Lidia Bedini (*)

Sulla distribuzione della corrente alternata in un sistema di conduttori cilindrici paralleli (**).

1. – Come è noto, una corrente alternata che percorre nel senso dell'asse un conduttore cilindrico, non si distribuisce, come la corrente continua, uniformemente in ogni sezione lontana dagli estremi, ma, specie se di alta frequenza, tende ad addensarsi alla superficie del conduttore stesso; si ha cioè il noto fenomeno dello « skin-effect ».

La teoria del fenomeno ora citato si svolge, d'ordinario, per i conduttori a sezione circolare; l'estensione a conduttori di forma qualunque è stata indicata da F. Noether (1) e da D. Graffi (2).

Nella presente Nota applicheremo le considerazioni del Graffi al caso di due (o più) conduttori cilindrici paralleli che possono influenzarsi mutuamente. Ricondurremo il problema della distribuzione delle correnti in questi conduttori ad un sistema di equazioni integrali, oppure ad un sistema equivalente di equazioni differenziali e proveremo che quest'ultimo determina, in modo univoco, la distribuzione delle correnti.

2. – Consideriamo due circuiti formati di materiale non ferromagnetico, immersi nell'aria (meglio lontani da altri corpi magnetizzabili), percorsi da corrente elettrica alternata di pulsazione ω, in cui sono inseriti due conduttori cilindrici paralleli, di lunghezza l molto grande rispetto alla loro distanza e alle dimensioni delle loro sezioni.

(*) Indirizzo: Via Zambeccari, 28 - Bologna.

(**) Lavoro ricevuto il 20-XII-1949.

(1) F. Noether, *Berechnung von elektrischen Strömungfeldern*. « Geiger und Scheel, Handbuch der Physik », Bd. XIII, Springer, Berlin 1928.

(2) D. Graffi, *Sulla distribuzione delle correnti elettriche nei conduttori cilindrici*. Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna (9) 8, 79-87 (1940-41).

Per semplicità di esposizione supporremo i due circuiti omogenei e formati dallo stesso materiale di permeabilità μ e conducibilità γ; per le nostre considerazioni basta però ammettere omogenei solo i conduttori cilindrici.

Indichiamo, al solito, con $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{u}$, μ_0, $\boldsymbol{J}$ rispettivamente il campo elettrico, il campo magnetico, la densità di corrente, la permeabilità dell'aria, e il vettore magnetizzazione, quest'ultimo uguale a $(\mu - \mu_0)\boldsymbol{H}$.

Sia poi $\boldsymbol{A}$ il potenziale vettore dei due circuiti il cui volume complessivo indicheremo con S. Avremo:

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\boldsymbol{u}}{r}\,\mathrm{d}S\,. \tag{1}$$

Inoltre, considerato il vettore

$$\boldsymbol{G} = \mu_0\boldsymbol{A} + \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{rot}\int_S \frac{\boldsymbol{J}}{r}\,\mathrm{d}S\,, \tag{2}$$

si ha, almeno dove è nullo il campo impresso e trascurando le correnti di spostamento,

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial t} - \mathrm{grad}\,V\,, \tag{3}$$

dove V è il potenziale scalare.

Ammettiamo che le linee di corrente nei due cilindri siano parallele al loro asse, salvo nelle regioni prossime agli estremi; ciò porta a scrivere per i vettori $\boldsymbol{u}_1$ ed $\boldsymbol{u}_2$ che indicano le densità di corrente nei volumi v_1 e v_2 dei due cilindri, le relazioni:

$$\boldsymbol{u}_1 = u_1\boldsymbol{k}\,, \qquad \boldsymbol{u}_2 = u_2\boldsymbol{k}\,,$$

dove $\boldsymbol{k}$ è un vettore unitario parallelo all'asse z, scelto a sua volta parallelo all'asse dei cilindri stessi, u_1 e u_2 sono numeri opportuni.

Ora, poichè sono trascurate le correnti di spostamento, $\boldsymbol{u}_1$ ed $\boldsymbol{u}_2$ per la loro solenoidalità, non dipendono da z; basterà perciò calcolarle nelle sezioni mediane Σ_1 e Σ_2 dei due cilindri che faremo coincidere con il piano xy.

