T. MANACORDA (*)

Sul moto di un solido planare intorno ad un punto fisso. (**)

Da più di mezzo secolo gli studi sulla dinamica dei corpi rigidi pesanti sospesi per un punto si sono di necessità rivolti alla ricerca di integrali particolarizzati algebrici nelle componenti della velocità di rotazione $\boldsymbol{\omega}$, oppure allo studio di moti vicini ad un moto prefissato, in ispecie i moti perturbati di quelli alla POINSOT. Il più noto di questi casi di integrabilità parziale, e certo anche il più interessante, è quello scoperto da HESS nel 1890 e sottoposto poi a numerose ricerche (1). L'integrale delle equazioni di EULERO-POISSON dipende in questo caso da cinque costanti arbitrarie, e, perchè valga l'integrale particolarizzato di HESS, è necessario che il baricentro appartenga all'asse di una delle sezioni cicliche dell'ellissoide reciproco di inerzia relativo al punto fisso. Successivamente NIKOLAUS KOWALEWSKI ha sottoposto ad indagine generale il moto di un solido pesante intorno ad un punto fisso quando il suo baricentro appartiene ad un asse principale di inerzia, stabilendo un altro integrale particolarizzato (2). Gli studi di KOWALEWSKI furono poi proseguiti da O. CORLISS e R. FABBRI (3).

In questi ultimi anni sono apparsi in Italia diversi importanti lavori, ad

---

(*) Indirizzo: Via G. Dupré, 32 - Firenze (Italia).

(**) Lavoro ricevuto il 15-IV-1950.

(1) W. HESS, *Über die* EULER'*schen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikuläre Lösung des Problems der Bewegungen eines starren Körpers um einen festen Punkt*, Math. Ann., **37**, 153-181 (1890); P. A. NEKRASSOFF, *Recherches analytiques sur un cas de rotation d'un solide pesant autour d'un point fixe*, Math. Ann., **47**, 445-530 (1896).

(2) N. KOWALEWSKI, *Eine neue partikuläre Lösung der Differentialgleichungen des Bewegungs eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt*, Math. Ann., **65**, 528-537 (1908).

(3) O. CORLISS, *On the unsymmetrical Top*, Acta Math., **59**, 423-441 (1932); R. FABBRI, *Sopra una soluzione particolare delle equazioni del moto di un solido pesante intorno ad un punto fisso*, Atti Acc. Naz. Lincei, Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., (6) **19**, 497-415, 495-502, 872-873 (1934).

opera di G. GRIOLI e C. AGOSTINELLI, dedicati allo studio del moto di un solido pesante intorno ad un punto fisso quando il suo baricentro appartiene all'asse di una delle sezioni cicliche dell'ellissoide di inerzia relativo al punto fisso ([4]). Mi è parso quindi non privo di interesse la ricerca di qualche proprietà del moto di un solido quando il suo baricentro appartenga ad un piano principale, sia, cioè, secondo la denominazione di STÄCKEL, *planare*, senza ulteriori ipotesi, conducendo così una ricerca in certo senso parallela a quella di KOWALEWSKI.

Nella presente nota si cerca di esprimere le componenti della velocità di rotazione del solido come serie di una conveniente loro combinazione, proporzionale al cosidetto secondo invariante di HESS. Si constata che solo nel caso che un certo esponente caratteristico si annulli si perviene all'integrale generale delle equazioni di moto, mentre vengono indicati, in tali condizioni, tutti i casi in cui le equazioni di EULERO-POISSON ammettono un integrale particolarizzato algebrico nel suddetto invariante di HESS.

1. – Sia R un corpo rigido pesante girevole attorno al punto fisso O, e il suo baricentro G giaccia in uno dei piani principali di inerzia relativi ad O. Assumiamo una terna di riferimento trirettangolare $Oxyz$, con Oz coincidente in direzione e verso con OG e Oy coincidente con l'asse principale di inerzia normale al piano principale su cui giace G. Con ciò, G ha l'unica coordinata non nulla z_0 positiva. Detti $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ed $\mathfrak{E}$ i momenti di inerzia e l'unico momento centrifugo non nullo relativi alla terna scelta, e γ_1, γ_2, γ_3 le componenti rispetto alla medesima terna del versore del peso, le equazioni di EULERO-POISSON si scrivono

