LUIGI GATTESCHI (*)

Valutazione dell'errore nella formula di Mc Mahon per gli zeri della $J_n(x)$ di Bessel nel caso $0 \leqslant n \leqslant 1$. (**)

Introduzione.

Noi abbiamo recentemente applicato ai polinomi ultrasferici ([1]), ed in particolare a quelli di LEGENDRE ([2]), un metodo generale dovuto a F. TRICOMI ([3]) per la determinazione degli zeri delle funzioni delle quali si conosce una rappresentazione asintotica, pervenendo nei due casi considerati ad una limitazione dell'errore, risultato questo assai importante ai fini dei calcoli numerici.

In questa ricerca siamo ora passati alla determinazione dell'r-esimo zero della $J_n(x)$ di BESSEL per $0 \leqslant n \leqslant 1$ e abbiamo provato che la classica formula di MC MAHON ([4])

$$j_{n,r} = x_r - \frac{4n^2-1}{8x_r} + O(r^{-3}),$$

con

$$x_r = (2r+n)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4},$$

può così precisarsi

$$j_{n,r} = x_r - \frac{4n^2-1}{8x_r} + \varepsilon(n, r), \qquad (r = 1, 2, \ldots)$$

(*) Indirizzo: Via O. F. Mossotti, 9 - Firenze (Italia).

(**) Lavoro ricevuto il 3 giugno 1950.

([1]) L. GATTESCHI, *Approssimazione asintotica degli zeri dei polinomi ultrasferici.* Rend. Mat. e Appl. Roma (5) **8**, 399-411 (1949).

([2]) L. GATTESCHI, *Una formula asintotica per l'approssimazione degli zeri dei polinomi di* LEGENDRE. Boll. Un. Mat. Ital. (3) **4**, 240-250 (1949).

([3]) F. TRICOMI, *Sugli zeri delle funzioni di cui si conosce una rappresentazione asintotica.* Ann. Mat. Pura Appl. (4) **26**, 283-300 (1947).

([4]) J. MC MAHON, *On the roots of the Bessel and certain related functions.* Ann. of Math., **9**, 23-30 (1894).

con

$$|\varepsilon(n, r)| < \frac{r(7{,}4A^2 + 1{,}1A)}{2^6(2r + n - 1)^3(6r - 5)} ,$$

dove abbiamo posto

$$A = |4n^2 - 1| .$$

La formula da noi trovata dà, per esempio nei casi $n = 1/4$, $r = 25$ e $n = 2/3$, $r = 30$, i seguenti valori

$$78{,}14831676 < j_{1/4,25} < 78{,}14831705 ,$$
$$94{,}50855022 < j_{2/3,30} < 94{,}50855036 ,$$

mentre i valori, con otto cifre decimali esatte, sono rispettivamente (5)

$$V_8 j_{1/4,25} = 78{,}14831679 , \qquad V_8 j_{2/3,30} = 94{,}50855033 .$$

§ 1. - Formule preliminari.

Si prenda come valore approssimato di $J_n(x)$ la somma dei primi tre termini del suo sviluppo asintotico (6); avremo

$$J_n(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} f_n(x) ,$$

con

(1) $$f_n(x) = \cos\left(x - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right) - \frac{4n^2 - 1^2}{1!\,8x} \operatorname{sen}\left(x - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right) - \\ - \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)}{2!\,(8x)^2} \cos\left(x - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right) + R_3(x) ,$$

e se n è tale che $4 > n - 1/2$, $2 \geqslant n - 3/2$, cioè per

$$n \leqslant \frac{7}{2} ,$$

(5) Cfr. *Tables of* BESSEL *functions of fractional order* (New York, Columbia University Press, 1948), vol. I, p. 385.

(6) Cfr. G. N. WATSON, *A Treatise on the Theory of* BESSEL *functions*. Cambridge (1922), § 7 · 31, pp. 207-208.

si ha

$$(2) \qquad |R_3(x)| < \left| \frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)(4n^2-5^2)}{3!\,(8x)^3} \operatorname{sen}\left(x-\frac{1}{2}n\pi-\frac{1}{4}\pi\right)\right| +$$

$$+ \left| \frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)(4n^2-5^2)(4n^2-7^2)}{4!\,(8x)^4} \cos\left(x-\frac{1}{2}n\pi-\frac{1}{4}\pi\right)\right| .$$

Se ora poniamo

$$(3) \qquad \begin{cases} a_1 = -\dfrac{(4n^2-1^2)r\pi}{1!}, \quad a_2 = -\dfrac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)r^2\pi^2}{2!}, \quad \mu = \dfrac{1}{8r\pi}, \\ g_0(x) = \cos\left(x-\dfrac{1}{2}n\pi-\dfrac{1}{4}\pi\right), \quad g_1(x) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(x-\dfrac{1}{2}n\pi-\dfrac{1}{4}\pi\right)}{x}, \\ g_2(x) = \dfrac{\cos\left(x-\dfrac{1}{2}n\pi-\dfrac{1}{4}\pi\right)}{x^2}, \end{cases}$$

la (1) diviene

$$(4) \qquad f_n(x) = g_0(x) + a_1 g_1(x)\mu + a_2 g_2(x)\mu^2 + R_3(x) .$$

Per la formula di Taylor arrestata alla derivata terza abbiamo

$$g_0[x + v_0(x)\mu + v_1(x)\mu^2] = g_0(x) + \frac{v_0(x)\mu + v_1(x)\mu^2}{1!} g_0'(x) +$$

$$+ \frac{[v_0(x)\mu + v_1(x)\mu^2]^2}{2!} g_0''(x) + \frac{[v_0(x)\mu + v_1(x)\mu^2]^3}{3!} g_0'''(\bar{x}) ,$$

con $\bar{x}$ compreso fra x e $x + v_0(x)\mu + v_1(x)\mu^2$.