Siano Γ_1 e Γ_2 due porzioni dei cilindri dimezzate da Σ_1 e Σ_2, con altezza piccola rispetto a quella dei cilindri stessi. Ammettiamo in Γ_1 e Γ_2 trascurabili le azioni delle parti dei circuiti esterne a v_1 e v_2, sicchè gli integrali che esprimono $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{G}$ si possono limitare al volume v somma di v_1 e v_2.

Ora ripetendo l'ipotesi su $\boldsymbol{J}$ e considerazioni esposte nella citata Memoria del GRAFFI, si ha che nei punti P di Σ_1 e Σ_2 i vettori $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{G}$ hanno l'espressione:

$$(4)\qquad \boldsymbol{A}(P) = \frac{1}{4\pi}\int_{v_1}\frac{\boldsymbol{u}_1}{r_1}\,\mathrm{d}v_1 + \frac{1}{4\pi}\int_{v_2}\frac{\boldsymbol{u}_2}{r_2}\,\mathrm{d}v_2 = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{\Sigma_1} u_1 \log\frac{l}{\rho_1}\,\mathrm{d}\Sigma_1 + \int_{\Sigma_2} u_2 \log\frac{l}{\rho_2}\,\mathrm{d}\Sigma_2\right]\boldsymbol{k},$$

$$(5)\qquad \boldsymbol{G}(P) = \mu_0\boldsymbol{A} - \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{\Sigma_1}\frac{J_y}{2\pi}\log\rho_1\,\mathrm{d}\Sigma_1 + \int_{\Sigma_2}\frac{J_y}{2\pi}\log\rho_2\,\mathrm{d}\Sigma_2\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{\Sigma_1}\frac{J_x}{2\pi}\log\rho_1\,\mathrm{d}\Sigma_1 + \int_{\Sigma_2}\frac{J_x}{2\pi}\log\rho_2\,\mathrm{d}\Sigma_2\right)\right]\boldsymbol{k},$$

dove r_1 ed r_2 sono le distanze del punto P in cui si calcola $\boldsymbol{A}$ da $\mathrm{d}v_1$ e $\mathrm{d}v_2$, ρ_1 e ρ_2 le distanze di P da un punto generico di Σ_1 e Σ_2 (3), J_x e J_y le componenti del vettore densità di magnetizzazione $\boldsymbol{J}$ entro v_1 e v_2, vettore che, per le ipotesi citate, è indipendente da z e normale a z.

Inoltre le stesse considerazioni della nota citata portano alle relazioni, valide in Γ_1 e Γ_2,

$$\operatorname{grad} V = C_1\boldsymbol{k}, \qquad \operatorname{grad} V = C_2\boldsymbol{k},$$

con C_1 e C_2 costanti.

Dalla (3), tenendo presenti la (4) e (5) e ricordando che è $\boldsymbol{u} = \gamma\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{J} = (\mu - \mu_0)\boldsymbol{H}$, si ricava l'equazione integrale

$$(6)\qquad u_1(x,y) = \frac{\mu_0\gamma}{2\pi}\int_{\Sigma_1}\frac{\partial u_1}{\partial t}\log\rho_1\,\mathrm{d}\Sigma_1 - \frac{\partial I_1}{\partial t}\frac{\mu_0\gamma}{2\pi}\log l + \frac{\mu_0\gamma}{2\pi}\int_{\Sigma_2}\frac{\partial u_2}{\partial t}\log\rho_2\,\mathrm{d}\Sigma_2 -$$

$$- \frac{\partial I_2}{\partial t}\frac{\mu_0\gamma}{2\pi}\log l - \gamma C_1 + \frac{\gamma}{2\pi}\int_{\Sigma_1}(\mu-\mu_0)\left(\frac{\partial H_y}{\partial t}\frac{(x-x_1)}{\rho_1^2} - \frac{\partial H_x}{\partial t}\frac{(y-y_1)}{\rho_1^2}\right)\mathrm{d}\Sigma_1 +$$

$$+ \frac{\gamma}{2\pi}\int_{\Sigma_2}(\mu-\mu_0)\left(\frac{\partial H_y}{\partial t}\frac{(x-x_2)}{\rho_2^2} - \frac{\partial H_x}{\partial t}\frac{(y-y_2)}{\rho_2^2}\right)\mathrm{d}\Sigma_2 .$$

Analoga equazione vale per u_2; l'integrazione in queste equazioni è fatta rispetto a x_1, y_1 su Σ_1 e ad x_2, y_2 su Σ_2; u_1 ed u_2 sono ovviamente calcolate rispettivamente nei punti di Σ_1 e Σ_2.

