GIORGIO SESTINI (*)

Su due problemi di propagazione del calore in un solido eterogeneo con simmetria cilindrica.

1. - Introduzione.

In due precedenti lavori ([1]) ho risolto due problemi relativi alla propagazione del calore prodotto da una distribuzione di sorgenti, generate, ad esempio per attrito, sulla superficie comune di un cilindro S_1 di raggio r_1 e di un manicotto cilindrico coassiale S_2 di raggi r_1 ed r_2.

L'ipotesi che la temperatura di S_1 ed S_2 dipenda dal posto soltanto attraverso alla distanza r dall'asse comune e l'altra, non esplicitamente dichiarata ([2]), ma implicita nello sviluppo analitico, che la propagazione avvenga esclusivamente lungo i raggi, riducono i due problemi da piani ad unidimensionali.

Usando un metodo classico, molto vantaggioso anche per l'effettivo calcolo numerico delle soluzioni, ho potuto dare l'espressione delle due temperature $u_1(r, t)$ di S_1 e $u_2(r, t)$ di S_2 sia che si supponga nota in funzione del tempo la temperatura $u'(t)$ delle sorgenti (I *problema*), sia che si conosca invece il loro rendimento $H(t)$ (II *problema*).

A completare quelle ricerche restava da considerare, fisse restando le altre ipotesi, il caso più generale di una propagazione non esclusivamente radiale. Mi è parso pertanto opportuno ritornare sulla questione, estendendo a questo caso il metodo già seguito.

Come è ben noto ([3]), per i problemi unidimensionali, il metodo consiste

---

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma (Italia).

([1]) Cfr. G. SESTINI, *Sopra un problema di propagazione del calore*, Ist. Lombardo Sci. Lett. Cl. Sci. Mat. Nat. **75**, 1-19 (1941); *Sopra un problema ai limiti in un caso non stazionario di propagazione del calore*, Univ. Roma, Ist. Alta Mat., Rend. Mat. e Appl. (5) **6**, 464-477 (1947). Questi lavori saranno citati rispettivamente con (I) e (II).

([2]) Ringrazio qui il prof. F. SBRANA per avermi fatto rilevare tale omissione.

([3]) Cfr. É. GOURSAT, *Cours d'Analyse Mathématique*, T. III, Paris 1927, pp. 302-320.

nell'esprimere la soluzione del sistema differenziale costituito dalla equazione

$$\frac{\partial^2 u(r,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(r,t)}{\partial t}, \tag{1}$$

e dalle assegnate condizioni iniziali e al contorno, o mediante uno dei seguenti integrali singolari

$$\left\{\begin{aligned} \Phi(x,t) &= \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left\{-\frac{[x-\chi(\tau)]^2}{4(t-\tau)}\right\} d\tau, \\ \Psi(x,t) &= \int_0^t \varphi(\tau)\frac{x-\chi(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{[x-\chi(\tau)]^2}{4(t-\tau)}\right\} d\tau, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

nei quali $\varphi(\tau)$ e $\chi(\tau)$ sono simboli di funzioni continue nell'intervallo $(0, t)$ e per il resto arbitrarie, oppure come somma di integrali dei tipi (2).

Con riferimento al piano delle variabili x e t, sia γ la curva rappresentata dalla equazione $x = \chi(t)$. La $\Phi(x, t)$, soluzione di (1), regolare insieme a tutte le sue derivate parziali di qualsiasi ordine in qualunque punto del semipiano $t \geqslant 0$ non appartenente a γ, si mantiene continua su γ, contrariamente a quanto si verifica per $\Psi(x, t)$, soluzione pur essa di (1), regolare in tutti i punti del semipiano $t \geqslant 0$ non appartenenti a γ, che presenta attraverso a γ una discontinuità di prima specie [4]. È proprio per questa discontinuità che, soddisfacendo alle imposte condizioni al contorno, si può determinare la funzione arbitraria, o le funzioni arbitrarie, $\varphi(t)$, risolvendo, a seconda dei casi, una equazione od un sistema di equazioni integrali di VOLTERRA di seconda specie.

Scopo di questo lavoro è pertanto lo studio di integrali singolari analoghi alle funzioni $\Phi(x, t)$ e $\Psi(x, t)$ e la loro applicazione alla risoluzione dei problemi cilindrici piani non stazionari, analoghi ai ricordati problemi unidimensionali da me precedentemente risolti.

2. – La funzione $\varphi(a, r, t)$, sua derivabilità rispetto ad r, per $r \neq 0$.

