Szeged. Sect. Sci. Math. **1**, 240-251 (1923).

[6] *Bemerkung zur Arbeit des Herrn Bieberbach etc.*. Math. Ann. **90**, 30-37 (1923).

[7] *Bemerkung zu einem Blaschkeschen Konvergenzsatze* (in collaborazione con K. Löwner). Jber. Deutsch. Math. Verein. **32**, 198-200 (1924).

[8] *Über die konformen Abbildungen schlichter Gebiete.* Acta Univ. Szeged. Sect. Sci. Math. **2**, 47-60 (1924).

[9] *Ein Beispiel zur Theorie der konformen Abbildung.* Tôhoku Math. J. **24**, 164-167 (1924).

[10] *Über eine nicht fortsetzbare Riemannsche Mannigfaltigkeit.* Math. Z. **20**, 1-6 (1924).

[11] *Über den Begriff der Riemannschen Fläche.* Acta Univ. Szeged. Sect. Sci. Math. **2** 101-121 (1925).

[12] *Über die erste Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$* (in collaborazione con F. Riesz). Math. Z. **22**, 42-44 (1925).

[13] *Über den analytischen Charakter der Minimalflächen.* Math. Z. **24**, 321-327 (1925).

[14] *Bemerkung über die Differentialgleichungen zweidimensionaler Variationsprobleme.* Acta Univ. Szeged. Sect. Sci. Math. **2**, 147-156 (1925).

[15] *Sur le calcul de l'aire des surfaces courbes.* C. R. Acad. Sci. Paris **183**, 588-590 (1926).

[16] *Bemerkungen zur Arbeit von Herrn Ch. Müntz etc.*. Math. Ann. **96**, 587-596 (1926).

(*) Le Memorie e le Note hanno i titoli in *corsivo*, i Trattati hanno i titoli in **neretto**.

[17] *Das Hilbertsche Problem über den analytischen Charakter der Lösungen der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.* Math. Z. **25**, 514-589 (1926).

[18] *Geometrische Betrachtungen über zweidimensionale reguläre Variationsprobleme.* Acta Univ. Szeged. Sect. Sci. Math. **2**, 228-253 (1926).

[19] *Sur le calcul de l'aire des surfaces courbes.* Fundamenta Math. **10**, 197-210 (1927).

[20] *Sur l'aire des surfaces courbes.* Acta Univ. Szeged. Sect. Sci. Math. **3**, 131-169 (1927).

[21] *Sur l'aire des surfaces courbes.* C. R. Acad. Sci. Paris **184**, 63-65 (1927).

[22] *Bemerkung über das Doppelintegral* $\iint (1 + p^2 + q^2)^{1/2}\,dx\,dy$. Math. Z. **26**, 408-416 (1927).

[23] *Zu einem Satze von S. Bernstein über Minimalflächen im Grossen.* Math. Z. **26**, 559-565 (1927).

[24] *Sur un problème relatif à un théorème de Vitali.* Fundamenta Math. **11**, 228-229 (1928).

[25] *Über das Flächenmass rektifizierbarer Flächen.* Math. Ann. **100**, 228-229 (1928).

[26] *Su l'area delle superficie* (in Ungherese). Math. Term. Tud. Ért. **45**, 225-244 (1928).

[27] *Sur l'aire des surfaces continues.* Atti Congresso Internaz. Mat. a Bologna nel 1928, vol. 6, pp. 355-360.

[28] *Remarque sur les fonctions subharmoniques.* C. R. Acad. Sci. Paris **186**, 346-348 (1928).

[29] *Rappresentazione conforme delle regioni convesse* (in Ungherese). Math. Phys. Lapok. **35**, 1-9 (1929).

[30] *Über zweidimensionale reguläre Variationsprobleme.* Math. Ann. **101**, 620-632 (1929).

[31] *Bemerkung über die konformen Abbildungen konvexer Gebiete.* Math. Ann. **102**, 428-429 (1929).

[32] *The problem of the least area and the problem of Plateau.* Math. Z. **32**, 763-796 (1930).

[33] *Some remarks on the problem of Plateau.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **16**, 242-248 (1930).

[34] *On Plateau's problem.* Ann. of Math. **31**, 457-469 (1930).

[35] *On the functional of Mr. Douglas.* Ann. of Math. **32**, 785-803 (1931).

[36] *Contributions to the theory of minimal surfaces.* Acta Univ. Szeged. Sect. Sci. Math. **6**, 1-20 (1932).

[37] *On mathematical life in Hungary.* Amer. Math. Monthly **39**, 85-90 (1932).

[38] *Su l'area delle superficie* (in Polacco). Mathesis Polska **7**, 1-18 (1932).

[39] *Subharmonic functions and minimal surfaces* (in collaborazione con E. F. Beckenbach). Trans. Amer. Math. Soc. **35**, 648-661 (1933).

[40] *Subharmonic functions and surfaces of negative curvature* (in collaborazione con E. J. Beckenbach). Trans. Amer. Math. Soc. **35**, 662-674 (1933).

[41] *An iterative process in the problem of Plateau.* Trans. Amer. Math. Soc. **35**, 869-887 (1933).

[42] **On the problem of Plateau.** Ergebnisse der Mathematik, vol. 2, Leipzig, 1933.

