MICHELE SCE (*)

Su alcune proprietà delle matrici permutabili e diagonalizzabili. (**)

In queste pagine espongo alcuni teoremi e proprietà concernenti due o più matrici permutabili e diagonalizzabili. Ciò mi è stato in parte suggerito dal corso di Matematiche Superiori tenuto nell'anno accademico 1948-1949 dal prof. S. CHERUBINO presso l'Università di Pisa, nel quale, oltre ai risultati di una Nota apparsa negli Atti dell'Accad. Peloritana del 1935, è stata esposta una semplice ed elegante dimostrazione di un teorema, sostanzialmente già noto, dovuto a F. PETER e H. WEYL. Il punto di partenza per le estensioni e complementi che qui presento si trova appunto in quella Nota e in questa dimostrazione.

Il presente scritto è diviso in due paragrafi. Nel primo si trovano estensioni dirette ed abbastanza immediate dei teoremi cui mi sono ora riferito; nel secondo vi sono osservazioni alquanto più complesse che dànno subito luogo ad alcune proprietà segnalate da N. A. WIEGMANN sul « Duke Mathematical Journal » del 1948.

§ 1. – Permutabilità e diagonalizzabilità.

1. – Dimostriamo in primo luogo che, come del resto è noto (1), *affinchè due matrici antisimmetriche siano permutabili occorre e basta che siano portate a forma diagonale dalla stessa matrice unitaria.*

(*) Indirizzo: Via delle Grazie, 3c - Livorno (Italia).
(**) Lavoro ricevuto il 5-XII-1949.
(1) F. PETER und W. WEYL, *Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuirlichen Gruppe* [Math. Ann. **97**, (1928)], p. 737. Questa dimostrazione è stata esposta dal prof. S. CHERUBINO nel suo corso sulle matrici, nell'anno accademico 1948-1949: la riproduco con il suo consenso.

Siano S e S' due matrici antisimmetriche di ordine n ed U la matrice unitaria che le diagonalizza entrambe. Si avrà:

$$US\overline{U}^{-1} = D\,, \qquad US'\overline{U}_{-1} = D'\,, \tag{1}$$

con $S = \overline{S}_{-1}$, $S' = \overline{S}_{-1}$, $U^{-1} = \overline{U}^{-1}$, D e D' matrici diagonali. Poichè

$$DD' = D'D\,,$$

sostituendo le (1), essendo U unitaria, riesce

$$USS'\overline{U}_{-1} = US'S\overline{U}_{-1}\,,$$

dalla quale si deduce che

$$SS' = S'S\,. \tag{2}$$

Valga, viceversa, la (2). Essendo S antisimmetrica esiste una matrice unitaria U che la diagonalizza senza in generale diagonalizzare S'; sarà:

$$US\overline{U}_{-1} = D\,, \qquad US'\overline{U}_{-1} = B\,,$$

con D matrice diagonale e B in generale non diagonale. Dalla (2) moltiplicando a sinistra per U ed a destra per $\overline{U}_{-1}$ si ottiene:

$$US\overline{U}_{-1}US'\overline{U}_{-1} = US'\overline{U}_{-1}US\overline{U}_{-1}\,,$$

quindi

$$DB = BD\,. \tag{3}$$

Poichè uno scambio tra le righe di una matrice insieme allo stesso scambio tra le colonne dà luogo ad una trasformazione per sostituzione ortogonale, possiamo supporre che la matrice U sia tale che in D gli elementi eguali sono consecutivi; perciò D si può considerare composta mediante le matrici scalari $\alpha_i I_{\mu_i}$, dove le α_i sono le radici caratteristiche distinte di S e μ_i le loro molteplicità. Considerando la matrice B suddivisa in matrici parziali B_{jk} del tipo (μ_j, μ_k) e sostituendo nella (3), posto che le radici caratteristiche distinte della S siano m, si ottengono le m^2 relazioni:

$$\alpha_j B_{jk} = B_{jk}\alpha_k \qquad (j,\, k = 1,\, 2,\, \ldots,\, m),$$

da cui, essendo $\alpha_j \neq \alpha_k$, si ha:

$$B_{jk} = 0 \quad \text{per} \quad j \neq k\,.$$

Dunque anche la B risulta composta mediante le matrici $B_{jj} = B_j$ degli stessi ordini delle $\alpha_j I_{\mu_j}$. Essendo S' antisimmetrica lo è anche B e quindi le B_j. Esistono perciò matrici unitarie $U^{(j)}$ che diagonalizzano le B_j; per queste B_j si ha cioè:

$$U^{(j)}B_j\overline{U}^{(j)}_{-1} = D_j\,, \qquad U^{(j)}\alpha_j I_{\mu_j}\overline{U}^{(j)}_{-1} = \alpha_j I_{\mu_j}\,,$$

con D_j matrice diagonale di ordine μ_j. Chiamando U' la matrice composta mediante le $U^{(j)}$, la U' sarà unitaria e ci dà:

$$U'B\overline{U}'_{-1} = D', \qquad U'D\overline{U}'_{-1} = D,$$

con D' matrice diagonale composta mediante le D_j e manifestamente si ha

$$U'D\overline{U}'_{-1} = U'US\overline{U}_{-1}\overline{U}'_{-1} = D, \qquad U'US'\overline{U}_{-1}\overline{U}'_{-1} = D',$$

dove $U'U$ è unitaria come prodotto di matrici unitarie.

Il teorema vale anche per matrici antiemisimmetriche poichè una matrice antiemisimmetrica moltiplicata per lo scalare i, diventa antisimmetrica.

2. – Nel teorema dimostrato ci è bastato supporre S ortogonalmente diagonalizzabile, mentre l'antisimmetria di B (dovuta a quella di S') ci ha consentito di dedurre la diagonalizzabilità ortogonale delle B_i. Per liberare il teorema dalla ipotesi che S ed S' siano antisimmetriche basterà dunque dimostrare che: *se una matrice B composta mediante più altre è ortogonalmente diagonalizzabile lo sono anche le matrici componenti.*

Ciò segue subito dal seguente teorema (²) che può dedursi anche dal precedente: *Condizione necessaria e sufficiente perchè una matrice sia ortogonalmente diagonalizzabile è che le sue parti antisimmetrica ed antiemisimmetrica siano permutabili.*

Infatti, dette S e T rispettivamente la parte antisimmetrica ed antiemisimmetrica di B, si ha

$$2S = (B + \overline{B}_{-1}), \qquad 2T = (B - \overline{B}_{-1}).$$

Quindi, se B è composta mediante le B_{ik} la S e la T saranno composte mediante le S_i e le T_i parti antisimmetriche ed antiemisimmetriche delle B_i. Essendo B ortogonalmente diagonalizzabile sarà, per il teorema citato:

$$ST = TS,$$

quindi

$$S_iT_i = T_iS_i,$$

e perciò tutte le B_i sono ortogonalmente diagonalizzabili.

Possiamo dunque asserire che *affinchè due matrici ortogonalmente diagonalizzabili siano permutabili occorre e basta che siano portate a forma diagonale da una stessa matrice unitaria.* Quest'ultima porterà a forma diagonale anche le parti antisimmetriche e antiemisimmetriche delle due matrici (³).

(²) S. Cherubino, *Sulle matrici permutabili o diagonalizzabili.* [Atti Accad. Peloritana, Vol. 37 (Messina 1935, parte II)], n. 4, *b*).

(³) Cfr. S. Cherubino, Nota cit. in (²), n. 4 *a*).

3. - Abbiamo ora ricordato che se una matrice A è ortogonalmente diagonalizzabile, essa e le sue parti antisimmetrica ed antiemisimmetrica sono tutte e tre diagonalizzabili con la stessa matrice unitaria e sono perciò a due a due permutabili. Anche questo fatto è vero in generale, cioè si ha che:

affinchè tre matrici ortogonalmente diagonalizzabili siano a due a due permutabili occorre e basta che siano portate a forma diagonale da una stessa matrice unitaria.

La sufficienza della condizione è manifesta. Si abbia, viceversa:

$$AB = BA\,, \tag{4'}$$

$$AC = CA\,, \tag{4''}$$

$$BC = CB\,, \tag{4'''}$$

e sia U la matrice unitaria che diagonalizza A ma non, in generale, B e C. Si ha, con U unitaria opportuna:

$$UA\overline{U}_{-1} = D\,, \tag{5'}$$

$$UB\overline{U}_{-1} = B'\,, \tag{5''}$$

$$UC\overline{U}_{-1} = C'\,, \tag{5'''}$$

con D matrice diagonale. Possiamo anche qui supporre che in D gli elementi eguali siano consecutivi, ossia che D sia composta mediante matrici scalari $\alpha_i I_{\mu_i}$ dove ancora le α_i sono le radici caratteristiche distinte di A e μ_i le loro molteplicità. Per la (4') e la (4'') B' e C' sono permutabili con D, quindi sono composte mediante matrici B_i e C_i degli stessi ordini delle $\alpha_i I_{\mu_i}$. Dalla (4''') moltiplicando a sinistra per U ed a destra per U_{-1} si ottiene

$$UB\overline{U}_{-1}UC\overline{U}_{-1} = UC\overline{U}_{-1}UB\overline{U}_{-1}\,,$$

ossia, sostituendo la (5'') e la (5'''):

$$B'C' = C'B'\,,$$

che, per quanto si è visto, si scinde nelle

$$B_iC_i = C_iB_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

essendo m il numero delle radici caratteristiche distinte di A. Poichè B e C sono ortogonalmente diagonalizzabili, lo sono anche B' e C' e, per quanto dimostrato al n. 2, anche le B_i e le C_i. Dunque queste ultime per ogni i sono diagonalizzabili con la stessa matrice unitaria $U^{(i)}$. Queste matrici unitarie al variare di i, trasformano in sè le rispettive parti di cui è composta D

e la matrice U' composta mediante le $U^{(i)}$ diagonalizza B' e C', mentre lascia inalterata D. Si ha dunque:

$$U'UA\overline{U}_{-1}\overline{U}'_{-1} = D\,, \qquad U'UB\overline{U}_{-1}\overline{U}'_{-1} = D'\,, \qquad U'UC\overline{U}_{-1}\overline{U}'_{-1} = D''\,,$$

cioè la matrice unitaria $U'U$ diagonalizza contemporaneamente A, B, C.

4. – Ne segue facilmente che *affinchè p matrici ortogonalmente diagonalizzabili siano a due a due permutabili occorre e basta che siano portate a forma diagonale da una stessa matrice unitaria.*

Siano $A_1, A_2, \dots, A_p$ le p matrici ortogonalmente diagonalizzabili e lo siano mediante la stessa matrice unitaria U; è allora immediato che esse sono a due a due permutabili.

Viceversa, queste p matrici siano a due a due permutabili e sia U una matrice unitaria che diagonalizza A_1 in modo che gli elementi eguali risultino consecutivi. Si ha:

$$UA_1\overline{U}_{-1} = D\,, \qquad UA_i\overline{U} = B_i\,, \qquad (i = 2, 3, \dots, p),$$

dove D è una matrice diagonale composta mediante le matrici scalari $\alpha_s I_{\mu_s}$ e le B_i sono matrici non diagonali, ma composte, per la solità ragione, mediante matrici B_{is} tutte dello stesso ordine della corrispondente $\alpha_s I_{\mu_s}$. Poichè le B_i sono a due a due permutabili, lo sono anche le $B_{2s}, B_{3s}, \dots, B_{ps}$. Se supponiamo vero il teorema per $p-1$ matrici, le B_{is} (variando i e tenendo fisso s) sono diagonalizzate dalla stessa matrice unitaria $U^{(s)}$, che lascia inalterata la matrice scalare $\alpha_s I_{\mu_s}$. La matrice U' composta mediante le $U^{(s)}$ lascia inalterata la matrice diagonale D e diagonalizza le B_i; dunque la matrice unitaria $U'U$ porta a forma diagonale tutte le p matrici date.

5. – Diciamo che una matrice è *diagonalizzabile* (senza avverbio) quando mediante trasformazioni per contragredienza o similitudine può essere portata a forma diagonale. Per queste matrici vale il teorema: *affinchè due matrici diagonalizzabili siano permutabili occorre e basta che siano portate a forma diagonale dalla stessa matrice* ([4]).

Partendo da questo teorema si dimostra, come al n. 3, che tre matrici diagonalizzabili sono a due a due permutabili allora e solo che siano diagonalizzate dalla stessa matrice e, per induzione, l'analogo del teorema del n. 4.