È ben noto [5] come ogni problema di propagazione non stazionaria del calore in un corpo isotropo, omogeneo, dotato di simmetria cilindrica, quando si supponga la temperatura, ad un dato istante, funzione del posto soltanto

---

(4) Cfr. É. GOURSAT, loc. cit. in (3), pp. 302 e 306-308.

(5) Cfr. H. S. CARSLAW and J. C. JAEGER, *Conduction of heat in solids*, Oxford 1948, pp. 166-197.

attraverso alla distanza r dall'asse del cilindro, indicata con $u(r, t)$ la temperatura al tempo t in tutti i punti della superficie cilindrica di raggio r, si riconduca ad un problema piano retto dall'equazione

$$\frac{\partial^2 u(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u(r, t)}{\partial r} = \frac{\partial u(r, t)}{\partial t}, \tag{3}$$

e dalle prescritte condizioni iniziali ed al contorno per la $u(r, t)$. Come è facile verificare, è soluzione della (3) la funzione

$$u(r, t-\tau) = \frac{1}{4\pi(t-\tau)} \exp\left\{-\frac{r^2+a^2}{4(t-\tau)}\right\} I_0\left[\frac{ar}{2(t-\tau)}\right], \tag{4}$$

con $a > 0$ costante e $\tau \leqslant t$ parametro, essendo $I_0(x)$ la funzione di Bessel di argomento immaginario (6). La (4) può interpretarsi (7) come la temperatura al tempo t in un punto della superficie cilindrica di raggio r, dovuta ad una istantanea distribuzione superficiale di sorgenti al tempo $t = \tau$ e per $r = a$.

Ricordando (8) che

$$\lim_{x\to\infty} \exp(-x) I_0(x)\sqrt{2\pi x} = 1, \tag{5}$$

si vede subito che per $r = a$ la $u(r, t)$ tende all'infinito, col tendere di $t-\tau$ a zero, come $(t-\tau)^{-1/2}$, mentre per ogni altro valore di r la $u(r, t)$ tende a zero, col tendere a zero di $t-\tau$.

Consideriamo adesso la funzione

$$\varphi(a, r, t) = \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{t-\tau} \exp\left\{-\frac{r^2+a^2}{4(t-\tau)}\right\} I_0\left[\frac{ar}{2(t-\tau)}\right] d\tau, \tag{6}$$

con $\mu(\tau)$ funzione continua di τ nell'intervallo $(0, t)$ e per il resto arbitraria ed r prefissato maggiore di zero.

Dalla (6), scritta nella forma

$$\varphi(a, r, t) = \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left\{-\frac{(r-a)^2}{4(t-\tau)}\right\} \frac{\exp\left\{-\frac{ar}{2(t-\tau)}\right\} I_0\left[\frac{ar}{2(t-\tau)}\right]}{\sqrt{t-\tau}} d\tau,$$

(6) Cfr. G. N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge 1922, pag. 77; cfr. anche F. E. Relton, *Applied Bessel functions*, Glasgow 1946, pp. 100-101.

(7) Cfr. H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, loc. cit. in (5), pp. 216-219 e pag. 305.

(8) Cfr. F. E. Relton, loc. cit. in (6), pag. 184.

posto

$$[f(ar, t-\tau) = \exp\left\{-\frac{ar}{2(t-\tau)}\right\} I_0\left[\frac{ar}{2(t-\tau)}\right]\sqrt{\frac{\pi ar}{t-\tau}}, \tag{7}$$

si ottiene subito

$$\varphi(a, r, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi ar}}\,[A_1(r, t) + A_2(r, t)]\,, \tag{8}$$

con

$$A_1(r, t) = \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left\{-\frac{(r-a)^2}{4(t-\tau)}\right\} d\tau\,,$$

$$A_2(r, t) = \int^t \frac{\mu(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left\{-\frac{(r-a)^2}{4(t-\tau)}\right\}[f(ar, t-\tau)-1]\,d\tau\,.$$

Il comportamento di $A_1(r, t)$, che è una $\Phi(r, t)$, è noto ([9]). Studiamo allora il comportamento di $A_2(r, t)$. Per la (5), posto $x = \dfrac{ar}{2(t-\tau)}$, con che, essendo r finito diverso da zero, x tende all'infinito soltanto quando $t-\tau$ tende a zero, la funzione $f(ar, t-\tau)-1$ risulta limitata in tutto l'intervallo $(0, t)$, qualunque sia r finito diverso da zero e tende a zero con $t-\tau$. L'integrale $A_2(r, t)$, essendo $\mu(\tau)$ continua nell'intervallo $(0, t)$, risulta pertanto convergente.