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{A}\dot{p} - \mathfrak{E}\dot{r} + (\mathfrak{C} - \mathfrak{B})rq - \mathfrak{E}pq = -mgz_0\gamma_2\,, \\ &\mathfrak{B}\dot{q} \qquad\;\; + (\mathfrak{A} - \mathfrak{C})pr + \mathfrak{E}(p^2 - r^2) = mgz_0\gamma_1, \\ &\mathfrak{C}\dot{r} - \mathfrak{E}\dot{p} + (\mathfrak{B} - \mathfrak{A})pq + \mathfrak{E}rq = 0\,, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} &\dot{\gamma}_1 = \gamma_2 r - \gamma_3 q\,, \\ &\dot{\gamma}_2 = \gamma_3 p - \gamma_1 r\,, \\ &\dot{\gamma}_3 = \gamma_1 q - \gamma_2 p\,. \end{aligned}\right.$$

In queste, p, q, r sono le componenti della velocità di rotazione $\boldsymbol{\omega}$ rispetto alla terna fissata e mg il peso del solido.

([4]) G. GRIOLI, *Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico*, Ann. Mat. Pura Appl., (4) **26**, 271-281 (1947); *Questioni di stabilità riguardanti le precessioni regolari del solido pesante asimmetrico*, Ann. Scu la Norm. Super. Pisa, (3) **1**, 43-74 (1947-50); C. AGOSTINELLI, *Sul moto di un corpo rigido pesante asimmetrico col baricentro appartenente all'asse di uno dei piani ciclici dell'elissoide di inerzia*, Atti Sem. Mat. Modena, 3, 248-260 (1948-49); *Sulla stabilità di un particolare moto di precessione regolare di un solido pesante asimmetrico*, Atti Ist. Veneto, **107**, 193-203 (1948-49); *Sul moto intorno ad un punto fisso di un corpo rigido pesante il cui baricentro appartiene all'asse di uno dei piani ciclici dell'ellissoide di inerzia*, Ann. Mat. Pura Appl., (4) **30**, 211-224 (1949-50).

Posto

$$\mathfrak{C}s = \mathfrak{C}r - \mathfrak{C}p \,, \tag{2}$$

di modo che $\mathfrak{C}s$ è il secondo invariante di HESS relativo al moto in esame, le equazioni (1) divengono

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} A\dot{p} - Lsq - \dfrac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}} Apq = -\rho\gamma_2 \,, \\ \mathfrak{B}\dot{q} - Msp + \dfrac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}} Ap^2 - \mathfrak{C}s^2 = \rho\gamma_1 \,, \\ \mathfrak{C}\dot{s} - Npq + \mathfrak{C}sq = 0 \,; \end{cases} \qquad \text{(II)} \quad \begin{cases} \dot{\gamma}_1 = \gamma_2 s + \dfrac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}} \gamma_2 p - \gamma_3 q \,, \\ \dot{\gamma}_2 = \gamma_3 p - \dfrac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}} \gamma_1 p - \gamma_1 s \,, \\ \dot{\gamma}_3 = \gamma_1 q - \gamma_2 p \,, \end{cases}$$

con

$$\text{(3)} \quad \begin{cases} \rho = mgz_0 \,; \quad A = \dfrac{\mathfrak{A}\mathfrak{C} - \mathfrak{C}^2}{\mathfrak{C}} \,, \qquad L = \dfrac{\mathfrak{C}(\mathfrak{B} - \mathfrak{C}) - \mathfrak{C}^2}{\mathfrak{C}} \,, \\ M = \dfrac{\mathfrak{C}(\mathfrak{C} - \mathfrak{A}) + 2\mathfrak{C}^2}{\mathfrak{C}} \,, \qquad N = \dfrac{\mathfrak{C}(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) - \mathfrak{C}^2}{\mathfrak{C}} \,. \end{cases}$$

Il caso di HESS è caratterizzato dalla condizione strutturale $N = 0$. Difatti allora l'ultima delle (I) ammette l'integrale (di HESS) $s = 0$. Nel caso di GRIOLI invece è $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, quindi $N = -\dfrac{\mathfrak{C}^2}{\mathfrak{C}}$, $M = -(L + N)$.