Se facciamo

$$(5) \qquad v_0(x) = a_1 \frac{g_1(x)}{g_0'(x)}, \qquad v_1(x) = a_2 \frac{g_2(x)}{g_0'(x)} - a_1^2 \frac{[g_1(x)]^2 g_0''(x)}{2[g_0'(x)]^3},$$

risulta

$$(6) \qquad g_0[x + v_0(x)\mu + v_1(x)\mu^2] = g_0(x) + a_1 g_1(x)\mu + a_2 g_2(x)\mu^2 + H(x) ,$$

con

$$(7) \qquad H(x) = v_0(x)v_1(x)g_0''(x)\mu^3 + \frac{[v_1(x)]^2}{2} g_0''(x)\mu^4 + \frac{[v_0(x)\mu + v_1(x)\mu^2]^3}{3!} g_0'''(\bar{x}) .$$

§ 2. – Zeri di $g_0[x + v_0(x)\mu + v_1(x)\mu^2]$.

Siano x_r, $(r = 1, 2, \ldots)$, gli zeri di $g_0(x)$, si abbia cioè

$$x_r = (2r + n)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}, \qquad (r = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Allora se x_r^* è tale che

$$x_r^* + v_0(x_r^*)\mu + v_1(x_r^*)\mu^2 = x_r ,$$

risulta anche

$$g_0\,[x_r^* + v_0(x_r^*)\mu + v_1(x_r^*)\mu^2] = 0 .$$

Se ora poniamo

$$H_1(x) = \mu^2[v_0(x_r^*)\mu + v_1(x_r^*)\mu^2]v_1'(\overline{\overline{x}}_r) , \tag{9}$$

$$H_2(x) = \frac{-\mu}{1 + \mu v_0'(x_r)} \left\{ \frac{[v_0(x_r^*)\mu + v_1(x_r^*)\mu^2]^2}{2}\, v_0''(\overline{\overline{\overline{x}}}) - v_1(x_r^*)\, v_0'(x_r)\mu^2 \right\} , \tag{10}$$

$$(\overline{\overline{x}}_r \text{ e } \overline{\overline{\overline{x}}}_r \text{ compresi fra } x_r \text{ e } x_r^*) ,$$

$$H_3(x) = -\frac{v_0(x_r)[v_0'(x_r)]^2\mu^3}{1 + \mu v_0'(x_r)} , \tag{11}$$

si trova col procedimento del lavoro citato in (²)

$$x_r^* = x_r - v_0(x_r)\mu + [v_0(x_r)v_0(x_r) - v_1(x_r)]\mu^2 + K(x) , \tag{12}$$

con

$$K(x) = H_1(x) + H_2(x) + H_3(x) . \tag{13}$$

Effettuando i relativi calcoli otteniamo

$$g_0'(x_r) = (-1)^r , \quad g_0''(x_r) = 0 , \quad g_1(x_r) = \frac{(-1)^{r+1}}{x_r} , \quad g_1'(x_r) = \frac{(-1)^r}{x^2} ,$$

$$g_2(x_r) = 0 , \quad v_0(x_r) = \frac{-a_1}{x_r} , \quad v_0'(x_r) = \frac{a_1}{x_r^2} , \quad v_1(x_r) = 0 ,$$

e, sostituendo nella (12),

$$x_r^* = x_r + \frac{a_1}{x_r}\mu - \frac{a_1^2}{x_r^3}\mu^2 + K(x) ,$$

ossia

$$x_r^* = x_r - \frac{4n^2-1}{8x_r} - \frac{(4n^2-1)^2}{64x_r^3} + K(x). \tag{14}$$

§ 3. - Limitazioni di x_r^* e di $K(x)$, $H(x)$, $R_3(x)$ per $0 \leqslant n \leqslant 1$.

Poniamo

$$h(x) = x + v_0(x)\mu + v_1(x)\mu^2,$$

e si consideri l'intervallo

$$\left(x_r - \frac{\pi}{4},\ x_r + \frac{\pi}{4}\right).$$

Essendo

$$v_0(x) = -\frac{a_1}{x}, \qquad v_1(x) = -\frac{a_2 + a_1^2}{x^2}\operatorname{cotg}\left(x - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right),$$

$$\operatorname{cotg}\left(x_r \mp \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right) = \pm 1,$$

abbiamo

$$h\left(x_r - \frac{\pi}{4}\right) = x_r - \frac{\pi}{4} - \frac{a_1}{x_r - \frac{\pi}{4}}\mu - \frac{a_2 + a_1^2}{\left(x_r - \frac{\pi}{4}\right)^2}\mu^2 =$$

$$= x_r - \frac{\pi}{4} + \frac{4n^2-1}{4(2r+n-1)\pi}\left[1 - \frac{4n^2+7}{8(2r+n-1)\pi}\right],$$

e per $0 \leqslant n \leqslant 1/2$, $r = 1, 2, \ldots,$ si ha

$$\frac{4n^2+7}{8(2r+n-1)\pi} < \frac{8}{8\pi} < 1, \qquad 4n^2 - 1 \leqslant 0,$$

da cui

$$h\left(x_r - \frac{\pi}{4}\right) < x_r, \qquad \left(0 \leqslant n \leqslant \frac{1}{2}\right).$$

