JAURÈS CECCONI (*)

Su le funzioni caratteristiche e gli Jacobiani generalizzati.

Nota 2ª: Su la nozione di "Jacobiano generalizzato".

Introduzione.

Nel presente lavoro considero trasformazioni piane continue T definite dalle equazioni

$$(1) \qquad T: \qquad x = x(u, v)\,, \quad y = y(u, v)\,, \quad (u, v) \in A\,,$$

essendo A il quadrato unitario del piano xy e $x(u, v)$, $y(u, v)$ funzioni continue in A.

L. CESARI [1] (1) nelle sue ricerche sulla quadratura delle superficie in forma parametrica ha introdotto la funzione «Jacobiano generalizzato relativo» $H(u, v; T)$ della trasformazione T supposta a variazione limitata. Contemporaneamente ed indipendentemente T. RADÓ e P. V. REICHELDERFER [5] hanno introdotto la funzione analoga $J_e(u, v; T)$ di cui recentemente P. V. REICHELDERFER [6] ha trovato una nuova interpretazione.

Valendomi dei risultati stabiliti da L. CESARI, T. RADÓ e di questa ultima ricerca di P. V. REICHELDERFER, dimostro nella presente Nota il

Teorema. *Per ogni trasformazione T a variazione limitata si ha quasi ovunque in A:*

$$H(u, v; T) = J_e(u, v; T)\,.$$

In tal modo è possibile confrontare vari risultati degli Autori citati ed in particolare ne risulta l'equivalenza delle formule di trasformazione degli Jacobiani generalizzati di P. V. REICHELDERFER con quelle trovate nelle stesse ipotesi da L. CESARI [2] come una delle numerose proprietà tangenziali delle superficie di area finita secondo LEBESGUE.

(*) Indirizzo: Istituto Matematico della Università, Pisa (Italia).

(1) I numeri in parentesi quadra si riferiscono alla bibliografia in fine del lavoro.

1. – Sia T una trasformazione piana, sia $r_1, r_2, \ldots, r_n$ una suddivisione di A in regioni semplici di JORDAN, sia r_i^* la curva continua semplice chiusa orientata frontiera di r_i, sia c_i la curva continua orientata chiusa del piano xy immagine, secondo T, di r_i^* e sia $O(x, y; c_i)$ l'indice topologico della curva c_i rispetto al punto (x, y). Per convenzione $O(x, y; c_i) = 0$ per ogni punto (x, y) appartenente alla curva c_i. Sia $\omega(x, y; c_i)$ la funzione così definita:

$$\omega(x, y; c_i) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad O(x, y; c_i) \leqslant -1 \,, \\ 0 & \text{se} \quad O(x, y; c_i) = 0 \,, \\ 1 & \text{se} \quad O(x, y; c_i) \geqslant 1 \,. \end{cases}$$

Sia K un quadrato del piano xy, con i lati paralleli agli assi x ed y, racchiudente nel suo interno l'insieme chiuso e limitato $T(A)$. Per ogni punto (x, y) del piano xy pongo:

$$\psi^+(x,y;\, T) = \text{extr sup} \sum\nolimits^+ |\,\omega(x,y;\, c_i)\,| \,, \quad \Psi^+(x,y;\, T) = \text{extr sup} \sum\nolimits^+ |\, O(x,y;\, c_i)\,| \,,$$

$$\psi^-(x,y;\, T) = \text{extr sup} \sum\nolimits^- |\,\omega(x,y;\, c_i)\,| \,, \quad \Psi^-(x,y;\, T) = \text{extr sup} \sum\nolimits^- |\, O(x,y;\, c_i)\,| \,,$$

$$\psi\, (x,y;\, T) = \text{extr sup} \sum |\,\omega(x,y;\, c_i)\,| \,, \quad \Psi\, (x,y;\, T) = \text{extr sup} \sum |\, O(x,y;\, c_i)\,| \,,$$

ove le somme Σ, Σ^+, Σ^- sono estese rispettivamente a tutti i valori dell'indice i, ed a tutti i valori dell'indice i per cui è $O(x, y; c_i) \geqslant 0$ oppure $O(x, y; c_i) \leqslant 0$. Le funzioni $\psi(x, y; T)$, $\Psi(x, y; T)$ sono le funzioni caratteristiche di L. CESARI [1]. Le funzioni ψ, ψ^+, ψ^-, Ψ, Ψ^+, Ψ^-, sono nulle fuori di K.