Escludiamo che si verifichi il caso di HESS. Allora s non è identicamente nulla, e si vede dalle (I) e (II) che se si riesce ad esprimere p, q, γ_1, γ_2, γ_3 in funzione di s, l'ultima delle (I) permette di determinare s, e quindi anche le altre variabili, in funzione del tempo con una quadratura.

Come è ben noto, per le (I) e (II) sussiste l'integrale dell'energia

$$\text{(III)} \qquad \rho\gamma_3 = \frac{1}{2}\{ Ap^2 + \mathfrak{B}q^2 + \mathfrak{C}s^2 \} - h \,, \qquad h \text{ costante},$$

che permette di esprimere il terzo coseno direttore della gravità in funzione di p, q ed s. Gli altri due coseni direttori si ricavano immediatamente dalle prime due equazioni (I). In queste espressioni si intende che p e q sono funzioni del tempo attraverso s. Se allora si elimina il tempo mediante l'ultima equazione, si ottengono per γ_1 e γ_2 le espressioni

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} \rho\gamma_1 = \dfrac{\mathfrak{B}}{2\mathfrak{C}} [Np - \mathfrak{C}s] \dfrac{dq^2}{ds} - Msp + \dfrac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}} Ap^2 - \mathfrak{C}s^2 \,, \\ \rho\gamma_2 = -\dfrac{A}{\mathfrak{C}} q[Np - \mathfrak{C}s] \dfrac{dp}{ds} + Lsq + \dfrac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}} Apq \,. \end{cases}$$

Derivando rispetto al tempo, tramite sempre s, e sostituendo nelle prime due equazioni (II), si trova che p e q^2 devono soddisfare alle equazioni differenziali [5]

$$(4_1)\qquad \frac{Np-\mathfrak{C}s}{\mathfrak{C}}\left\{\frac{\mathfrak{B}}{2\mathfrak{C}}[Np-\mathfrak{C}s]\frac{d^2q^2}{ds^2}+\frac{\mathfrak{B}}{2\mathfrak{C}}\left[N\frac{dp}{ds}-\mathfrak{C}\right]\frac{dq^2}{ds}+\right.$$
$$\left.+\left[3\frac{\mathfrak{C}A}{\mathfrak{C}}p+(A-M)s\right]\frac{dp}{ds}-Mp-3\mathfrak{C}s\right\}=D(s)\,,$$

$$(4_2)\qquad \frac{Np-\mathfrak{C}s}{\mathfrak{C}}\left\{\frac{A}{\mathfrak{C}}[Np-\mathfrak{C}s]\,q^2\frac{d^2p}{ds^2}+\frac{AN}{\mathfrak{C}}q^2\left(\frac{dp}{ds}\right)^2+\right.$$
$$+\frac{A}{2}\,\frac{Np-\mathfrak{C}s}{\mathfrak{C}}\,\frac{dp}{ds}\,\frac{dq^2}{ds}-2\,\frac{A\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}}\,q^2\frac{dp}{ds}-$$
$$\left.-\frac{1}{2}\left[(L+\mathfrak{B})s+\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}}(A+\mathfrak{B})p\right]\frac{dq^2}{ds}-Lq^2-\mathfrak{C}s^2-2\mathfrak{C}sp\right\}=pD(s)\,,$$

$$(5)\qquad D(s)=-\frac{1}{2}A\left(1-2\frac{\mathfrak{C}^2}{\mathfrak{C}^2}\right)p^2-\frac{1}{2}\mathfrak{B}q^2-$$
$$-\frac{1}{2}(3\mathfrak{C}-2\mathfrak{B})s^2+\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}}(L+\mathfrak{B})sp+h\,.$$

Si constata facilmente che nel caso in cui il baricentro del corpo si trovi su di un asse principale, le (4) divengono le equazioni trovate da KOWALEWSKI nel lavoro citato.