Per $1/2 < n \leqslant 1$ è

$$h\left(x_r - \frac{\pi}{4}\right) < x_r - \frac{\pi}{4} + \frac{4n^2-1}{4(2r+n-1)\pi} < x_r - \frac{\pi}{4} + \frac{3}{4\pi} < x_r,$$

e ne risulta quindi

$$h\left(x_r - \frac{\pi}{4}\right) < x_r\,, \qquad \text{per} \quad 0 \leqslant n \leqslant 1\,, \qquad\qquad r = 1, 2, \ldots .$$

È ancora

$$h\left(x_r + \frac{\pi}{4}\right) = x_r + \frac{\pi}{4} - \frac{a_1\mu}{(2r+n)\frac{\pi}{2}} + \frac{a_2 + a_1^2}{(2r+n)\frac{\pi^2}{4}}\mu^2 =$$

$$= x_r + \frac{\pi}{4} + \frac{4n^2-1}{4(2r+n)\pi}\left[1 + \frac{4n^2+7}{8(2r+n)\pi}\right].$$

Se $0 \leqslant n \leqslant 1/2$, $r = 1, 2, \ldots$, si ha

$$h\left(x_r + \frac{\pi}{4}\right) > x_r + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4(2r+n)\pi}\left[1 + \frac{1}{(2r+n)\pi}\right] > x_r + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{8\pi}\left[1 + \frac{1}{2\pi}\right] > x_r\,,$$

ed anche nel caso $1/2 < n \leqslant 1$ è

$$h\left(x_r + \frac{\pi}{4}\right) > x_r\,.$$

Vale quindi per x_r^* la limitazione

$$x_r - \frac{\pi}{4} < x_r^* < x_r + \frac{\pi}{4}\,, \qquad \text{per} \quad 0 \leqslant n \leqslant 1\,, \qquad r = 1, 2, \ldots . \tag{15}$$

Dalla (15) risulta $x_r - \pi/4 < x_r < x_r + \pi/4$

$$\left|\operatorname{cotg}\left(x_r^* - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right)\right| < 1\,, \qquad \frac{\sqrt{2}}{2} < \left|\operatorname{sen}\left(x - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right)\right| < 1\,; \tag{16}$$

ed inoltre

$$|\,v_0(x_r^*)\,| < \frac{a_1}{x_r - \frac{\pi}{4}} = \frac{|\,a_1\,|}{(2r+n-1)\,\frac{\pi}{2}}\,, \qquad |\,v_1(x_r^*)\,| < \frac{|\,a_1^2 + a_2\,|}{2r+n-1)\,\frac{\pi}{2}}\,.$$

Tenendo presente che è $v_0'(x_r) = a_1/x_r^2$ si ha

$$1 + \mu v_0'(x_r) = 1 - \frac{4n^2-1}{8x_r^2} = 1 - \frac{2}{\pi^2} + 2\,\frac{8r(2r-1) + 4n(4r-1) + 2}{(4r+2n-1)^2\pi^2}\,.$$

Dalla (11)

$$H_3(x) = \frac{-(4n^2-1)^3}{8^3x_r^5[1 + \mu v_0'(x_r)]}\,,$$

e quindi

$$|H_3(x)| < \frac{|(4n^2-1)^3|\,(4r+1)}{2r(4r+2n-1)^5\pi^5}\,.$$

Per la (15) si ha

$$|v_0(x_r^*)\mu + v_1(x_r^*)\mu^2| \leqslant \frac{|a_1|\,\mu}{x_r-\dfrac{\pi}{4}} + \frac{|a_1^2+a_2|\,\mu^2}{\left(x_r-\dfrac{\pi}{4}\right)^2} =$$

$$= \frac{|4n^2-1|}{4(2r+n-1)\pi}\left[1+\frac{2\,|4n^2-1|+|4n^2-9|}{8(2r+n-1)\pi}\right] <$$

$$< \frac{|4n^2-1|}{4(2r+n-1)\pi}\left[1+\frac{3}{5(2r-1)}\right] = \frac{|4n^2-1|}{2(2r+n-1)\pi}\,\frac{5r-1}{5(2r-1)}\,.$$

Essendo inoltre

$$v_1'(x) = 2\,\frac{a_2+a_1^2}{x^3}\operatorname{cotg}\left(x-\frac{1}{2}\,n\pi-\frac{1}{4}\,\pi\right) + \frac{a_2+a_1^2}{x^2}\,\frac{1}{\operatorname{sen}^2\left(x-\dfrac{1}{2}\,n\pi-\dfrac{1}{4}\pi\right)}\,;$$

ne segue che, per $x_r - \pi/4 < x < x_r + \pi/4$ e le (16),

$$|v_1'(x)| < \frac{2\,|a_2+a_1^2|}{\left(x_r-\dfrac{\pi}{4}\right)^3} + \frac{2\,|a_2+a_1^2|}{\left(x_r-\dfrac{\pi}{4}\right)^2} < \frac{8\,|a_2+a_1^2|}{(2r+n-1)^2\pi^2}\left[\frac{2}{3(2r-1)}+1\right] =$$

$$= \frac{4\,|4n^2-1|\cdot(7+4n^2)}{(2r+n-1)^2\pi^2}\cdot\frac{6r-1}{3(2r-1)} \leqslant \frac{44\,|4n^2-1|\,r^2\pi^2}{(2r+n-1)^2\pi^2}\cdot\frac{6r-1}{3(2r-1)}\,.$$