[43] *On convex functions.* Trans. Amer. Math. Soc. **37**, 266-285 (1935).

[44] *The isoperimetric inequality on the sphere.* Amer. J. Math. **57**, 765-770 (1935).

[45] *On a converse of Kneser's transversality theorem.* Ann. of Math. **36**, 749-769 (1935).

[46] *A remark on the area of surfaces.* Amer. J. Math. **58**, 598-606 (1936).

[47] *On continuous transformations in the plane.* Fundamenta Math. **27**, 201-211 (1936).

[48] *A lemma on the topological index.* Fundamenta Math. **27**, 212-221 (1936).

[49] *Solution of a problem of F. Riesz on the harmonic majorants of subharmonic functions.* Duke Math. J. **3**, 123-132 (1937).

[50] **Subharmonic functions.** Ergebnisse der Mathematik, vol. 5, Leipzig, 1937.

[51] *On the derivative of the Lebesgue area of continuous surfaces.* Fundamenta Math. **30**, 34-39 (1938).

[52] *On absolutely continuous transformations in the plane.* Duke Math. J. **4**, 189-221 (1938).

[53] *On a stretching process for surfaces* (in collaborazione con P. V. Reichelderfer). Amer. J. Math. **61**, 645-650 (1939).

[54] *Cyclic transitivity* (in collaborazione con P. V. Reichelderfer). Duke Math. J. **6**, 474-485 (1940).

[55] *On upper semi-continuous collections* (in collaborazione con J. W. T. Youngs). Acta Univ. Szeged. Sect. Sci. Math. **9**, 239-243 (1940).

[56] *On a lemma of McShane.* Ann. of Math. **42**, 73-83 (1941).

[57] *Note on an inequality of Steiner* (in collaborazione con P. V. Reichelderfer). Bull. Amer. Math. Soc. **47**, 102-108 (1941).

[58] *A theory of absolutely continuous transformations in the plane* (in collaborazione con P. V. Reichelderfer). Trans. Amer. Math. Soc. **49**, 258-307 (1941).

[59] *On the semi-continuity of double integrals in parametric form.* Trans. Amer. Math. Soc. **51**, 336-361 (1942).

60] *On semi-continuity.* Amer. Math. Monthly **49**, 446-450 (1942).

[61] *Convergence in length and convergence in area* (in collaborazione con P. V. Reichelderfer). Duke Math. J. **9**, 527-565 (1942).

[62] *What is the area of a surface?* Amer. Math. Monthly **50**, 139-141 (1943).

[63] *On continuous path-surfaces of zero area.* Ann. of Math. **44**, 173-191 (1943).

[64] *On a problem of Geöcze.* Amer. J. Math. **65**, 361-381 (1943).

[65] *On the transformation of double integrals* (in collaborazione con R. G. HELSEL). Trans. Amer. Math. Soc. **54**, 83-102 (1943).

[66] *Functions of rectangles.* Duke Math. J. **11**, 487-496 (1944).

[67] *Some remarks on the problem of Geöcze.* Duke Math. J. **11**, 497-506 (1944).

[68] *On surface area.* Proc. Nat. Acad. Sci. **31**, 102-106 (1945).

[69] *On continuous mappings of Peano spaces.* Trans. Amer. Math. Soc. **58**, 420-454 (1945).

[70] *The isoperimetric inequality and the Lebesgue definition of surface area.* Trans. Amer. Math. Soc. **61**, 530-555 (1947).

[71] *On two-dimensional concepts of bounded variation and absolute continuity.* Duke Math. J. **14**, 587-608 (1947).

[72] **Length and Area.** Amer. Math. Soc. Col. Pub., vol. 30, 1948, v+572 pp..

[73] *On Schreier systems in free groups* (in collaborazione con MARSHALL HALL). Trans. Amer. Math. Soc. **64**, 386-408 (1948).

[74] *A new geometrical interpretation of the Lebesgue area of a surface* (in collaborazione con E. J. MICKLE). Duke Math. J. **15**, 169-180 (1948).

[75] *The Cauchy area of a Fréchet surface* (in collaborazione con R. G. HELSEL). Duke Math. J. **15**, 159-167 (1948).

[76] *A note on convergence in length* (in collaborazione con MIRIAM C. AYER). Bull. Amer. Math. Soc. **54**, 533-539 (1948).

[77] *On essentially absolutely continuous plane transformations.* Bull. Amer. Math. Soc. **55**, 629-632 (1949).

[78] *On the problem of Geöcze.* Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) **14**, 21-30 (1948).

[79] *On cyclic additivity theorems* (in collaborazione con E. J. MICKLE). Trans. Amer. Math. Soc. **66**, 347-365 (1949).

[80] *Convergence in area.* Duke Math. J. **16**, 61-71 (1949).

[81] *On upper semi-continuous functions* (in collaborazione con E. J. MICKLE). In corso di stampa in «Proc. Amer. Math. Soc.».

[82] *On n-dimensional concepts of bounded variation, absolute continuity, and generalized Jacobian* (in collaborazione con P. V. REICHELDERFER). Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **35**, 678-681 (1949).

[83] *On generalized Jacobians* (in collaborazione con P. V. REICHELDERFER). In corso di stampa in «Trans. Amer. Math. Soc.».