2. – Valgono le seguenti proposizioni la cui dimostrazione è identica a quella già nota per le funzioni ψ, Ψ (*L.* CESARI [1]).

a) $0 \leqslant \psi^+(x, y; T) \leqslant \Psi^+(x, y; T)$, $\quad 0 \leqslant \psi^-(x, y; T) \leqslant \Psi^-(x, y; T)$.

b) $0 \leqslant \Psi^+(x, y; T) \leqslant \Psi\,(x, y; T)$, $\quad 0 \leqslant \Psi^-(x, y; T) \leqslant \Psi\,(x, y; T)$.

c) $0 \leqslant \psi^+(x, y; T) \leqslant \psi\,(x, y; T)$, $\quad 0 \leqslant \psi^-(x, y; T) \leqslant \psi\,(x, y; T)$.

d) *Le funzioni* ψ, ψ^+, ψ^-, Ψ, Ψ^+, Ψ^- *sono semicontinue inferiormente nel piano* xy.

e) Se T: $\quad x = x(u, v)$, $\quad y = y(u, v)$, $\quad (u, v) \in A$,

T_n: $\quad x = x_n(u, v)$, $\quad y = y_n(u, v)$, $\quad (u, v) \in A$, $\qquad n = 1, 2, \ldots$,

sono trasformazioni piane ed i limiti

$$x(u, v) = \lim_{n\to\infty} x_n(u, v) \,, \qquad y(u, v) = \lim_{n\to\infty} y_n(u, v)$$

valgono uniformemente in A, allora per ogni punto (x, y) del piano xy si ha

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\psi^+(x, y; T) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \psi^+(x, y; T_n), \quad \Psi^+(x, y; T) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \Psi^+(x, y; T_n),\\
&\psi^-(x, y; T) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \psi^-(x, y; T_n), \quad \Psi^-(x, y; T) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \Psi^-(x, y; T_n),\\
&\psi\ (x, y; T) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \psi\ (x, y; T_n), \quad \Psi\ (x, y; T) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \Psi\ (x, y; T_n).
\end{aligned}
\right.
\tag{2}
$$

3. – Da d) risulta che le funzioni non negative ψ, ψ^+, ψ^-, Ψ, Ψ^+, Ψ^- sono misurabili e perciò esistono gli integrali di LEBESGUE (finiti, oppure $+\infty$)

$$
u(T) = \iint_K \psi^+ \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad v(T) = \iint_K \psi^- \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad w(T) = \iint_K \psi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,
$$

$$
U(T) = \iint_K \Psi^+ \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad V(T) = \iint_K \Psi^- \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad W(T) = \iint_K \Psi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.
$$

La $W(T)$ è la variazione totale della trasformazione T quale è stata definita da L. CESARI. Se $\mathrm{L}(T)$ indica l'area secondo LEBESGUE della superficie piatta rappresentata dalle equazioni (1) si ha:

$$
L(T) = w(T) = W(T) = \iint_K \Psi(x, y; T)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{3}
$$

Se T è a variazione limitata, cioè se $w(T) = W(T) < +\infty$, allora Ψ, ψ, e perciò Ψ^+, Ψ^-, ψ^+, ψ^-, sono integrabili secondo LEBESGUE, in K.

4. – È noto il seguente

Lemma. Date due successioni u_n, v_n, $n = 1, 2, \ldots$, di numeri reali, se $u \leqslant \varliminf_{n\to\infty} u_n$, $v \leqslant \varliminf_{n\to\infty} v_n$, $u + v = \lim (u_n + v_n)$, allora esistono anche i limiti seguenti e si ha:

$$
u = \lim_{n\to\infty} u_n, \qquad v = \lim_{n\to\infty} v_n.
$$

Analoga conclusione vale se $u \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} u_n$; $v \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} v_n$; $u + v = \lim_{n\to\infty} (u_n + v_n)$.