Ricordando il comportamento di $A_1(r, t)$, si può concludere che $\varphi(a, r, t)$ è funzione regolare e continua per ogni t ed ogni r fissato diverso da zero. Vogliamo adesso provare l'esistenza e determinare il comportamento della derivata di $\varphi(a, r, t)$ rispetto ad r, per ogni r diverso da zero, qualunque sia t.

Possiamo evidentemente tralasciare il fattore $(\pi ar)^{-1/2}$. La derivata di $A_1(r, t)$ è già stata completamente studiata ([10]). Non è difficile vedere come ad $A_2(r, t)$ possa applicarsi la regola di LEIBNIZ.

Usando della formula di valutazione asintotica per $I_n(x)$ ([11]),

$$I_n(x) = \frac{\exp x}{\sqrt{2\pi x}}\left\{1 - \frac{4n^2-1}{8x} + \frac{M(x)}{x^2}\right\}, \tag{9}$$

con $M(x)$ uniformemente limitata rispetto ad x nell'intervallo $(\alpha, +\infty)$ con

---

([9]) Cfr. É. GOURSAT, loc. cit. in ([3]), pp. 302-305.
([10]) Cfr. É. GOURSAT, loc. cit. in ([3]), pp. 305-308.
([11]) Cfr. F. E. RELTON, loc. cit. in ([6]), pp. 184.

$\alpha > 0$, si ottiene facilmente

$$f(ar,\, t-\tau) - 1 = (t-\tau)\left[\frac{1}{4ar} + \frac{4M\left[\dfrac{ar}{2(t-\tau)}\right]}{a^2r^2}(t-\tau)\right], \tag{10}$$

il che permette di assicurare la continuità, in tutto l'intervallo $(0, t)$ e per ogni r fissato diverso da zero, della funzione integranda di $A_2(r, t)$ che indicheremo con $v(r, t)$. Derivando la $v(r, t)$ rispetto ad r si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial v(r,t)}{\partial r} = \frac{\mu(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{(r-a)^2}{4(t-\tau)}\right] \Bigg\{ &-\frac{r-a}{2(t-\tau)}\,[f(ar,\, t-\tau)-1] + \\ &+ \frac{1}{2r}\exp\left[-\frac{ar}{2(t-\tau)}\right]\sqrt{\frac{\pi a r}{t-\tau}}\, I_0\left[\frac{ar}{2(t-\tau)}\right] + \\ &+ \frac{a}{2(t-\tau)}\sqrt{\frac{\pi a r}{t-\tau}}\exp\left[-\frac{ar}{2(t-\tau)}\right]\left(I_1\left[\frac{ar}{2(t-\tau)}\right] - I_0\left[\frac{ar}{2(t-\tau)}\right]\right)\Bigg\}.\end{aligned}$$

Da questa, per (9) e (10), essendo

$$I_1(x) - I_0(x) = \frac{\exp x}{\sqrt{2\pi x}}\left[-\frac{1}{2x} + \frac{M_1(x)}{x^2}\right], \tag{11}$$

con $M_1(x)$ uniformemente limitata rispetto ad x nell'intervallo $(\alpha, +\infty)$ con $\alpha > 0$, si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial v(r,t)}{\partial r} = \frac{\mu(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{(r-a)^2}{4(t-\tau)}\right] \Bigg\{ &-\frac{r-a}{4ar} + (t-\tau)\left[\frac{1}{8ar^2} + \frac{4(r-a)}{a^2r^2} M\left[\frac{ar}{2(t-\tau)}\right] + \right. \\ &\left. + \frac{2}{ar^2} M_1\left[\frac{ar}{2(t-\tau)}\right]\right] + \frac{2M\left[\dfrac{ar}{2(t-\tau)}\right]}{a^2r^3}(t-\tau)^2 \Bigg\}.\end{aligned}$$

Questa mostra che, essendo $\mu(\tau)$ continua nell'intervallo $(0, t)$, r diverso da zero, $M(x)$ ed $M_1(x)$ uniformemente limitate qualunque sia x diverso da zero, la $\dfrac{\partial v(r,t)}{\partial r}$ risulta integrabile nell'intervallo $(0, t)$ qualunque sia r diverso da zero, il che basta per affermare [12] che per il calcolo della derivata di $A_2(r, t)$ si può applicare la regola di LEIBNIZ.