È ovvio che se A e B sono matrici diagonalizzabili con la stessa matrice H, anche la matrice $\alpha A + \beta B$ (con α e β numeri complessi qualunque) e la ma-

---

([4]) S. Cherubino, *Sulle matrici permutabili con una data* [Rend. Semin. Mat. Università Padova, **7**, n. 3-4 (1936)], § 3.

trice AB sono diagonalizzate da H. Perciò tutte le matrici diagonalizzabili con una stessa matrice H costituiscono un'algebra commutativa del corpo complesso. Viceversa, se $\mathfrak{A}$ è un'algebra commutativa del corpo complesso le cui matrici sono tutte diagonalizzabili, queste sono portate a forma diagonale da una comune matrice H (quella che diagonalizza le matrici di una base di $\mathfrak{A}$). L'ordine di una tale algebra non supera n, se n è l'ordine delle sue matrici, perchè isomorfa ad un'algebra di matrici diagonali cioè ad una sottoalgebra dell'algebra di tutte le matrici diagonali, il cui ordine è n.

In particolare, se $\mathfrak{G}$ è un gruppo abeliano di matrici diagonalizzabili, esso sarà contenuto in un'algebra commutativa a matrici diagonalizzabili e perciò anche le matrici di $\mathfrak{G}$ sono diagonalizzabili con una stessa matrice.

Segue anche che se $\mathfrak{A}$ è un'algebra commutativa di matrici in un corpo numerico Γ, l'insieme delle sue matrici diagonalizzabili costituisce una sottoalgebra di $\mathfrak{A}$. Infatti, dette matrici costituiscono un sistema S di $\mathfrak{A}$ e perciò sono combinazioni lineari di un certo numero, diciamo p, di esse. Queste p matrici sono quindi diagonalizzabili con una stessa matrice H, che diagonalizzerà tutto il sistema S. Trasformando $\mathfrak{A}$ con H si ha un'algebra $\mathfrak{A}^*$ isomorfa ad $\mathfrak{A}$, ed a S corrisponderà il sistema $S^* = H^{-1}SH$ di tutte le matrici diagonali di $\mathfrak{A}^*$. Questo S^* è ovviamente un'algebra perchè, essendo costituito da matrici tutte diagonali, conterrà il prodotto di due sue matrici qualsiasi che, appartenendo ad $\mathfrak{A}^*$, apparterrà anche ad S^*. Perciò anche S, isomorfo ad S^*, è un'algebra.

Lo stesso può dirsi se, più particolarmente, S è il sistema di tutte le matrici *ortogonalmente* diagonalizzabili dell'algebra $\mathfrak{A}$.

Analoga proprietà si ha considerando un gruppo abeliano $\mathfrak{G}$ e l'insieme delle sue matrici diagonalizzabili.

Se $\mathfrak{A}$ non è commutativa, si può dire soltanto che tutti quei suoi elementi che sono diagonalizzabili con una stessa matrice H costituiscono una sottoalgebra (commutativa) di $\mathfrak{A}$.

§ 2. – Teoremi particolari e conseguenze.

6. – Diciamo *spettro* della matrice A l'insieme delle sue radici caratteristiche. Si può allora enunciare il teorema:

date tre matrici A, B, C, la prima e la seconda non degeneri, la seconda diagonalizzabile, perchè si abbia $AB = CA$ *occorre e basta che* $AB^r = C^rA$, *con r intero positivo arbitrario,* > 1, *purchè, se α è un elemento dello spettro di B, $\varepsilon\alpha$ non appartenga nè allo spettro di B nè a quello di C, ε essendo, una radice r-esima dell'unità.*

La necessità della condizione è manifesta. Infatti, se:

$$AB = CA\,,$$

moltiplicando a destra per B si ha

$$AB^2 = CAB\,,$$

da cu

$$AB^2 = C^2A\,;$$

e così continuando.

Viceversa, sia

$$B^r = A^{-1}C^rA\,,$$

e sia H la matrice che diagonalizza B e quindi B^r. Si abbia, cioè:

$$H^{-1}BH = D\,, \qquad H^{-1}B^rH = D^r\,,$$

con D matrice diagonale i cui elementi eguali possiamo sempre supporre consecutivi in modo che D sia composta mediante le matrici scalari $\alpha_i I_{\mu_i}$. Allora, per l'ipotesi sullo spettro di B, anche D^r è composta allo stesso modo e posto:

$$N = H^{-1}A^{-1}CAH\,,$$

si ottiene che:

$$N^r = D^r\,, \tag{6}$$

e che N è permutabile con D^r. Perciò N è composta mediante le matrici N_i di ordini μ_i come D^r mediante le $\alpha_i^r I_{\mu_i}$; allora la (6) diventa