2. – Cerchiamo una soluzione delle (4) ponendo, in analogia a quanto fa KOWALEWSKI,

$$(6)\qquad Np-\mathfrak{C}s=\mathfrak{C}s^\gamma\sum_k{}_0^\infty\lambda_k s^k\,,\qquad q^2=s^{2\gamma}\sum_k{}_0^\infty\mu_k s^k,$$

con γ costante a priori indeterminata. Sostituendo nella (4_1) si perviene alla equazione

$$(7_1)\qquad s^{4\gamma-2}\sum_{k,\,l,\,m}(2\gamma+m)(3\gamma+l+m-1)\lambda_k\lambda_l\mu_m s^{k+l+m}+$$
$$+as^{3\gamma-1}\sum_{k,\,l,\,m}\lambda_k\lambda_l\lambda_m(m+\gamma)s^{k+l+m}+s^{2\gamma}\Big\{\sum_{k,\,l}[b(l+\gamma)+c)]\lambda_k\lambda_l s^{k+l}+$$
$$+\sum_k\mu_k s^k\Big\}+ds^{\gamma+1}\sum_k\lambda_k s^k+es^2-H=0$$

---

(5) Queste si riducono immediatamente a quelle trovate da C. AGOSTINELLI, loc. prima citata in (4), quando sia $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}$, cioè nel caso di GRIOLI.

con

$$(8)\quad \begin{cases} a = \dfrac{6A\mathfrak{C}\mathfrak{C}}{N^2\mathfrak{B}}\,, \qquad b = \dfrac{2}{\mathfrak{B}}\left[3\,\dfrac{\mathfrak{C}^2 A}{N^2} + \mathfrak{C}\,\dfrac{A-M}{N}\right], \\ c = \dfrac{2}{\mathfrak{B}}\left[\dfrac{A\mathfrak{C}^2}{2N^2} + \dfrac{2A\mathfrak{C}^2}{N^2} - \dfrac{M\mathfrak{C}}{N}\right], \qquad d = \dfrac{2\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}N}\left[\dfrac{A\mathfrak{C}}{N} + \dfrac{\mathfrak{A}\mathfrak{C}^2}{N\mathfrak{C}} + L\right], \\ e = \dfrac{2}{\mathfrak{B}}\left[\dfrac{1}{2}\,\dfrac{A\mathfrak{C}^2}{N^2}\left(1 - 2\,\dfrac{\mathfrak{C}^2}{\mathfrak{C}^2}\right) + \dfrac{3\mathfrak{C} - 2\mathfrak{B}}{2} - \dfrac{\mathfrak{C}^2}{N\mathfrak{C}}(L + \mathfrak{B})\right], \\ H = \dfrac{2h}{\mathfrak{B}}\,. \end{cases}$$

Sostituendo invece nella (4_2) le (6) si ottiene

$$(7_2)\quad \begin{aligned} & s^{5\gamma-2}\sum_{k,\,l,\,m,\,n}(m+\gamma)(2l+2m+n+6\gamma-2)\lambda_k\lambda_l\lambda_m\mu_n s^{k+l+m+n} + \\ & + a_1 s^{4\gamma-1}\sum_{k,\,l,\,m}(m+2\gamma)\lambda_k\lambda_l\mu_m s^{k+l+m} + \\ & + s^{3\gamma}\left\{ d_1\sum_{k,\,l,\,m}\lambda_k\lambda_l\lambda_m s^{k+l+m} - \sum_{k,\,l}\left[b_1 + \frac{1}{2}c_1(l+2\gamma)\right]\lambda_k\mu_l s^{k+l}\right\} + \\ & + s^{2\gamma+1}\left\{ f_1\sum_k \mu_k s^k - e_1\sum_{k,\,l}\lambda_k\lambda_l s^{k+l}\right\} + s^{\gamma+2}\, g_1\sum_k \lambda_k s^k + \\ & + s^{\gamma} H_1\sum_k \lambda_k s^k + m_1 s^3 + n_1 s = 0\,, \end{aligned}$$