5. – Nel presente numero dimostro la seguente proposizione:

f) *Per ogni trasformazione piana continua T e per quasi tutti i punti (x, y) del piano xy si ha:*

$$
\psi^+(x, y; T) + \psi^-(x, y; T) = \psi(x, y; T), \tag{4}
$$

$$
\Psi^+(x, y; T) + \Psi^-(x, y; T) = \Psi(x, y; T). \tag{5}
$$

Prendo in considerazione la (4). Sia (x, y) un qualsiasi punto del piano xy ed m un intero tale che $m \leqslant \psi(x, y; T)$. Esiste allora una suddivisione di A in regioni di JORDAN, semplicemente connesse, $r_1, r_2, \ldots, r_n$, tale che

$$m \leqslant \sum | \omega(x, y; c_i) |$$

ed in conseguenza

$$m \leqslant \sum | \omega(x, y; c_i) | = \sum^{-} | \omega(x, y \; c_i) + \\ + \sum^{+} | \omega(x, y; c_i) | \leqslant \psi^{+}(x, y; T) + \psi^{-}(x, y; T) .$$

Questo prova che per ogni punto (x, y) è

$$\psi^{+}(x, y; T) + \psi^{-}(x, y; T) \geqslant \psi(x, y; T) . \tag{6}$$

Osservo anche che la proposizione $f)$ è evidente per trasformazioni T quasi lineari in A, rappresentanti quindi superficie poliedriche piatte.

Sia allora

$$T_n: \qquad x = x_n(u, v) , \qquad y = y_n(u, v) , \qquad (u, v) \in A , \qquad\qquad n = 1, 2, \ldots,$$

una successione di superficie poliedriche piatte tendente uniformemente verso la superficie T e tale che $\lim\limits_{n\to\infty} L(T_n) = L(T)$.

In forza di $a)$, $c)$, $e)$, e del teorema di FATOU si ha, successivamente

$$\iint\limits_K \psi^{+}(x, y; T)\, dx\, dy + \iint\limits_K \psi^{-}(x, y; T)\, dx\, dy \leqslant \\ \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \iint\limits_K \psi^{+}(x, y; T_n)\, dx\, dy + \varliminf_{n\to\infty} \iint\limits_K \psi^{-}(x, y; T_n)\, dx\, dy \leqslant \\ \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \iint\limits_K [\psi^{+}(x, y; T_n) + \psi^{-}(x,y; T_n)\, dx\, dy = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_K \psi(x, y; T_n)\, dx\, dy \leqslant \\ \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \iint\limits_K \psi(x, y; T_n)\, dx\, dy = \varlimsup_{n\to\infty} L(T_n) = L(T) = \iint\limits_K \psi(x, y \cdot T)\, dx\, dy .$$

Ne risulta

$$\iint\limits_K [\psi(x, y; T) - \psi^{+}(x, y; T) - \psi^{-}(x, y; T)[\, dx\, dy \geqslant 0$$

dove in forza della (6) la funzione sotto il segno integrale è $\leqslant 0$. Ciò implica che quasi ovunque in K vale la (4). Alla stessa maniera si prova che quasi ovunque in K vale la (5).

La proposizione $f)$ è completamente dimostrata.

6. – T. Radó e P. V. Reichelderfer [5], [6], hanno introdotto le funzioni $k(x, y; T)$ (molteplicità essenziale) ,$k^+(x, y; T)$, $k^-(x, y; T)$ ed hanno dimostrato le seguenti proposizioni

a') $0 \leqslant k^+(x, y; T) \leqslant k(x, y; T)$, $0 \leqslant k^-(x, y; T) \leqslant k(x, y; T)$,

b') $k(x, y; T)$, $k^+(x, y; T)$, $k^-(x, y; T)$ sono funzioni inferiormente semicontinue nel piano xy,

c') nelle condizioni *e*) del numero 2 si ha:

$$k^+(x, y; T) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} k^+(x, y; T_n) , \quad k^-(x, y; T) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} k^-(x, y; T_n) ,$$

$$k(x, y; T) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} k(x, y; T_n) ,$$

d') per ogni trasformazione piana continua T si ha quasi ovunque nel piano xy:

$$k^+(x, y; T) + k^-(x, y; T) = k(x, y; T) ,$$
$$k(x, y; T) = \psi(x, y; T) = \Psi(x, y; T) .$$

Dimostro ora la seguente proposizione:

e') *Per ogni trasformazione piana continua T si ha quasi ovunque nel piano xy:*

$$\psi^+(x, y; T) = \Psi^+(x, y; T) = k^+(x, y; T) ,$$
$$\psi^-(x, y; T) = \Psi^-(x, y; T) = k^-(x, y; T) .$$

Comincio con provare che per ogni (x, y) si ha: $\psi^+(x, y; T) \leqslant k^+(x, y; T)$.