Si ha poi

$$|H_1(x)| < \frac{1}{64}\,\frac{44\,|4n^2-1|}{(2r+n-1)^2\pi^2}\,\frac{6r-1}{3(2r-1)}\,\frac{|4n^2-1|}{2(2r+n-1)\pi}\,\frac{5r-1}{5(2r-1)} =$$

$$= \frac{11(4n^2-1)^2(6r-1)(5r-1)}{15\cdot 32(2r+n-1)^3\pi^3(2r-1)^2}\,;$$

$$|H_2(x)| < \mu\,\frac{4r+1}{4r}\left\{\frac{1}{2}\,\frac{(4n^2-1)^2(5r-1)^2}{100(2r+n-1)^2\pi^2(2r-1)^2}\,\frac{2\,|a_1|}{(2r+n-1)^3\dfrac{\pi}{8}} + \right.$$

$$\left. + \frac{|a_1^2+a_2|}{(2r+n-1)^2\dfrac{\pi^2}{4}}\,\frac{|a_1|}{(2r+n-1)^2\dfrac{\pi^2}{4}}\cdot\frac{1}{64r^2\pi^2}\right\} <$$

$$< \mu\,\frac{4r+1}{4}\,\frac{(4\,n^2-1)^2}{(2r+n-1)^4\pi^4}\left\{\frac{6(5r-1)^2}{25(2r-1)^3}+\frac{11\pi}{8}\right\};$$

ed essendo $(5r-1)/(2r-1) < 4$, risulta

$$| H_2(x) | < \mu \frac{4r+1}{4} \frac{(4n^2-1)^2}{(2r+n-1)^4\pi^4} \left\{ \frac{96}{25} \frac{1}{2r-1} + \frac{9}{2} \right\} < \frac{17(4r+1)(4n^2-1)^2}{64r\pi(2r+n-1)^4\pi^4} ;$$

abbiamo allora dalla (13) e dalle limitazioni ottenute per $H_1(x)$, $H_2(x)$, $H_3(x)$

$$| K(x) | < \frac{(4n^2-1)^2}{(2r+n-1)^3\pi^3} C(r) , \tag{17}$$

dove abbiamo posto

$$C(r) = \frac{11}{15 \cdot 32} \frac{(6r-1)(5r-1)}{(2r-1)^2} + \frac{17(4r+1)}{64r(2r-1)\pi^2} + \frac{3(4r+1)}{16r(4r-1)^2\pi^2} . \tag{18}$$

Infine è

$$| R_3(x) | < | 4n^2-1 | \left\{ \frac{9 \cdot 25}{3!\, 8^3 \left(x_r - \frac{\pi}{4}\right)^3} + \frac{9 \cdot 25 \cdot 49}{4!\, 8^4 \left(x_r - \frac{\pi}{4}\right)^4} \right\} <$$

$$< \frac{| 4n^2-1 | \cdot 75}{2 \cdot 64(2r+n-1)^3\pi^3} \left\{ 1 + \frac{1}{2r-1} \right\} ,$$

ossia

$$| R_3(x) | < \frac{| 4n^2-1 | \cdot 75}{64(2r+n-1)^3\pi^3} \frac{r}{2r-1} ; \tag{19}$$

e dalla (7) abbiamo

$$H(x) = -\frac{a_1}{x} \frac{a_2 + a_1^2}{x^2} \operatorname{cotg}\left(x - \frac{1}{2} n\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \cos\left(x - \frac{1}{2} n\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \mu^3 -$$

$$- \frac{a_2 + a_1^2}{x^2} \operatorname{cotg}^2\left(x - \frac{1}{2} n\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \cos\left(x - \frac{1}{2} n\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \mu^4 +$$

$$+ \frac{[v_0(x)\mu + v_1(x)\mu^2]^3}{3!} \operatorname{sen}\left(x - \frac{1}{2} n\pi - \frac{1}{4}\pi\right) ,$$

da cui, per $x_r - \pi/4 < x < x_r + \pi/4$,

$$| H(x) | < \frac{(4n^2-1)^2 \left| \frac{4n^2+7}{2} \right|}{8^3 x^3} + \frac{(4n^2-1)^2 \left(\frac{4n^2+7}{2}\right)^2}{2 \cdot 8^4 \cdot x^4} +$$

$$+ \frac{| (4n^2-1)^3 |}{3!\, 2^3(2r+n-1)^3\pi^3} \frac{5r-1}{5^3(2r-1)^3} < \frac{(4n^2-1)^2 \cdot 11}{2 \cdot 8^3(2r+n-1)^3\pi^3} + \frac{(4n^2-1)^2 \cdot 121}{8^3(2r+n-1)^4\pi^4} +$$

$$+ \frac{(4n^2-1)^2 \cdot 3 \cdot (5r-1)^3}{3!\, 2^3(2r+n-1)^3\pi^3 5^3(2r-1)^3} < \frac{(4n^2-1)^2}{2^4(2r+n-1)^3\pi^3} \left\{ 2 + \frac{125}{100(2r-1)} \right\} ,$$

ossia

$$| H(x) | < \frac{(4n^2 - 1)^2}{2^6(2r + n - 1)^3\pi^3} \frac{16r - 3}{2r - 1} . \tag{20}$$

§ 4. – Un' altra limitazione.