con

$$(9)\quad \begin{cases} a_1 = \dfrac{\mathfrak{C}}{A\mathfrak{C}}(A - \mathfrak{B})\,, \qquad b_1 = \dfrac{2\mathfrak{C}^2}{\mathfrak{C}^2} + \dfrac{2NL}{A\mathfrak{C}} - \dfrac{\mathfrak{B}}{A}\,, \\ c_1 = \dfrac{2N}{A\mathfrak{C}}\left[L + \mathfrak{B} + \dfrac{\mathfrak{C}^2}{\mathfrak{C}N}(A + \mathfrak{B})\right], \qquad d_1 = \dfrac{\mathfrak{C}^2}{N^2}\left(1 - \dfrac{2\mathfrak{C}^2}{\mathfrak{C}^2}\right), \\ e_1 = \dfrac{2\mathfrak{C}}{A}\left[2 + \dfrac{L+\mathfrak{B}}{N} - \dfrac{3}{2}\,\dfrac{A\mathfrak{C}}{N^2}\left(1 - 2\,\dfrac{\mathfrak{C}^2}{\mathfrak{C}^2}\right)\right], \qquad f_1 = \dfrac{\mathfrak{C}\mathfrak{B}}{A\mathfrak{C}}\,, \\ g_1 = \dfrac{3\mathfrak{C} - 2\mathfrak{B} - 2N}{A} - \dfrac{2\mathfrak{C}^2}{N^2}\left[2N\,\dfrac{L + \mathfrak{B} + N}{A\mathfrak{C}} - 3\left(1 - \dfrac{\mathfrak{C}^2}{\mathfrak{C}^2}\right)\right], \\ m_1 = \dfrac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}}\left[\dfrac{3\mathfrak{C} - 2\mathfrak{B}}{A} + \dfrac{\mathfrak{C}^2}{N^2}\left(1 - \dfrac{2\mathfrak{C}^2}{\mathfrak{C}^2}\right) - \dfrac{2\mathfrak{C}^2}{\mathfrak{C}N}\,\dfrac{L+\mathfrak{B}}{A}\right], \\ n_1 = -\dfrac{2\mathfrak{C}h}{A\mathfrak{C}}\,, \qquad H_1 = -\dfrac{2h}{A}\,. \end{cases}$$

La ricerca dei termini di grado minimo nelle (7) conduce a considerare diversi casi per γ.

A) $\gamma < 1/2$; *B*) $1/2 < \gamma < 1$; *C*) $\gamma > 1$; *D'*) $\gamma = 1$; *D''*) $\gamma = 1/2$.

Nel caso A) i termini di grado minimo nelle (7) sono quelli di esponente $4\gamma - 2$ e $5\gamma - 2$, i cui coefficienti eguagliati a zero danno le equazioni

$$\lambda_0^2\mu_0\gamma(3\gamma - 1) = 0 \ ; \quad \lambda_0^3\mu_0\gamma(3\gamma - 1) = 0 \ , \tag{10}$$

le quali, volendo lasciare a priori indeterminati λ_0 e μ_0, sono soddisfatte per i valori di

$$\gamma = 1/3 \ , \tag{11'}$$

$$\gamma = 0 \ . \tag{11''}$$

Nel caso B) i termini di grado minimo sono quelli di esponente $4\gamma - 2$ e γ. Si perviene così alle equazioni

$$\lambda_0^2\mu_0\gamma(3\gamma - 1) = 0 \ , \qquad \lambda_0 H_1 = 0 \ , \tag{12}$$

che ammettono le due soluzioni

$$\lambda_0 = 0 \ , \tag{13'}$$

$$\mu_0 = 0 \ , \qquad h = 0 \ . \tag{13''}$$

Nel caso C) i termini di grado minimo sono quelli di grado 0 e 1, con le equazioni

$$H = \frac{2h}{\mathfrak{B}} = 0 \ , \qquad n_1 = -\frac{h\mathfrak{C}}{N} = 0 \ , \tag{14}$$

e quindi l'unica condizione

$$h = 0 \ . \tag{15}$$

Infine nel caso D'), si perviene alle equazioni

$$H = 0 \ , \qquad H_1\lambda_0 + n_1 = 0 \ , \tag{16}$$

e perciò ancora

$$h = 0 \ . \tag{17}$$

Nel caso D''), $\gamma = 1/2$ si arriva alle equazioni

$$\frac{1}{2}\lambda_0^2\mu_0 - H = 0 \ , \qquad \frac{1}{2}\lambda_0^2\mu_0 + H_1 = 0 \ , \tag{18}$$

da cui la condizione $H = -H_1$ cioè, $A = \mathfrak{B}$ ossia, $\mathfrak{C}(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) = \mathfrak{C}^2$, $N = 0$ esclusa per ipotesi; oppure, $h = 0$, λ_0 (o μ_0) uguale a zero.

Risulta dall'esame fatto, che volendo lasciare a priori indeterminati λ_0, μ_0 ed h, gli unici casi su cui conviene soffermarsi sono quelli (11′) e (11″). Li esamineremo ora brevemente.

3. – *Caso* $\gamma = 1/3$.