---

[12] Cfr. U. DINI, *Lezioni di Analisi infinitesimale*, vol. II, parte I, Pisa 1909, pp. 187-188; cfr. anche CH.-J. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Cours d'Analyse infinitésimale*, II, Paris 1912, pag. 78.

3. - La funzione $\psi(a, r, t)$.

Vogliamo adesso studiare la funzione

$$\psi(a, r, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi a r}} \int_0^t \mu(\tau) \frac{r-a}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(r-a)^2}{4(t-\tau)}\right] f(ar, t-\tau)\, d\tau, \tag{12}$$

con $\mu(\tau)$ funzione continua e $f(ar, t-\tau)$ data da (6).

La $\psi(a, r, t)$ risulta manifestamente, per r non nullo e diverso da a, funzione regolare. Vogliamo studiare il limite di $\psi(a, r, t)$ per $r \to a$. Scriviamo ancor qui

$$\psi(a, r, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi a r}} [B_1(r, t) + B_2(r, t)], \tag{13}$$

con

$$B_1(r, t) = \int_0^t \mu(\tau) \frac{r-a}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(r-a)^2}{4(t-\tau)}\right] d\tau,$$

$$B_2(r, t) = \int_0^t \mu(\tau) \frac{r-a}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(r-a)^2}{4(t-\tau)}\right] [f(ar, t-\tau) - 1]\, d\tau.$$

$B_1(r, t)$ è una funzione $\Psi(r, t)$ completamente studiata, che presenta per $r \to a$ una discontinuità, essendo il suo limite $2\sqrt{\pi}\,\mu(t)$ oppure $-2\sqrt{\pi}\,\mu(t)$ secondo che r tende ad a per valori più grandi o per valori più piccoli di a [13].

Facciamo adesso vedere che è

$$\lim_{r \to a} B_2(r, t) = 0. \tag{14}$$

Spezziamo l'intervallo $(0, t)$ in due intervalli $(0, t-\varepsilon)$ e $(t-\varepsilon, t)$, con $\varepsilon > 0$ fisso. Potremo scrivere

$$B_2(r, t) = (r-a)[B_2'(r, t) + B_2''(r, t)], \tag{15}$$

con

$$B_2'(r, t) = \int_0^{t-\varepsilon} \frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(r-a)^2}{4(t-\tau)}\right] [f(ar, t-\tau) - 1]\, d\tau,$$

$$B_2''(r, t) = \int_{t-\varepsilon}^{t} \frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(r-a)^2}{4(t-\tau)}\right] [f(ar, t-\tau) - 1]\, d\tau.$$

([13]) Cfr. É. GOURSAT, loc. cit. in ([3]), pp. 305-308.

$B_2'(r, t)$, essendo ε fisso, è limitato; quanto a $B_2''(r, t)$, sostituendo ad $f(ar, t-\tau)-1$ l'espressione data da (10), si vede subito, essendo r diverso da zero, che risulta parimenti limitato, potendosi scrivere nella forma

$$\int_{t-\varepsilon}^{t} \frac{H(a, r, t, \tau)}{\sqrt{t-\tau}} \, d\tau ,$$

con $H(a, r, t, \tau)$ uniformemente limitata per τ in $(t-\varepsilon, t)$ ed r variabile in un intorno di a.

Dalla limitatezza di $B_2'(r, t)$ e $B_2''(r, t)$ e dalla (15), segue la (14). Da quanto precede si conclude immediatamente che la $\psi(a, r, t)$ è discontinua per $r \to a$ e che si ha

$$\left\{ \begin{aligned} \lim_{r \to a+} \psi(a, r, t) &= \frac{2}{a} \mu(t) , \\ \lim_{r \to a-} \psi(a, r, t) &= -\frac{2}{a} \mu(t) . \end{aligned} \right. \tag{16}$$

4. – La funzione $\chi(a, r, t)$.

Vogliamo infine provare la convergenza dell'integrale

$$\chi(a, r, t) = \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{r^2+a^2}{4(t-\tau)}\right] \left\{ I_1\left[\frac{ar}{2(t-\tau)}\right] - I_0\left[\frac{ar}{2(t-\tau)}\right] \right\} d\tau , \tag{17}$$

dove $\mu(\tau)$ è funzione continua nell'intervallo $(0, t)$ ed r è diverso da zero. Usufruendo della (11), si vede facilmente come la funzione integranda di (17), qualunque sia $r \neq 0$, diviene infinita per $\tau = t$ di ordine $1/2$, ciò assicura la convergenza dell'integrale $\chi(a, r, t)$.