Posto

$$g(x) = g_0(x) + a_1 g_1(x)\mu + a_2 g_2(x)\mu^2 , \tag{21}$$

con x variabile in $(x_r - \pi/4,\ x_r + \pi/4)$, abbiamo

$$g(x) = \cos\left(x - \frac{1}{2} n\pi - \frac{1}{4}\pi\right) - \frac{4n^2 - 1}{8x} \operatorname{sen}\left(x - \frac{1}{2} n\pi - \frac{1}{4}\pi\right) -$$

$$- \frac{(4n^2 - 1)(4n^2 - 3^2)}{2!\, 8^2 x^2} \cos\left(x - \frac{1}{2} n\pi - \frac{1}{4}\pi\right),$$

quindi

$$- g'(x) = \frac{4n^2 - 1}{8x}\left[1 - \frac{4n^2 - 9}{8x^2}\right] \cos\left(x - \frac{1}{2} n\pi - \frac{1}{4}\pi\right) +$$

$$+ \left[1 - \frac{4n^2 - 1}{8x^2} - \frac{(4n^2 - 1)(4n^2 - 9)}{2!\, 8^2 x^2}\right] \operatorname{sen}\left(x - \frac{1}{2} n\pi - \frac{1}{4}\pi\right) .$$

Essendo $x_r - \pi/4 \leqslant x \leqslant x_r + \pi/4$, posto $x = x_r + \varepsilon\pi/4$ con $-1 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, risulta

$$\operatorname{sen}\left(x_r - \frac{1}{2} n\pi - \frac{1}{4}\pi + \varepsilon\frac{\pi}{4}\right) = (-1)^{r+1} \cos \varepsilon \frac{\pi}{4} ,$$

$$\cos\left(x_r - \frac{1}{2} n\pi - \frac{1}{4}\pi + \varepsilon\frac{\pi}{4}\right) = (-1)^{r} \operatorname{sen} \varepsilon \frac{\pi}{4} ,$$

quindi

$$(-1)^r g'(x) = \left[1 - \frac{4n^2 - 1}{8x^2} - \frac{(4n^2 - 1)(4n^2 - 9)}{2!\, 8^2 x^2}\right] \cos \varepsilon \frac{\pi}{4} -$$

$$- \frac{4n^2 - 1}{8x}\left[1 - \frac{4n^2 - 9}{8x^2}\right] \operatorname{sen} \varepsilon \frac{\pi}{4} ,$$

e

$$|g'(x)| > \left[1 - \frac{3}{2(2r-1)^2\pi^2} - \frac{27}{2^5(2r-1)^2\pi^2} - \frac{3}{4(2r-1)\pi} - \frac{27}{2^3(2r-1)^3\pi^3}\right]\frac{\sqrt{2}}{2} >$$

$$> \left[1 - \frac{2}{(2r-1)\pi}\right]\frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{6r-5}{3(2r-1)}\frac{\sqrt{2}}{2},$$

e si ha dunque

$$|g'(x)| > \frac{6r-5}{3(2r-1)}\frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{22}$$

Si ha poi

$$|g'(x)| < 1 + \frac{3}{2(2r-1)^2\pi^2} + \frac{27}{2^5(2r-1)^2\pi^2} + \frac{3}{4(2r-1)\pi}\left[1 + \frac{9}{2(2r-1)^2\pi^2}\right]\frac{\sqrt{2}}{2} <$$

$$< \left[\frac{3}{2} + \frac{9}{4(2r-1)\pi^2} + \frac{3\cdot 27}{2^6(2r-1)\pi^2} + \frac{1}{4(2r-1)} + \frac{1}{8(2r-1)}\right]\frac{\sqrt{2}}{2} <$$

$$< \left[\frac{3}{2} + \frac{3}{4(2r-1)} + \frac{1}{8(2r-1)}\right]\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{6r-1}{2(2r-1)}\frac{\sqrt{2}}{2},$$

ossia

$$|g'(x)| < \frac{6r-1}{2(2r-1)}\frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{23}$$

§ 5. - Esistenza di uno zero x_r^0 di $g(x)$ nell'intervallo $(x_r - \pi/4,\ x_r + \pi/4)$ e limitazione di $g(x)$ nei punti $x_r - \pi/4$ e $x_r + \pi/4$.