Sia infatti m un intero tale che $m \leqslant \psi^+(x, y; T)$. Esiste allora una suddivisione di A in regioni semplici di Jordan $r_1, r_2, \ldots, r_n$, tale che

$$m \leqslant \sum{}^+ |\, \omega(x, y; c_i) \,| ,$$

esistono perciò almeno m regioni di Jordan fra le $r_1, r_2, \ldots, r_n$, siano esse $r_{i_1}, r_{i_2}, \ldots, r_{i_m}$ per le quali è $\omega(x, y; c_{i_s}) = 1$, $s = 1, 2, \ldots, m$, e quindi $O(x, y; c_{i_s}) \geqslant 1$, $s = 1, 2, \ldots, m$. La generica di queste regioni, r_{i_s}, per un lemma di P. V. Reichelderfer [6], contiene almeno un m.m.c. di (x, y) [6], sia esso γ_{i_s}, che è essenziale [6] rispetto ad r_{i_s} e quindi rispetto ad A, ed avente la proprietà che in ogni insieme aperto O, contenente γ_{i_s} esiste una regione di Jordan R_{i_s}, di ordine di connessione finito, tale (²) che $\gamma_{i_s} \in R^0_{i_s}$, $R_{i_s} \subset A \cdot 0$, $O(x, y; R_{i_s}) > 0$. Poichè $k^+(x, y; T)$ esprime il numero degli e.m.m.c. di (x, y) che si trovano in queste condizioni ne risulta $m \leqslant k^+(x, y, T)$,

(²) Se R è un insieme, R^0 denota l'insieme dei punti interni di R.

e quindi $\psi^+(x, y; T) \leqslant k^+(x, y; T)$. Allo stesso modo si prova che per ogni (x, y) si ha $\psi^-(x, y; T) \leqslant k^-(x, y; T)$.

Si ha quindi $\psi^+(x, y; T) + \psi^-(x, y; T) \leqslant k^+(x, y; T) + k^-(x, y; T)$ ed in forza della (4) e della proposizione d') l'asserto è provato.

7. – In questo numero dimostro la seguente proposizione:

f) Se T è una trasformazione piana a variazione limitata si ha quasi ovunque nel piano xy

$$n(x, y; T) = \Psi^+(x, y; T) - \Psi^-(x, y; T),$$

essendo $n(x, y; T)$ la funzione di molteplicità relativa introdotta da L. CESARI [3].

Allo scopo richiamo il seguente

Lemma (L. CESARI [3]). Se T è una trasformazione piana a variazione limitata esistono quante si vogliono successioni di gruppi di poligoni di A $\{ q_i^{(n)}, i = 1, 2,..., \nu_n \}$, $n = 1, 2,...$, senza punti interni in comune, per le quali quasi ovunque nel piano xy, esistono finiti i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} | O(x, y; c_i^{(n)}) | = \Psi(x, y; T), \tag{7}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\nu_n} O(x, y; c_i^{(n)}) = n(x, y; T). \tag{8}$$

La (7) può scriversi anche nel seguente modo

$$\lim_{n\to\infty} \{ \sum\nolimits^+ | O(x, y; c_i^{(n)}) | + \sum\nolimits^- | O(x, y; c_i^{(n)}) | \} = \Psi(x, y; T).$$

ove Σ^+, Σ^- hanno il significato stabilito nel n. 1, ed è evidentemente per ogni (x, y)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum\nolimits^+ | O(x, y; c_i^{(n)}) | \leqslant \Psi^+(x, y; T), \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum\nolimits^- | O(x, y; c_i^{(n)}) | \leqslant \Psi^-(x, y; T).$$