$$N_i^r = \alpha_i^r I_{\mu_i}\,.$$

Se H_i è la matrice che porta N_i alla forma canonica C_i e perciò N_i^r in C_i^r, H_i lascia inalterata $\alpha_i^r I_{\mu_i}$, onde, per la (6), C_i^r deve essere una matrice scalare, il che sarebbe impossibile se C_i non fosse diagonale o degenere (per assicurarsene basta guardare la formula che dà le potenze della forma canonica di una matrice). Avendo supposto non degeneri A e B è tale anche C, quindi N e C_i; perciò C_i deve essere diagonale. Detta quindi H' la matrice composta mediante le H_i, H' diagonalizza N^r lasciando inalterata D^r. Perciò, chiamando D' la matrice composta mediante le C_i, la (6) diventa

$$D'^r = D^r\,,$$

dalla quale si ottiene

$$D' = JD\,,$$

dove J è una matrice diagonale ciclica di periodo r, cioè tale che $J^r = I$.

Per le ipotesi poste sullo spettro di C, che coincide con quello di N, J deve ridursi all'identità, dunque:

$$D' = D .$$

E poichè D è composta come D^r, trasformando con H'^{-1} si ha

$$N = D ,$$

e quindi

$$H^{-1}A^{-1}CAH = H^{-1}BH ,$$

da cui

$$A^{-1}CA = B ,$$

che è quello che volevamo dimostrare.

Osservazione. Nel corso della dimostrazione abbiamo visto che se una potenza N^r, $r > 1$, è diagonalizzabile lo è anche N; e poichè N è una trasformata di C anche C è diagonalizzabile.

Come corollari otteniamo che:

a) Date le matrici A, B, C, la prima non degenere, le altre antisimmetriche con radici caratteristiche tutte dello stesso segno, se è

$$AB^r = C^rA \quad \textit{è anche} \quad AB = CA .$$

Basta osservare che le radici reali dell'unità possono essere soltanto ± 1.

b) Date due matrici A e B la seconda diagonalizzabile e tale che se α è un elemento del suo spettro $\varepsilon\alpha$ non lo sia (essendo ε una radice r-esima dell'unità)

$$\textit{da} \quad AB^r = B^rA \quad \textit{segue} \quad AB = BA .$$

Scambiando A con B e combinando si ottiene un terzo corollario:

c) Date due matrici A e B diagonalizzabili e tali che se α appartiene allo spettro di A, β a quello di B, $\varepsilon\alpha$ ed $\eta\beta$ non appartengono (rispettivamente) agli spettri di A e di B (dove ε è una radice r-esima, η una s-esima dell'unità), da

$$A^rB^s = B^sA^r \quad \textit{segue} \quad AB = BA .$$

7. – Vogliamo mostrare come usando i precedenti teoremi si possono raggiungere alcune proprietà contenute in una recente nota di N. A. WIEGMANN (5).

Per questo ricordiamo che una matrice A si dice *normale* se

$$A\overline{A}_{-1} = \overline{A}_{-1}A .$$

Usando il teorema di CHERUBINO del n. 2, si ha:

(5) N. A. WIEGMANN, *Normal products of matrices* [Duke Math. J., **15**, n. 3 (1948)], p. 633.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una matrice sia ortogonalmente diagonalizzabile è che sia normale [6].

Ne segue che, i teoremi validi per matrici ortogonalmente diagonalizzabili valgono per le matrici normali. Ciò posto dimostriamo che, come già noto:

Ogni matrice A non degenere si può scomporre nel prodotto di una matrice unitaria e di una antisimmetrica. Precisamente si ha:

$$A = US' = SU\,, \qquad U\overline{U}_{-1} = I\,, \qquad S = \overline{S}_{-1}\,, \qquad S' = \overline{S}'_{-1}\,.$$

In particolare, se A è normale, $S = S'$.

Data la matrice A è ben determinata la matrice antisimmetrica $A\overline{A}_{-1}$ e posto $A\overline{A}_{-1} = S^2$ resta ben determinata S. Diagonalizziamo infatti $A\overline{A}_{-1}$ con una matrice unitaria V e poniamo

$$VA\overline{V}_{-1} = B\,, \qquad VA\overline{A}_{-1}\overline{V}_{-1} = D^2\,,$$

quindi

$$B\overline{B}_{-1} = D^2\,.$$

Allora, detti d_i gli elementi della matrice diagonale D^2, b_{ik} quelli di B e dicendo n l'ordine delle matrice considerate, si ottiene che:

$$\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\overline{b}_{ik} = d_i\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Le radici caratteristiche di S^2 sono dunque positive, perciò possiamo prendere come elementi di D le radici quadrate aritmetiche (reali) di quelli di D^2.