Ricordando che

$$\operatorname{sen}\left(x_r - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right) = (-1)^{r+1},$$

si ha

$$g\left(x_r - \frac{\pi}{4}\right) = (-1)^{r+1}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{4n^2-1}{8\left(x_r - \frac{\pi}{4}\right)}(-1)^{r+1}\frac{\sqrt{2}}{2} -$$

$$- \frac{(4n^2-1)(4n^2-9)}{2!\,8^2\left(x_r - \frac{\pi}{4}\right)^2}(-1)^{r+1}\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$g\left(x_r+\frac{\pi}{4}\right)=(-1)^r\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{4n^2-1}{8\left(x_r-\frac{\pi}{4}\right)}(-1)^{r+1}\frac{\sqrt{2}}{2}-$$
$$-\frac{(4n^2-1)(4n^2-9)}{2!\,8^2\left(x_r-\frac{\pi}{4}\right)^2}(-1)^r\frac{\sqrt{2}}{2},$$

ed essendo

$$\frac{|4n^2-1|}{8\left(x_r-\frac{\pi}{4}\right)}<\frac{|4n^2-1|}{4\pi}<1,$$

risulta

$$g\left(x_r-\frac{\pi}{4}\right)\cdot g\left(x_r+\frac{\pi}{4}\right)<0,$$

ed esiste allora almeno uno zero x_r^0 di $g(x)$ in $(x_r-\pi/4,\ x_r+\pi/4)$.

Abbiamo poi

$$\left|g\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|>\frac{\sqrt{2}}{2}\left[1-\frac{3}{4(2r-1)\pi}-\frac{27}{2^5(2r-1)^2\pi^2}\right]>$$
$$>\frac{\sqrt{2}}{2}\left[1-\frac{1}{4(2r-1)}-\frac{3}{2^5(2r-1)}\right]>\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{16r-11}{8(2r-1)},$$

$$\left|g\left(x_r+\frac{\pi}{4}\right)\right|>\frac{\sqrt{2}}{2}\left[1-\frac{1}{4(2r-1)\pi}-\frac{27}{2^4(2r-1)^2\pi^2}\right]>\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{16r-10}{8(2r-1)};$$

ossia

$$\left|g\left(x_r-\frac{\pi}{4}\right)\right|>\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{16r-11}{8(2r-1)},\quad\left|g\left(x_r+\frac{\pi}{4}\right)\right|>\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{16r-10}{8(2r-1)}.\tag{24}$$

§ 6. - Limitazione di $|x_r^*-x_r^0|$.

Essendo

$$g\left(x_r-\frac{\pi}{4}\right)=\left(x_r-\frac{\pi}{4}-x_r^0\right)g'(\underline{x}),\qquad\text{con}\quad x_r-\frac{\pi}{4}<\underline{x}<x_r^0,$$

dalla prima delle (24) e dalla (23) segue

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{16r-11}{8(2r-1)}<\left|x_r-\frac{\pi}{4}-x_r^0\right|\frac{6r-1}{2(2r-1)}\,\frac{\sqrt{2}}{2},$$

da cui

$$x_r^0-\left(x_r-\frac{\pi}{4}\right)>\frac{16r-11}{4(6r-1)}.$$

Analogamente

$$g\left(x_r + \frac{\pi}{4}\right) = \left(x_r + \frac{\pi}{4} - x_r^0\right) g'(\underline{\underline{x}}) , \quad \text{con} \quad x_r^0 < \underline{\underline{x}} < x_r + \frac{\pi}{4} ,$$

e dalla seconda delle (24) e dalla (23) abbiamo

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{16r - 10}{8(2r-1)} < \left(x_r + \frac{\pi}{4} - x_r^0\right) \frac{6r-1}{2(2r-1)} \frac{\sqrt{2}}{2} ,$$

ossia

$$x_r + \frac{\pi}{4} - x_r^0 > \frac{16r - 10}{4(6r-1)} ,$$

e quindi per tutti gli zeri x_0 di $g(x)$ compresi in $(x_r - \pi/4, x_r + \pi/4)$, [uno almeno esistente per il n. 5], vale la limitazione

$$x_r - \frac{\pi}{4} + \frac{16r - 11}{4(6r-1)} < x_r^0 < x_r + \frac{\pi}{4} - \frac{16r-10}{4(6r-1)} . \tag{25}$$

Riprendiamo ora la (6) che per la posizione (21) diviene

$$g_0[x + v_0(x)\mu + v_1(x)\mu^2] = g(x) + H(x) ,$$

e si ha

$$g_0[x + v_0(x)\mu + v_1(x)\mu^2] = (x - x_r^0)g'(x_r') + H(x) ,$$

con x_r' compreso fra x e x_r^0.

Si ha allora che se

$$(\min | g'(x) |) \cdot | x - x_r^0 | - \max | H(x) | > 0 ,$$

ed anche per la (22) e la (26) se

$$\frac{6r-5}{3(2r-1)} \frac{\sqrt{2}}{2} | x - x_r^0 | - \frac{(4n^2-1)^2}{2^6(2r+n-1)^3\pi^3} \frac{16r-3}{2r-1} > 0 ,$$

cioè se

$$| x_r - x_r^0 | > \frac{(4n^2-1)^2}{2^6(2r+n-1)^3\pi^3} \frac{3(16r-3)}{6r-5} \sqrt{2} ,$$

esiste almeno uno zero $\bar{x}_r^*$ di $g_0[x + v_0(x)\mu + v_1(x)\mu^2]$ in

$$\left[x_r^0 - \frac{(4n^2-1)^2}{2^6(2r+n-1)^3\pi^3} \frac{3(16r-3)}{6r-5} \sqrt{2} ,\ x_r^0 + \frac{(4n^2-1)^2}{2^6(2r+n-1)^3\pi^3} \frac{3(16r-3)}{6r-5} \sqrt{2}\right] .$$

Con facili calcoli si prova, tenendo presente la (25), che questo zero $\bar{x}_r^*$ cade in $(x_r - \pi/4,\ x_r + \pi/4)$.