Osserveremo qui che la derivata rispetto ad r di $\varphi(a, r, t)$, con r non nullo, della cui esistenza nell'intervallo $(0, t)$ ci siamo assicurati nel n. 2, si esprime, come è facile vedere, applicando la regola di LEIBNIZ, come somma di termini dei tipi $\psi(a, r, t)$ e $\chi(a, r, t)$.

Essendo $\chi(a, r, t)$ continua per $r = a$, $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_{r=a}$ risulterà discontinua per $r = a$, essendo tale la $\psi(a, r, t)$.

5. - Applicazioni.

Vogliamo adesso applicare i risultati fin qui stabiliti alla risoluzione di due problemi non stazionari di propagazione del calore analoghi, ma più generali, di quelli prima ricordati.

Sulla superficie di contatto di due corpi S_1 ed S_2, ciascuno dei quali omogeneo e termicamente isotropo, si genera, ad esempio per attrito, una distribuzione di sorgenti di calore di cui si conosce, in funzione del tempo, o la temperatura $u'(t)$ [I *problema*] o il rendimento $H(t)$ [II *problema*]. Si tratta di determinare, all'istante t, la temperatura in un punto dell'uno o dell'altro corpo, una volta assegnata la temperatura iniziale dei due corpi e quella del mezzo ambiente.

Siano ancora, come nei precedenti lavori, S_1 ed S_2 un cilindro rotondo di raggio r_1 ed un manicotto cilindrico coassiale di raggi r_1 ed r_2. Supponiamo ancora nulle le temperature iniziali di S_1 ed S_2 e quella del mezzo ambiente e che le temperature di S_1 ed S_2 dipendano dal posto soltanto per il tramite della distanza r dall'asse comune.

Senza l'ulteriore ipotesi della propagazione puramente radiale del calore, le considerazioni dei numeri precedenti consentono di applicare per la risoluzione dei problemi sopra ricordati, lo stesso metodo usato per il caso della propagazione unidimensionale.

a) Il primo problema.

Con le notazioni dei precedenti lavori, indicherò con $u_1(r, t)$ ed $u_2(r, t)$ le temperature di S_1 ed S_2 rispettivamente. Il primo problema ci conduce a risolvere i due seguenti sistemi differenziali

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{1}{a_1^2}\frac{\partial u_1}{\partial t} = 0\,, \quad \text{in } S_1;\\ &\frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{h_1}{\lambda_1}u_1 = \frac{h_1}{\lambda_1}u'(t) =\\ &\qquad\qquad = \varphi_1(t)\,, \quad \text{per } r = r_1\,;\\ &u_1(r, 0) = 0\,; \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{1}{a_2^2}\frac{\partial u_2}{\partial t} = 0\,, \quad \text{in } S_2\,;\\ &\frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{h'}{\lambda_2}u_2 = -\frac{h'}{\lambda_2}u'(t) =\\ &\qquad\qquad = \varphi_2(t)\,, \quad \text{per } r = r_1\,;\\ &\frac{\partial u_2}{\partial r} + \frac{h_2}{\lambda_2}u_2 = 0\,, \quad \text{per } r = r_2\,;\\ &u_2(r, 0) = 0\,; \end{aligned}\right.$$

con a_1, a_2, h_1, h_2, h', λ_1, λ_2 costanti positive.

Rimandando ai precedenti lavori per quanto concerne l'unicità delle soluzioni dei sistemi differenziali (18) ([14]), cominceremo col provare l'esistenza della soluzione del secondo sistema.

La soluzione di quest'ultimo rappresenta manifestamente, in funzione di r e t, la temperatura di una corona circolare di raggi r_1 ed r_2, inizialmente a temperatura zero, quando sia nota, in funzione del tempo, sulle circonferenze che la limitano, una combinazione lineare della temperatura e della sua derivata rispetto ad r.

Fatto per semplicità $a_2^2 = 1$, esprimiamo la soluzione cercata come somma di due funzioni $\varphi(a, r, t)$:

$$u_2(r,t) = \sum_1^2{}_i\, \varphi_i(r_i, r, t) = \sum_1^2{}_i \int_0^t \frac{\mu_i(\tau)}{t-\tau} \exp\left[-\frac{r^2+r_i^2}{4(t-\tau)}\right] I_0\left[\frac{r_i r}{2(t-\tau)}\right] d\tau\,, \tag{19}$$

con $\mu_1(t)$ e $\mu_2(t)$ funzioni continue di t da determinarsi in modo da soddisfare alle condizioni imposte alla $u_2(r,t)$ per $r = r_1$ ed $r = r_2$.