La matrice $\overline{V}_{-1}DV = S$ risulta antisimmetrica a radici caratteristiche positive, l'abbiamo ottenuta univocamente da A e ci dà $A\overline{A}_{-1} = S^2$. Analogamente, partendo da $\overline{A}_{-1}A$ si sarebbe ottenuta una matrice antisimmetrica S' pure a radici caratteristiche positive e con $\overline{A}_{-1}A = S'^2$. Se A è non degenere, sono tali anche S ed S', perciò possiamo considerare la S^{-1} e la matrice

$$U = S^{-1}A\,,$$

che risulta unitaria. Similmente si trova che è unitaria la matrice

$$U' = AS'^{-1}\,.$$

Vogliamo mostrare che $U = U'$. Per questo basta osservare che:

$$A\overline{A}_{-1}A = S^2A = AS'^2\,.$$

[1] Ved. la Nota di S. CHERUBINO citata in [2], n. 6, *a*).

Avendo S e S' radici caratteristiche tutte positive, possiamo applicare il primo corollario del teorema sopra dimostrato e concludere che

$$SA = AS', \quad \text{ossia} \quad U' = AS'^{-1} = S^{-1}A = U .$$

L'ultima parte dell'enunciato, dopo ciò, è immediata poichè per definizione di matrice normale è $S^2 = S'^2$ da cui, per la positività delle radici caratteristiche di S e S', si ha $S = S'$.

Osservazione. In questo caso U e S sono permutabili ed esiste una matrice unitaria che le diagonalizza insieme e dunque diagonalizza anche A e $\overline{A}_{-1}$; perciò U, S, A e $\overline{A}_{-1}$ sono a due a due permutabili. Sia ora V la matrice unitaria che diagonalizza U, S ed A; si abbia cioè $A = US = SU$ e

$$VU\overline{V}_{-1} = U', \qquad VS\overline{V}_{-1} = S', \qquad VA\overline{V}_{-1} = D,$$

con U', S', D matrici diagonali. Allora

$$U'S' = S'U' = D,$$

ed essendo

$$U'\overline{U}'_{-1} = I, \qquad S' = \overline{S}'_{-1},$$

U' ed S' sono rispettivamente i fattori unitario ed antisimmetrico di D e le radici caratteristiche di A, cioè gli elementi di D, sono prodotti degli elementi di egual posto in U' ed in S', che sono rispettivamente numeri complessi di modulo uno e numeri reali positivi. Possiamo dunque dire che le radici caratteristiche di U sono i versori e quelle di S i moduli delle radici caratteristiche di A. Quanto si è detto chiarisce perchè la rappresentazione come quella che consideriamo si chiami *rappresentazione polare di una matrice normale.*

8. – Enunciamo ora in una forma leggermente diversa ma equivalente (come risulta dal secondo corollario del n. 6) un teorema per la cui dimostrazione rimandiamo alla citata Nota del WIEGMANN.

Condizione necessaria e sufficiente perchè il prodotto di due matrici normali A e B sia ancora normale è che

$$AB\overline{B}_{-1} = B\overline{B}_{-1}A, \qquad BA\overline{A}_{-1} = A\overline{A}_{-1}B .$$

Osserviamo che queste due condizioni non equivalgono alla permutabilità di A e B e che sono sufficienti soltanto prese insieme.

Da questo e da quanto precede deduciamo quest'altro teorema sostanzialmente dello stesso WIEGMANN:

Dato un insieme finito di matrici normali non degeneri $\{ {}^iA \}$ affinchè il prodotto di due qualunque dei suoi elementi sia ancora normale occorre e basta che esista una matrice unitaria U tale che le matrici $U\, {}^iA\overline{U}_{-1} = B_i$ risultino com-

poste mediante le matrici $\alpha_{si} V_{si}$, dove le α_{si} sono i moduli delle radici caratteristiche di ${}^iA$ e le V_{si} sono matrici unitarie di ordine eguale alla molteplicità di α_{si} per S_i, fattore antisimmetrico di ${}^iA$.