Se ora poniamo

$$l_r = \bar{x}_r^* + v_0(\bar{x}_r^*)\mu + v_1(\bar{x}_r^*)\mu^2$$

si ha

$$l_r > x_r - \frac{\pi}{4} - \frac{|4n^2 - 1|}{2(2r + n - 1)\pi}\,\frac{5r - 1}{5(2r - 1)},$$

ed essendo $(5r-1)/(2r-1) < 4$ risulta

$$l_r > (2r + n - 1)\frac{\pi}{2} - \frac{6}{5(2r - 1)} > (2r + n - 1)\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}\pi = x_{r-1},$$

ed anche

$$l_r < x_r + \frac{\pi}{4} + \frac{|4n^2 - 1|}{2(2r + n - 1)\pi}\,\frac{5r - 1}{5(2r - 1)} < x_{r+1},$$

ne viene che essendo $g_0[\bar{x}_r^* + v_0(\bar{x}_r^*)\mu + v_1(\bar{x}_r^*)\mu^2] = 0$ è

$$\bar{x}_r^* + v_0(\bar{x}_r^*)\mu + v_1(\bar{x}_r^*)\mu^2 = x_r,$$

e si può assumere nel n. 2 $x_r^* = \bar{x}_r^*$ e sussiste perciò la limitazione

$$|x_r^* - x_r^0| < \frac{3(4n^2 - 1)^2(16r - 3)\sqrt{2}}{2^6(2r + n - 1)^3\pi^3(6r - 5)}. \tag{26}$$

§ 7. - Limitazione di $|j_{n,r} - x_r^0|$.

Se indichiamo con $j_{n,r}$ l'r-esimo zero di $J_n(x)$ valgono le limitazioni di SCHAFHEITLIN (7)

$$(2r + n)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} < j_{n,r} < (2r + n)\frac{\pi}{2} - \frac{1}{8}\pi - n\frac{\pi}{4},$$

per

$$-\frac{1}{2} < n \leqslant \frac{1}{2}, \qquad r = 1, 2, \ldots,$$

e queste ci assicurano l'esistenza di uno zero $j_{n,r}$ di $J_n(x)$, quando $0 \leqslant n \leqslant 1/2$, $r = 1, 2, \ldots$, nell'intervallo $(x_r - \pi/4,\ x_r + \pi/4)$.

---

(7) P. SCHAFHEITLIN, *Über die Gaussche und Besselsche Differentialgleichung und eine neue Integralform der letzteren*. J. Reine Angew. Math., **114**, 31-44 (1895).
Cfr. pure G. N. WATSON, loc. cit. (6), p. 490.

Per provare l'esistenza di uno zero $j_{n,r}$ di $J_n(x)$ in $(x_r - \pi/4,\ x_r + \pi/4)$ anche nel caso $1/2 < n \leqslant 1$, essendo

$$f_n(x) = g(x) + R_3(x)\,,$$

occorrerà mostrare che

$$\left| R_3\left(x_r \pm \frac{\pi}{4}\right)\right| < \left| g\left(x_r \pm \frac{\pi}{4}\right)\right|, \quad \text{per } \frac{1}{2} < n \leqslant 1, \quad r = 1, 2, \ldots,$$

cioè per la (19) e le (24) che

$$\frac{(4n^2-1)75r}{4(2r+n-1)^3} < \sqrt{2}(16r-11)\,, \qquad \frac{1}{2} < n \leqslant 1.$$

È infatti per $1/2 < n \leqslant 1$

$$\frac{(4n^2-1)75r}{4(2r+n-1)^3} < \frac{3\cdot 75r}{4\left(2r-\dfrac{1}{2}\right)^3} = \frac{3\cdot 75}{2(4r-1)^2} + \frac{3\cdot 75}{2(4r-1)^3}\,,$$

quindi, già per $r = 2$, abbiamo

$$\frac{(4n^2-1)75r}{4(2r+n-1)^3} < \frac{3\cdot 75}{2\cdot 49} + \frac{3\cdot 75}{2\cdot 7^3} < \sqrt{2}\cdot 21\,.$$

Nel caso $r = 1$ dobbiamo invece provare che per $1/2 < n \leqslant 1$ è

$$\frac{75}{4}\,\frac{4n^2-1}{(n+1)^3} < 5\sqrt{2}\,.$$

La funzione $(4n^2-1)/(n+1)^3$ è una funzione crescente di n e risulta quindi

$$\frac{4n^2-1}{(n+1)^3} \leqslant \frac{3}{8} \qquad 1/2 < n \leqslant 1\,.$$

Abbiamo allora, per $1/2 < n \leqslant 1$,

$$\frac{75(4n^2-1)}{4(n+1)^3} \leqslant \frac{75\cdot 3}{4\cdot 8} < 7{,}04 < 5\sqrt{2}\,.$$