In forza della (5) e del lemma enunciato nel n. 4 ne segue allora, quasi ovunque nel piano xy

$$\lim_{n\to\infty} \sum\nolimits^+ | O, xy; c_i^{(n)}) | = \Psi^+(x, y; T), \quad \lim_{n\to\infty} \sum\nolimits^- | O(x, y; c_i^{(n)}) | = \Psi^-(x, y; T). \tag{9}$$

Considerando la (8) si ha infine, quasi ovunque nel piano xy:

$$n(x, y; T) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\nu_n} O(x, y; c_i^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} \{ \sum\nolimits^+ | O(x, y; c_i^{(n)}) | -$$

$$- \sum\nolimits^- | O(x, y; c_i^{(n)}) | \} = \Psi^+(x, y; T) - \Psi^-(x, y; T).$$

8. – In questo numero dimostro il teorema enunciato nella introduzione.

Sia (u, v) un punto interno ad A, sia q un quadrato con i lati paralleli agli assi u e v contenente (u, v) e sia $\delta(q)$ il diametro di q. Sia p_i; $i = 1, 2, \ldots, n$; un gruppo di poligoni semplici interni ad A, a due a due senza punti interni in comune, siano c_i le curve continue chiuse immagini secondo T delle poligonali che costituiscono il contorno dei poligoni p_i e sia

$$m = \frac{1}{|q|}\,|E_q|\,, \quad E_q = \sum_{i=1}^{n} c_i\,, \qquad \mu = \frac{1}{|q|}\left[L(q) - \sum_{i=1}^{n} \left|\iint_K O(x, y;\, c_i)\,dx\,dy\right|\right].$$

Quasi ovunque in A esiste il limite

$$\lim_{\substack{\delta \\ m \\ \mu}\Big\}\to 0} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \iint\limits_K O(x, y, c_i)\,dx\,dy}{|q|}$$

al quale L. Cesari ha dato il nome di Jacobiano generalizzato $H(u, v;\, T)$.

Sia T_q la trasformazione così definita:

$$T_q: \qquad x = x(u, v)\,, \qquad y = y(u, v)\,, \qquad (u; v) \in q\,.$$

Da un lemma di L. Cesari [3] risulta intanto che se I_q è l'insieme ove

$$\Psi(x, y;\, T_q) - \sum_{i=1}^{n} |\,O(x, y;\, c_i)\,| > 0\,,$$

allora quasi ovunque in $T(q) - E_q - I_q$ si ha

$$n(x, y;\, T_q) = \sum_{i=1}^{n} O(x, y;\, c_i)\,,$$

ed anche $|I_q| \leq \mu\,|q|$, essendo μ il numero reale sopra introdotto.

Si ha allora successivamente

$$H(u,v;\,T) = \lim_{\substack{\delta \\ m \\ \mu}\Big\}\to 0} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \iint\limits_K O(x, y;\, c_i)\,dx\,dy}{|q|} = \lim_{\substack{\delta \\ m \\ \mu}\Big\}\to 0} \frac{\iint\limits_K \left[\sum\limits_{i=1}^{n} O(x, y;\, c_i)\right] dx\,dy}{|q|}$$

$$= \lim_{\substack{\delta \\ m \\ \mu}\Big\}\to 0} \left[\frac{\iint\limits_K n(x, y;\, T_q)\,dx\,dy}{|q|} - \frac{\iint\limits_K \left[\sum\limits_{i=1}^{n} O(x, y;\, c_i) - n(x, y;\, T_q)\right] dx\,dy}{|q|}\right]$$

e, in virtù delle proposizioni e') ed f) e del lemma ora ricordato,

$$H(u,v;\,T)=\lim_{\substack{\delta\\ m\\ \mu}\Big\}\to 0}\left[\frac{\displaystyle\iint_K [k^+(x,y;\,T_q)-k^-(x,y;\,T_q)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{|q|}-\frac{\displaystyle\iint_{E_q+I_q}\left[\sum_{i=1}^{n}O(x,\;;\,c_q)-n(x,y;\,T_q)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{|q|}\right].$$

Ma per un lemma di P. V. REICHELDERFER [6] è quasi ovunque in A

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\displaystyle\iint_K [k^+(x,y;\,T_q)-k^-(x,y;\,T_q)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{|q|}=J_e(u,v;\,T),$$

il teorema enunciato sarà allora provato quando si sarà fatto vedere che:

$$\lim_{\substack{\delta\\ m\\ \mu}\Big\}\to 0}\frac{\displaystyle\iint_{E_q+I_q}\left[\sum_{i=1}^{n}O(x,y;\,c_i)-n(x,y;\,T_q)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{|q|}=0$$

quasi ovunque in A.