Infatti, se il prodotto di due matrici ${}^iA$ ed ${}^jA$ è ancora normale per il precedente teorema si ha

$$ {}^jA\, {}^j\bar{A}_{-1}\, {}^iA = {}^iA\, A\, {}^j\bar{A}_{-1}\,, $$

od anche, avendo posto ${}^kA = U^{(k)} S_k = S_k U^{(k)}$ (poichè le ${}^kA$ sono normali),

(7) $$ S_j^2\, {}^iA = {}^iA S_j^2\,, $$

da cui, trasponendo e coniugando,

$$ {}^i\bar{A}_{-1} S_j^2 = S_j^2\, {}^i\bar{A}_{-1}\,. $$

Moltiplicando poi a sinistra per ${}^iA$ ed usando la (7), si ha

$$ {}^iA\, {}^i\bar{A}_{-1} S_j^2 = {}^iA S_j^2\, {}^i\bar{A}_{-1} = S_j^2\, {}^iA\, {}^i\bar{A}_{-1} \quad \text{e quindi} \quad S_i^2 S_j^2 = S_j^2 S_i^2\,. $$

Ricordando che le radici caratteristiche delle S_i sono positive ed applicando il terzo corollario del teorema di n. 6, segue che

(8) $$ S_i S_j = S_j S_i\,. $$

La (7) possiamo scriverla

$$ S_j^2 S_i U^{(i)} = S_i U^{(i)} S_j^2\,, $$

dalla quale, poichè per la (8) anche S_i ed S_j^2 sono permutabili, si ricava

$$ S_i S_j^2 U^{(i)} = S_i U^{(i)} S_j^2\,, $$

e moltiplicando a sinistra per S_i^{-1}:

$$ S_j^2 U^{(i)} = U^{(i)} S_j^2\,, $$

da cui, per il secondo corollario del teorema di n. 6, si ha

(9) $$ S_j U^{(i)} = U^{(i)} S_j\,. $$

Abbiamo dunque ottenuto che $U^{(i)}$, S_i, S_j sono a due a due permutabili. Analogamente anche $U^{(j)}$, S_j, S_i risultano a due a due permutabili; perciò le S_i sono a due a due permutabili ed ogni S_i è permutabile con tutte le $U^{(i)}$. Possiamo allora trovare una matrice unitaria U che diagonalizzi tutte le S_i e siano S_i' le S_i diagonalizzate supponendo al solito che gli elementi eguali siano in S_j consecutivi. Dette $V^{(j)}$ le trasformate delle $U^{(j)}$ mediante la U, ogni $V^{(j)}$ è permutabile con S_i' e quindi è composta mediante matrici dello stesso ordine di quelle di S_i'; ma $V^{(j)}$ è permutabile anche con S_j', e dunque S_i' ed S_j' devono essere composte allo stesso modo, cioè con matrici scalari corrispondenti dello stesso ordine. Posto dunque $U\,{}^iA\,\overline{U}_{-1} = B_i = V^{(i)}S'_i$, le B_i hanno la forma indicata dal teorema. Che poi le α_{si} siano proprio i moduli delle radici caratteristiche delle ${}^iA$ si è visto nell'osservazione che chiude il n. 7.

Viceversa, se esiste una matrice unitaria U tale che le B_i abbiano la forma indicata dal teorema, le S_i vengono diagonalizzate dalla stessa matrice unitaria e dunque sono a due a due permutabili, cioè vale la (8). Inoltre, ogni $V^{(i)}$ è permutabile con tutte le S'_i, cioè ogni $U^{(i)}$ è permutabile con tutte le S_i. Perciò, moltiplicando la (8) a destra per $U^{(i)}$, si ha

$$S_iS_jU^{(i)} = S_jS_iU^{(i)}\,, \qquad \text{da cui} \qquad S_iU^{(i)}S_j = S_jS_iU^{(i)}\,,$$

cioè:

$$ {}^iAS_j = S_j\,{}^iA\,. \tag{10}$$

Similmente si trova che

$$ {}^jAS_i = S_i\,{}^jA\,. \tag{11}$$

Da queste (10), (11) segue che è anche

$$ {}^iAS_j^2 = S_j^2\,{}^iA\,, \qquad {}^jAS_i^2 = S_i^2\,{}^jA\,,$$

ossia, ricordando che

$$S_i^2 = {}^iA\,{}^i\overline{A}_{-1}\,, \qquad S_j^2 = {}^jA\,{}^j\overline{A}_{-1}\,,$$

risulta verificata la condizione perchè ${}^iA\,{}^jA$ sia normale.