In questo caso, la considerazione dei termini di eguale esponente nelle (7), conduce a scindere le (7) stesse in sei parti, in ciascuna delle quali s non può prendere esponenti eguali a quelli di nessun termine delle altre.

Ne segue che le espressioni delle λ_r e μ_r che si ottengono eguagliando a zero i coefficienti delle serie che figurano in due di codeste parti, devono essere compatibili con quelle che si ottengono dalle altre serie. Si ottiene così di regola un numero di equazioni di compatibilità superiore al numero dei parametri strutturali ed energetici di cui si dispone. Sembra dunque si possa concludere che il caso in esame è incompatibile con le equazioni (7) e non conduce quindi ad alcun integrale delle (I), (II) ([6]).

Giova osservare che questo ragionamento si può ripetere per ogni valore non intero di γ. Difatti, poichè gli esponenti $4\gamma - 2, \dots, \gamma + 1$ che figurano nella (7_1) e $5\gamma - 2, \dots, \gamma$ che figurano nella (7_2) non possono tutti differire l'uno dall'altro per numeri interi, ciascuna delle equazioni (7) si spezza in più parti che devono essere separatamente zero, e valgono quindi ancora le conclusioni ottenute per $\gamma = 1/3$.

Quando γ sia intero e $\geqslant 1$, le (7) determinano univocamente, soddisfatte le condizioni strutturali $m_1 = 0$, $h = 0$, i coefficienti λ e μ degli sviluppi (6), che quindi non vengono a dipendere da alcuna costante arbitraria.

4. – *Caso* $\gamma = 0$.

Passando nelle (7) dai termini di grado -2 a quelli di grado -1 si ottengono delle identità. Ne segue che anche λ_1 e μ_1, oltre λ_0 e μ_0, rimangono completamente arbitrari, mentre ogni altro coefficente λ_r e μ_r degli sviluppi (6) è determinato dalle equazioni

$$(19_r)\quad r(r-1)\lambda_0^2\mu_r + \sum_{k+l+m=r}{}' m(l+m-1)\lambda_k\lambda_l\mu_m + a\sum_{k+l+m=r-1} m\lambda_k\lambda_l\lambda_m + \sum_{k+l=r-2}[bl+c]\lambda_k\lambda_l + \\ + \mu_{r-2} + d\lambda_{r-3} + \delta_{r,4}e - \delta_{r,2}H = 0\,,$$

$$(20_r)\quad r(2r-2)\lambda_0^2\mu_0\lambda_r + \sum_{k+l+m+n=r}{}' m(2l+2m+n-2)\lambda_k\lambda_l\lambda_m\mu_n + a_1\sum_{k+l+m=r-1} m\lambda_k\lambda_l\mu_m + \\ + d_1\sum_{k+l+m=r-2}\lambda_k\lambda_l\lambda_m - \sum_{k+l=r-2}\left[b_1 + \frac{1}{2}lc_1\right]\lambda_k\mu_l + f_1\mu_{r-3} - e_1\sum_{k+l=r-3}\lambda_k\lambda_l + g_1\lambda_{r-4} + \\ + H_1\lambda_{r-2} + \delta_{r,5}m_1 + \delta_{r,3}n_1 = 0\,,$$

([6]) L'esponente caratteristico $\gamma = 1/3$ si è presentato anche a N. Kowalewski ne lavoro citato, ma l'autore lo ha escluso a priori da ogni considerazione. È interessante osservare che, nel caso di Kowalewski, alle condizioni $h = 0$ e $m_1 = 0$, si sostituiscono $h = 0$ e $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$.

dove le somme vanno estese alle soluzioni intere non negative delle equazioni indicate, e l'apice sta ad indicare che va escluso da tali soluzioni il valore $m = r$, essendo $\delta_{r,s} = 0$ per $r \neq s$ e $\delta_{r,s} = 1$ per $r = s$.

In questo caso le (6) determinano, come è facile constatare, una soluzione delle (I), (II) dipendente da sei costanti arbitrarie. Difatti con le equazioni (19_r) e (20_r) si vengono a determinare p e q^2 in funzione di s e delle cinque costanti λ_0, μ_0, λ_1, μ_1, h. L'ultima delle (I) determina s in funzione del tempo e di una costante arbitraria con una quadratura, e successivamente le (III) e (IV) determinano γ_1, γ_2, γ_3 in funzione del tempo e di sei costanti arbitrarie. Di esse solo cinque sono tuttavia arbitrarie, perchè va soddisfatta la condizione $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$. In definitiva si determinano così p, q, r, γ_1, γ_2, γ_3 in funzione del tempo e di cinque costanti arbitrarie e si perviene dunque ad un'integrazione completa delle (1).