Intanto è

$$\left|\iint_{E_q+I_q}\left[\sum_{i=1}^{n}O(x,y;\,c_i)-n(x,y;\,T_q)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|\leqslant 2\iint_{E_q+I_q}\Psi(x,y;\,T_q)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

basterà perciò provare che è quasi ovunque in A

$$\lim_{\substack{\delta\\ m\\ \mu}\Big\}\to 0}\frac{\displaystyle\iint_{E_q+I_q}\Psi(x,y;\,T_q)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{|q|}=0\,.$$

Suppongo, per assurdo, che esista un numero positivo a ed un insieme J di misura positiva tale che per ogni punto (x,y) appartenente ad J si abbia

$$\overline{\lim_{\substack{\delta\\ m\\ \mu}\Big\}\to 0}}\frac{\displaystyle\iint_{E_q+I_q}\Psi(x,y;\,T_q)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{|q|}>a\,.$$

Fissato $0 < \sigma < 1$ determino in corrispondenza un numero reale α tale che se h è un insieme di punti del piano xy di misura minore di α sia

$$\iint_h \Psi(x, y; T)\, dx\, dy < a(1-\sigma) \mid J \mid .$$

Ciò è possibile in virtù della ipotesi che T è a variazione limitata.

Per ogni punto (u, v) di J esiste una successione di quadrati $\{ q_n \}$, con i lati paralleli agli assi u, v, con le seguenti proprietà:

$$(u, v) \in q_n , \qquad q_n \subset A ,$$

ad ogni q_n appartiene un gruppo di poligoni semplici privi a due a due di punti interni in comune, siano essi $p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \ldots, p_{\nu_n}^{(n)}$ tali che, con evidente significato dei simboli, si ha:

$$\varepsilon(q_n) \to 0 , \qquad m(q_n) \to 0 , \qquad \mu(q_n) \to 0 , \qquad \iint_{I_{q_n}+E_{q_n}} \frac{\Psi(x, y; T_{q_n})\, dx\, dy}{\mid q \mid} > a .$$

Poichè l'insieme dei quadrati q_n ricopre secondo VITALI l'insieme J esiste un gruppo finito di punti, siano essi $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \ldots, (u_\nu, v_\nu)$ e di altrettanti quadrati, siano essi $q_1, q_2, \ldots, q_\nu$, a due a due senza punti interni in comune e paralleli agli assi u, v, tali che

$$(u_i, v_i) \in q_i , \qquad q_i \subset A , \qquad p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, \ldots, p_{\nu_i}^{(i)} \subset q_i , \qquad m(q_i) = \frac{\mid E_{q_i} \mid}{\mid q_i \mid} < \frac{\alpha}{3 \mid J \mid (1+6)} ,$$

$$\frac{\mid I_{q_i} \mid}{\mid q_i \mid} \leqslant \mu(q_i) = \frac{L(q_i) - \sum\limits_{i=1}^{\nu_i} \left| \iint_K O(x, y; c_s^{(i)})\, dx\, dy \right|}{\mid q_i \mid} < \frac{\alpha}{3 \mid J \mid (1+\sigma)} ,$$

$$\iint_{I_{q_i}+E_{q_i}} \Psi(x, y; T_{q_i})\, dx\, dy > a \mid q_i \mid ,$$

$$i = 1, 2, \ldots, \nu ; \qquad \left| J \cdot \sum_{i=1}^{\nu} q_i \right| > \mid J \mid (1-\sigma) , \qquad \left| \sum_{i=1}^{\nu} q_i \right| < \mid J \mid (1+\sigma) .$$