La (19) può anche scriversi

$$u_2(r,t) = \sum_1^2{}_i \frac{1}{\sqrt{\pi r_i r}} \int_0^t \frac{\mu_i(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left[-\frac{(r-r_i)^2}{4(t-\tau)}\right] f(r_i r, t-\tau)\, d\tau\,, \tag{20}$$

con $f(r_i r, t-\tau)$ data dalla (6).

Derivando la (20) rispetto ad r, in virtù di quanto è stato esposto nei numeri precedenti, con le notazioni introdotte, si ha

$$\frac{\partial u_2}{\partial r} = \sum_1^2{}_i \left\{ -\frac{1}{2}\,\psi_i(r_i, r, t) + \frac{r_i}{2}\,\chi(r_i, r, t) \right\}.$$

Valutiamo i due limit

$$\lim_{r\to r_1} \frac{\partial u_2}{\partial r}\,, \qquad \lim_{r\to r_2} \frac{\partial u_2}{\partial r}\,.$$

Da quanto è stato esposto nei numeri precedenti si ha

$$\left\{\begin{aligned}
\lim_{r\to r_1} \frac{\partial u_2}{\partial r} &= -\frac{1}{r_1}\,\mu_1(t) + \frac{r_2-r_1}{2\sqrt{\pi r_1 r_2}} \int_0^t \frac{\mu_2(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(r_2-r_1)^2}{4(t-\tau)}\right] f(r_1 r_2, t-\tau)\, d\tau\, + \\
&\quad + \sum_1^2{}_i \frac{r_i}{2} \int_0^t \frac{\mu_i(\tau)}{(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{r_1^2+r_i^2}{4(t-\tau)}\right] \left\{ I_1\left[\frac{r_1 r_i}{2(t-\tau)}\right] - I_0\left[\frac{r_1 r_i}{2(t-\tau)}\right] \right\} d\tau\,; \\
\lim_{r\to r_2} \frac{\partial u_2}{\partial r} &= \frac{1}{r_2}\,\mu_2(t) - \frac{r_2-r_1}{2\sqrt{\pi r_1 r_2}} \int_0^t \frac{\mu_1(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(r_2-r_1)^2}{4(t-\tau)}\right] f(r_1 r_2, t-\tau)\, d\tau\, + \\
&\quad + \sum_1^2{}_i \frac{r_i}{2} \int_0^t \frac{\mu_i(\tau)}{(t-\tau)^2} \exp\left[-\frac{r_i^2+r_2^2}{2(t-\tau)}\right] \left\{ I_1\left[\frac{r_i r_2}{2(t-\tau)}\right] - I_0\left[\frac{r_i r_2}{2(t-\tau)}\right] \right\} d\tau\,.
\end{aligned}\right. \tag{21}$$

([14]) Cfr. G. Sestini, loc. cit. in ([1]) (I), pp. 13-16.