Possiamo dunque concludere che per $0 \leqslant n \leqslant 1$, $r = 1, 2, \ldots,$ vale la limitazione

$$x_r - \frac{\pi}{4} < j_{n,r} < x_r + \frac{\pi}{4}\,. \tag{27}$$

Poichè x_r^0 è uno zero di $g(x)$ si ha

$$f_n(x) = (x - x_r^0)g'(x_r'') + R_3(x)\,,$$

con x_r'' compreso fra x e x_r^0, e allora se

$$(\min | g'(x) |) \cdot | x - x_r^0 | - \max | R_3(x) | > 0 ,$$

od anche per la (22) e la (19) se

$$| x - x_r^0 | > \frac{3(2r-1)\sqrt{2}}{6r-5} \frac{| 4n^2 - 1 | \cdot 75}{64(2r+n-1)^3\pi^3} \frac{r}{2r-1} ,$$

esiste almeno uno zero ξ_r di $f_n(x)$ nell'intervallo

$$\left[x_r^0 - \frac{3r\sqrt{2} \, | 4n^2 - 1 | \cdot 75}{64(6r-5)(2r+n-1)^3\pi^3}, \quad x_r^0 + \frac{3r\sqrt{2} \, | 4n^2 - 1 | \cdot 75}{64(6r-5)(2r+n-1)^3\pi^3}\right].$$

Risulta inoltre

$$\frac{3r\sqrt{2} \, | 4n^2 - 1 | \cdot 75}{64(6r-5)(2r+n-1)^3\pi^3} < \frac{16r-11}{4(6r-1)} . \tag{28}$$

Infatti il primo e il secondo membro di questa disuguaglianza sono rispettivamente una funzione decrescente e una funzione crescente di r e fino da $r = 2$ si ha

$$\frac{3r\sqrt{2} \, | 4n^2 - 1 | \cdot 75}{64(6r-5)(2r+n-1)^3\pi^3} < \frac{18 \cdot \sqrt{2} \cdot 75}{64 \cdot 7 \cdot 27 \cdot \pi^3} < \left[\frac{16-11}{4(6r-1)}\right]_{r=2} = \frac{21}{44} ;$$

mentre per $r = 1$ occorre provare che

$$\frac{3\sqrt{2} \, | 4n^2 - 1 | \cdot 75}{64(n+1)^3\pi^3} < \frac{1}{4} .$$

Ora per $1/2 < n \leqslant 1$ è, come precedentemente provato, $(4n^2 - 1)/(n+1)^3 \leqslant 3/8$, si ha quindi

$$\frac{3\sqrt{2}(4n^2 - 1) \cdot 75}{64(n+1)^3\pi^3} < \frac{\sqrt{2} \cdot 75}{64 \cdot 10} \cdot \frac{3}{8} < \frac{1}{4} , \qquad \frac{1}{2} < n \leqslant 1 ;$$

per $0 \leqslant n \leqslant 1/2$ si ha invece

$$\frac{3\sqrt{2} \, | 4n^2 - 1 | \cdot 75}{64(n+1)^3\pi^3} < \frac{3\sqrt{2} \cdot 75}{64\pi^3} < \frac{1}{4} , \qquad 0 \leqslant n \leqslant \frac{1}{2} .$$

La (28) risulta quindi provata per $0 \leqslant n \leqslant 1$ e $r = 1, 2, \ldots$.

Dalla (28) segue anche che lo zero ξ_r di $f_n(x)$ cade per la (25) nell'intervallo $(x_r - \pi/4, \; x_r + \pi/4)$ e poichè, per la (27), $j_{n,r}$ è l'unico zero di $f_n(x)$ in tale intervallo si ha $\xi_r = j_{n,r}$ e sussiste perciò la limitazione

$$(29) \qquad | j_{n,r} - x_r^0 | < \frac{3r\sqrt{2} \cdot | 4n^2 - 1 | \cdot 75}{64(6r-5)(2r+n-1)^3\pi^3} .$$

§ 8. – Formula asintotica per $j_{n,r}$ e valutazione dell'errore.

Dalla (26) e dalla (29) abbiamo

$$(30) \qquad | j_{n,r} - x_r^* | < \frac{3(4n^2-1)^2(16r-3)\sqrt{2} + 3r\sqrt{2}\, | 4n^2 - 1 | \cdot 75}{2^6(2r+n-1)^3\pi^3(6r-5)} ,$$

e per la (14)

$$(31) \qquad \boxed{j_{n,r} = x_r - \frac{4n^2-1}{8x_r} + \varepsilon(n, r)} ,$$

$$x_r = (2r+n)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} ,$$

con

$$| \varepsilon(n,r) | < | j_{n,r} - x_r^* | + | K(x) | + \frac{(4n^2-1)^2}{64x_r^3} ,$$

ovvero, tenuto conto delle (31), (17) e (18) e che per $r \geqslant 1$ è

$$\frac{(6r-1)(6r-5)}{(2r-1)^2} < 15 , \qquad \frac{(4r+1)(6r-5)}{r(2r-1)} < 15 , \qquad \frac{(6r-5)(4r+1)}{(4r-1)^2} < \frac{5}{2} ,$$

posto

$$A = | 4n^2 - 1 | ,$$

si ha

$$(32) \qquad \boxed{| \varepsilon(n, r) | < \frac{r(7{,}4A^2 + 1{,}1A)}{2^6(2r+n-1)^3\,(6r-5)}} ,$$

che è quanto ci eravamo proposti di ottenere.