Ci si può allora chiedere se si possa sfruttare l'arbitrarietà delle quattro costanti λ_0, μ_0, λ_1, μ_1, di quella h dell'energia, e delle tre costanti da cui dipende la struttura del solido (cioè, ad es., il rapporto di due momenti di inerzia al terzo e l'angolo formato da $G - O$, nel piano principale in cui giace G, con uno degli assi principali), in totale otto costanti arbitrarie, per imporre l'esistenza di un integrale polinomiale in s delle (I), (II).

Supponiamo di voler conservare nella prima delle (6) i termini fino a quello di grado u compreso, e nella seconda i termini fino a quello di grado v compreso; dovrà quindi risultare $\lambda_{u+t} = \mu_{v+t} = 0$ per $t = 1, 2, \ldots$. Facendo nella (19_r) $r = v + t$ e nella (20_r) $r = u + t$, perchè risulti $\lambda_{u+t} = 0$, $\mu_{v+t} = 0$ occorre che sia

$$(21) \qquad \sum_{k+l+m=v+t}{}' m(l+m-1)\lambda_k\lambda_l\mu_m + a\sum_{k+l+m=v+t-1} m\lambda_k\lambda_l\lambda_m + \sum_{k+l=v+t-2}[bl+c]\lambda_k\lambda_l + \\ + \mu_{v+t-2} + d\lambda_{v+t-3} + \delta_{v+t,4}e - \delta_{v+t,2}H = 0\,,$$

$$(22) \qquad \sum_{k+l+m+n=u+t}{}' m(2l+2m+n-2)\lambda_k\lambda_l\lambda_m\mu_n + a_1\sum_{k+l+m=u+t-1} m\lambda_k\lambda_l\mu_m + \\ + d_1\sum_{k+l+m=u+t-2}\lambda_k\lambda_l\lambda_m - \sum_{k+l=u+t-2}\left[b_1 + \frac{1}{2}lc_1\right]\lambda_k\mu_l + f_1\mu_{u+t-3} - \\ - e_1\sum_{k+l=u+t-3}\lambda_k\lambda_l + g_1\lambda_{u+t-4} + H_1\lambda_{u+t-2} + \delta_{u+t,5}m_1 + \delta_{u+t,3}n_1 = 0\,.$$

Queste sono identicamente soddisfatte quando uno degli indici di λ che vi figurano supera u e uno degli indici di μ che vi figurano supera v. Limitandosi a considerare i valori di $u \geqslant 1$ e di $v \geqslant 2$, si constatata facilmente che le (21) danno origine a $2u$ equazioni distinte per $v > 1 + u$, e a $3u - v + 1$ equazioni distinte per $v \leqslant 1 + u$, mentre le (22) equivalgono in ogni caso a

$2u + v$ equazioni distinte. Perchè queste equazioni possano essere soddisfatte dalle otto costanti di cui si dispone, occorre dunque che sia

$$(23) \quad 4u + v \leqslant 8\,, \quad \text{per} \quad 1 + u < v\,; \qquad 5u + 1 \leqslant 8\,, \quad \text{per} \quad v \leqslant 1 + u\,.$$

La prima di queste condizioni è soddisfatta dai valori $u = 1$, $v = 2, 3, 4$; la seconda dai valori $u = 1$, $v = 2$, ottenendosi così un caso già contenuto nei precedenti. Sono dunque possibili, nelle condizioni in cui ci siamo messi, soltanto tre casi di integrabilità parziale con integrali particolarizzati algebrici in s, e tali integrali dipendono da due, una, nessuna costante arbitraria rispettivamente.

Infine, nel caso finora escluso $u = 0$, si constata facilmente che i soli valori non nulli possibili per v sono 1 e 2, rimanendo nell'integrale così determinato rispettivamente una e due costanti arbitrarie. La discussione delle condizioni strutturali appare tuttavia in ogni caso tutt'altro che semplice.