Posto

$$
(22)\quad
\begin{cases}
K_{11}(t,\tau) = -\dfrac{r_1^2}{2}\dfrac{\exp\left[-\dfrac{r_1^2}{2(t-\tau)}\right]}{(t-\tau)^2}\left\{I_1\left[\dfrac{r_1^2}{2(t-\tau)}\right]-I_0\left[\dfrac{r_1^2}{2(t-\tau)}\right]\right\}+ \\
\qquad\qquad + \dfrac{h'}{\lambda_2}\dfrac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}f(r_1^2,\, t-\tau)\,, \\
K_{12}(t,\tau) = \sqrt{\dfrac{r_1}{\pi r_2}}\left[\dfrac{h'}{\lambda_2}-\dfrac{r_2-r_1}{2(t-\tau)}\right]\dfrac{\exp\left[-\dfrac{(r_2-r_1)^2}{4(t-\tau)}\right]}{\sqrt{t-\tau}}f(r_1r_2,\, t-\tau) - \\
\qquad\qquad -\dfrac{r_1r_2}{2}\dfrac{\exp\left[-\dfrac{r_1^2+r_2^2}{4(t-\tau)}\right]}{(t-\tau)^2}\left\{I_1\left[\dfrac{r_1r_2}{2(t-\tau)}\right]-I_0\left[\dfrac{r_1r_2}{2(t-\tau)}\right]\right\}, \\
K_{21}(t,\tau) = \sqrt{\dfrac{r_2}{\pi r_1}}\left[\dfrac{h_2}{\lambda_2}+\dfrac{r_2-r_1}{2(t-\tau)}\right]\dfrac{\exp\left[-\dfrac{(r_2-r_1)^2}{4(t-\tau)}\right]}{\sqrt{t-\tau}}f(r_1r_2,\, t-\tau) + \\
\qquad\qquad +\dfrac{r_1r_2}{2}\dfrac{\exp\left[-\dfrac{r_1^2+r_2^2}{4(t-\tau)}\right]}{(t-\tau)^2}\left\{I_1\left[\dfrac{r_1r_2}{2(t-\tau)}\right]-I_0\left[\dfrac{r_1r_2}{2(t-\tau)}\right]\right\}, \\
K_{22}(t,\tau) = \dfrac{r_2^2}{2}\dfrac{\exp\left[-\dfrac{r_2^2}{2(t-\tau)}\right]}{(t-\tau)^2}\left\{I_1\left[\dfrac{r_2^2}{2(t-\tau)}\right]-I_0\left[\dfrac{r_2^2}{2(t-\tau)}\right]\right\}+\dfrac{h_2}{\lambda_2}\dfrac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}f(r_2^2, t-\tau),
\end{cases}
$$

le funzioni incognite $\mu_1(t)$ e $\mu_2(t)$ devono soddisfare al sistema di equazioni integrali del tipo di VOLTERRA

$$
(23)\quad
\begin{cases}
\mu_1(t) + \displaystyle\int_0^t K_{11}(t,\tau)\mu_1(\tau)\,d\tau + \int_0^t K_{12}(t,\tau)\mu_2(\tau)\,d\tau = -r_1\varphi_2(t) = c_1(t)\,, \\
\mu_2(t) + \displaystyle\int_0^t K_{21}(t,\tau)\mu_1(\tau)\,d\tau + \int_0^t K_{22}(t,\tau)\mu_2(\tau)\,d\tau = 0\,,
\end{cases}
$$

del tutto simile a quello incontrato per la risoluzione del problema già studiato [15].

---

[15] Cfr. G. SESTINI, loc. cit. in [1] (I), pag. 18, formula (21).

Si consegue l'inversione di questo sistema con la formula

$$(24)\qquad \mu_i(t) = c_i(t) + \int_0^t S_{i,1}(t, \tau)c_1(\tau)\,d\tau\,, \qquad i = 1, 2,$$

essendo $S_{i,1}$ $(i = 1, 2)$ i nuclei risolventi del sistema (18) ([16]). Sostituendo questi valori in (20), si ottiene $u_2(r, t)$ con quadrature.

Passando ora a considerare il primo dei sistemi differenziali (18), fatto per semplicità $a_1^2 = 1$, si prova che ammette soluzione ponendo

$$(25)\qquad u_1(r, t) = \varphi(r_1, r, t)\,,$$

e valutando la $\mu(t)$, che compare nella espressione (6) di $\varphi(a, r, t)$, in modo da soddisfare alla condizione imposta alla $u_1(r, t)$ per $r = r_1$.

Con le solite notazioni si ha

$$\frac{\partial u_1}{\partial r} = -\frac{1}{2}\,\psi(r_1, r, t) + \frac{r_1}{2}\,\chi(r_1, r, t)\,.$$

Da questa, ricordando la (16), si ottiene

$$(26)\qquad \lim_{r\to r_1}\frac{\partial u_1}{\partial r} = \frac{1}{r_1}\,\mu(t) + \frac{r_1}{2}\int_0^t \frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^2}\exp\left[-\frac{r_1^2}{2(t-\tau)}\right]\left\{I_1\left[\frac{r_1^2}{2(t-\tau)}\right] - I_0\left[\frac{r_1^2}{2(t-\tau)}\right]\right\}d\tau\,.$$

Posto quindi

$$K(t, \tau) = \frac{r_1}{t-\tau}\exp\left[-\frac{r_1^2}{2(t-\tau)}\right]\left\{\frac{r_1}{2(t-\tau)}\left[I_1\left[\frac{r_1^2}{2(t-\tau)}\right] - I_0\left[\frac{r_1^2}{2(t-\tau)}\right]\right] + \frac{h_1}{\lambda_1}\,I_0\left[\frac{r_1^2}{2(t-\tau)}\right]\right\},$$

la $\mu(t)$ deve soddisfare all'equazione integrale del tipo di VOLTERRA

$$(27)\qquad \mu(t) + \int_0^t K(t, \tau)\mu(\tau)\,d\tau = r_1\varphi_1(t) = c(t)\,,$$

che determina la $\mu(t)$ mediante la formula di inversione

$$(28)\qquad \mu(t) = c(t) + \int_0^t S(t, \tau)c(\tau)\,d\tau\,,$$

essendo $S(t, \tau)$ il nucleo risolvente della (27) ([17]).