È dunque

$$\mid E_{q_i} \mid + \mid I_{q_i} \mid < \frac{2}{3} \frac{\alpha}{\mid J \mid (1+\sigma)} \mid q_i \mid , \qquad i = 1, 2, \ldots \nu,$$

ed anche

$$\sum_{i=1}^{\nu} \mid E_{q_i} \mid + \sum_{i=1}^{\nu} \mid I_{q_i} \mid < \frac{2}{3} \frac{\alpha}{\mid J \mid (1+\sigma)} \cdot \sum_{i=1}^{\nu} \mid q_i \mid < \frac{2}{3} \alpha .$$

Intanto è

$$\sum_{i=1}^{\nu} \iint_{I_{q_i}+E_{q_i}} \Psi(x, y; T_{q_i})\, dx\, dy \leq \sum_{i=1}^{\nu} \iint_{\sum_{i=1}^{\nu}(I_{q_i}+E_{q_i})} \Psi(x, y; T_{q_i})\, dx\, dy ,$$

e da questa, in virtù della nota disuguaglianza [4]

$$\sum_{i=1}^{\nu} \Psi(x, y; T_{q_i}) \leq \Psi(x, y; T) ,$$

si deduce

$$\sum_{i=1}^{\nu} \iint_{I_{q_i}+E_{q_i}} \Psi(x, y; T_{q_i})\, dx\, dy \leq \iint_{\sum_{i=1}^{\nu}(I_{q_i}+E_{q_i})} \Psi(x, y; T)\, dx\, dy .$$

Per il modo come si è scelto α ne viene allora

$$\sum_{i=1} \iint_{I_{q_i}+E_{q_i}} \Psi(x, y; T_{q_i})\, dx\, dy < \alpha(1-\sigma) \mid J \mid .$$

Ma d'altra parte è

$$\sum_{i=1}^{\nu} \iint_{I_{q_i}+E_{q_i}} \Psi(x, y; T_{q_i})\, dx\, dy > \sum_{i=1}^{\nu} a \mid q_i \mid > a(1-\sigma) \mid J \mid .$$

Ciò che è assurdo. Il teorema enunciato è così dimostrato.

9. – In questo numero dò una seconda dimostrazione del teorema enunciato nella introduzione.

Sia T la trasformazione piana continua considerata nel n. 1, sia q un quadrato appartenente ad A con i lati paralleli agli assi u e v, e sia T la trasformazione piana considerata nel n. 8. Sia (u, v) un punto appartenente a q e sia $\delta(q)$ il diametro di q.

La funzione

$$\rho(q) = \iint_K \Psi^+(x, y; T_q)\, dx\, dy - \iint_K \Psi^-(x, y; T_q(\, dx\, dy$$

risulta definita per ogni quadrato q in virtù della ipotesi che T è a variazione limitata, e come abbiamo riportato nel numero precedente si ha, quasi ovunque in A

$$\lim_{\delta(q)\to 0} \frac{\rho(q)}{|q|} = J_e(u, v; T).$$

Sia $p_1, p_2, \ldots, p_n$ il gruppo di poligoni semplici di A considerato nel n. 8, e siano c_i, E_q, m, μ, gli altri enti ivi considerati.

Come abbiamo ricordato nel n. 8, quasi ovunque in A, esiste finito il limite

$$\lim_{\left.\begin{matrix}\delta\\ m\\ \mu\end{matrix}\right\}\to 0} \frac{\displaystyle\iint_K \sum_{i=1}^{n} O(x, y; c_i)\, dx\, dy}{|q|} = H(u, v; T).$$

Sia G l'insieme di punti di K, di misura nulla, nei quali non è

$$\Psi^+(x, y; T_q) + \Psi^-(x, y; T_q) = \Psi(x, y; T_q).$$

Pongo

$$\omega^+(x, y) = \sum{}^+ |O(x, y; c_i)|, \qquad \omega^-(x, y) = \sum{}^- |O(x, y; c_i)|.$$