([16]) Cfr. G. SESTINI, loc. cit. in ([1]) (II), pp. 470-471; cfr. anche V. VOLTERRA, *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles*, Paris 1913, pag. 72.

([17]) Cfr. V. VOLTERRA, loc. cit. in ([16]), pp. 47-50.

b) Il secondo problema.

Supponiamo adesso di conoscere, quale funzione del tempo, il rendimento $H(t)$ delle sorgenti generate sulla superficie comune al cilindro e al manicotto cilindrico $(r = r_1)$.

In questa ipotesi le soluzioni $u_1(r, t)$ ed $u_2(r, t)$ dei due sistemi differenziali (18) non risultano indipendenti, come nel caso precedente, ove si supponeva nota la temperatura $u'(t)$ delle sorgenti, in quanto risultano legate per $r = r_1$ dalla relazione [18]

$$\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial r} - \lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial r} = \lambda' H(t) , \qquad \text{per} \quad r = r_1, \tag{29}$$

con λ_1, λ_2, λ' costanti.

Pensato di conoscere la temperatura $u'(t)$ delle sorgenti, i sistemi differenziali (18), con le formule (20) e (25), tenuto conto di (24) e (28), nelle quali ultime si faccia

$$c(t) = r_1 \frac{h_1}{\lambda_1} u'(t) \qquad \text{e} \qquad c_1(t) = r_1 \frac{h'}{\lambda_2} u'(t) ,$$

determinano $u_1(r, t)$ ed $u_2(r, t)$ in funzione di r, t e $u'(t)$.

Sostituendo le espressioni (21_1) e (26) in (29), posto

$$\xi(t, \tau) = (h_1 + h')^{-1} \Big\{ h_1 S(t, \tau) + h' S_{11}(t, \tau) + \left(1 - \frac{h_1}{h'}\right) \alpha(t, \tau) +$$

$$+ \int_\tau^t \left[(\beta(t, z) + \gamma(t, z)) S_{21}(z, \tau) + \alpha(t, z) \left(S_{11}(z, \tau) - \frac{h_1}{h'} S(z, \tau) \right) \right] dz \Big\} ,$$

$$H'(t) = (h_1 + h')^{-1} \lambda' H(t) ,$$

con

$$\alpha(t, \tau) = - \frac{r_1^2 h'}{2(t - \tau)^2} \exp\left[- \frac{r_1^2}{2(t - \tau)} \right] \Big\{ I_1 \left[\frac{r_1^2}{2(t - \tau)} \right] - I_0 \left[\frac{r_1^2}{2(t - \tau)} \right] \Big\} ,$$

$$\beta(t, \tau) = - \frac{r_1 h'(r_2 - r_1)}{2\sqrt{\pi r_1 r_2}} \frac{1}{(t - \tau)^{3/2}} \exp\left[- \frac{(r_2 - r_1)^2}{4(t - \tau)} \right] f(r_1 r_2, t - \tau) ,$$

$$\gamma(t, \tau) = - \frac{h' r_1 r_2}{2(t - \tau)^2} \exp\left[- \frac{r_1^2 + r_2^2}{4(t - \tau)} \right] \Big\{ I_1 \left[\frac{r_1 r_2}{2(t - \tau)} \right] - I_0 \left[\frac{r_1 r_2}{2(t - \tau)} \right] \Big\} ,$$

---

[18] Cfr. G. SESTINI, loc. cit. in [1] (II), pp. 466-467.

si ottiene, come nel caso già trattato [19], per l'incognita funzione $u'(t)$ l'equazione integrale del tipo di VOLTERRA

$$u'(t) + \int_0^t \xi(t, \tau) u'(\tau)\, d\tau = H'(t),$$

la quale, determinando la $u'(t)$, risolve il problema.

---

[19] Cfr. G. SESTINI, loc. cit. in [1] (II), pag. 471.