Per ogni punto (x, y) di K si ha

$$0 \leqslant \omega^+(x, y) \leqslant \Psi^+(x, y; T_q), \qquad 0 \leqslant \omega^-(x, y) \leqslant \Psi^-(x, y; T_q),$$

$$0 \leqslant \omega^+(x, y) + \omega^-(x, y) \leqslant \Psi(x, y; T_q).$$

Inoltre

$$\rho(q) - \sigma(q) = \iint_K \Psi^+(x,y; T_q)\, dx\, dy - \iint_K \Psi^-(x,y; T_q)\, dx\, dy - \sum_{i=1}^{n} \iint_K O(x, y; c_i)\, dx\, dy$$

$$= \iint_K [\Psi^+(x, y; T_q) - \Psi^-(x, y; T_q) - \omega^+(x, y) + \omega^-(x, y)]\, dx\, dy,$$

ove ho posto, per brevità,

$$\sigma(q) = \iint_K \sum_{i=1}^{n} O(x, y; c_i)\, dx\, dy.$$

In tutti i punti di $K - G$ si ha ora

$$\Psi^{+}(x, y; T_q) - \Psi^{-}(x, y; T_q) - \omega^{+}(x, y) + \omega^{-}(x, y) \leqslant$$

$$\leqslant \Psi^{+}(x, y; T_q) - \Psi^{-}(x, y; T_q) - \omega^{+}(x, y) + \omega^{-}(x, y) + 2[\Psi^{-}(x, y; T_q) - \omega^{-}(x, y)]$$

$$= \Psi^{+}(x, y; T_q) + \Psi^{-}(x, y; T_q) - \omega^{+}(x, y) - \omega^{-}(x, y) =$$

$$= \Psi(x, y; T_q) - \omega^{+}(x, y) - \omega^{-}(x, y) ,$$

ed analogamente

$$\Psi^{+}(x, y; T_q) - \Psi^{-}(x, y; T_q) - \omega^{+}(x, y) +$$

$$+ \omega^{-}(x, y) \geqslant \Psi(x, y; T_q) - \omega^{+}(x, y) - \omega^{-}(x, y),$$

dove

$$\Psi(x, y; T_q) - \omega^{+}(x, y) - \omega^{-}(x, y) \geqslant 0 .$$

Pertanto essendo $| G | = 0$, si ha:

$$| \rho(q) - \sigma(\rho) | \leqslant \iint_K [\Psi x, y; T_q) - \omega^{+}(x, y) - \omega^{-}(x, y)] \, dx \, dy$$

$$\leqslant \iint_K [\Psi(x, y; T_q) - \sum_{=1}^{n} | O(x, y; c_i) |] \, dx \, dy$$

$$\leqslant \iint_K \Psi(x, y; T_q) \, dx \, dy - \sum_{i=1}^{n} \left| \iint_K O(x, y; c_i) \, dx \, dy \right| = | q | \cdot \mu(q)$$

e finalmente

$$\frac{\rho(q)}{| q |} - \mu(q) \leqslant \frac{\sigma(q)}{| q |} \leqslant \frac{\rho(q)}{| q |} + \mu(q) .$$

Il termine centrale dipende soltanto da q, gli estremi dipendono anche dal gruppo dei poligoni p_i. Posso scegliere i poligoni p_i in modo che sia $\mu(q) < \delta$, $m(q) < \delta$ e pertanto quando $\delta \to 0$, per quasi ogni punto (u, v) di A, si ha

$$J_e(u, v; T) = H (u, v; T) .$$

Bibliografia.

[1]. L. CESARI, *Sui fondamenti geometrici dell'integrale classico per l'area delle superficie in forma parametrica.* Mem. Accad. Italia, **13**, 1323-1481 (1943).

[2]. L. CESARI, *Proprietà tangenziali delle superficie continue.* Comment. Math. Helv., **22**, 1-16 (1949).

[3]. L. CESARI, *Sulla trasformazione degli integrali doppi.* Ann. Mat. Pura Appl. (4) **27**, 321-374 (1948).

[4]. T. RADÓ, *Two dimensional concepts of bounded variation and absolute continuity.* Duke Math. J., **14**, 587-608 (1947).

[5]. T. RADÓ, P. V. REICHELDERFER, *A theory of absolutely continuous transformations in the plane.* Trans. Amer. Math. Soc., **49**, 258-307 (1941).

[6]. P. V. REICHELDERFER, *Law of transformation for generalized Jacobians.* Duke Math. Journal, **16**, 73-83 (1949).