Poichè le correnti si suppongono alternate, tale potrà supporsi anche il campo elettromagnetico, perciò, con la solita rappresentazione delle grandezze

---

(3) Cioè, se x, y sono le coordinate di P, x_1, y_1 quelle di un punto generico di Σ_1 e x_2, y_2 quelle di un punto generico di Σ_2, si ha

$$\rho_1 = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}, \qquad \rho_2 = \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2}.$$

alternate mediante i numeri complessi, si può porre, in luogo delle derivate rispetto al tempo, il fattore $i\omega$, essendo i l'unità immaginaria.

Inoltre, ricordando che l'induzione magnetica $\boldsymbol{B}$ è uguale al rotazionale di $\boldsymbol{G}$, avremo, entro i conduttori,

$$\mu \boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{G} . \tag{7}$$

Ora poichè è

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{G} = \mu_0 \operatorname{rot} \boldsymbol{A} + \boldsymbol{J} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \left[\int_{v_1} \frac{\boldsymbol{J}}{4\pi r_1} \, dv_1 + \int_{v_2} \frac{\boldsymbol{J}}{4\pi r_2} \, dv_2 \right] , \tag{8}$$

per le relazioni tra $\boldsymbol{J}$ ed $\boldsymbol{H}$ e la (7) abbiamo:

$$\mu_0 \boldsymbol{H} = \mu \boldsymbol{H} - \boldsymbol{J} = \operatorname{rot} \boldsymbol{G} - \boldsymbol{J} = \mu_0 \operatorname{rot} \boldsymbol{A} - \\ - \operatorname{grad} \operatorname{div} \left[\int_{\Sigma_1} \frac{\boldsymbol{J}}{2\pi} \log \rho_1 \, d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_2} \frac{\boldsymbol{J}}{2\pi} \log \rho_2 \, d\Sigma_2 \right] .$$

Inoltre, poichè $\boldsymbol{J} = \frac{(\mu - \mu_0)}{\mu} \boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{B}$ è solenoidale, all'interno dei conduttori $\boldsymbol{J}$ è pure solenoidale; quindi; applicando il teorema della divergenza all'ultimo integrale dell'equazione ora scritta, risulta:

$$\mu_0 \boldsymbol{H} = \mu_0 \operatorname{rot} \boldsymbol{A} + \frac{1}{2\pi} \operatorname{grad} \left(\int_{c_1} \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{n}_1 \log \rho_1 \, dc_1 + \int_{c_2} \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{n}_2 \log \rho_2 \, dc_2 \right) , \tag{9}$$

dove c_1 e c_2 sono i contorni di Σ_1 e Σ_2, $\boldsymbol{n}_1$ ed $\boldsymbol{n}_2$ i vettori unitari normali a z e a c_1 e c_2.

Indicando con $\cos n_1x$, $\cos n_1y$, $\cos n_2x$, $\cos n_2y$, i coseni degli angoli formati da n_1 ed n_2 con gli assi x e y e prendendo le componenti sugli assi dei due membri della (9), avremo:

$$\mu_0 H_x = -\frac{\mu_0}{2\pi} \int_{\Sigma_1} u_1 \frac{y - y_1}{\rho_1^2} \, d\Sigma_1 - \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{\Sigma_2} u_2 \frac{y - y_2}{\rho_2^2} \, d\Sigma_2 + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{c_1} (\mu - \mu_0)(H_x \cos n_1x + H_y \cos n_1y) \frac{x - x_1}{\rho_1^2} \, dc_1 + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{c_2} (\mu - \mu_0)(H_x \cos n_2x + H_y \cos n_2y) \frac{x - x_2}{\rho_2^2} \, dc_2 , \tag{10}$$

e analoga equazione per $\mu_0 H_y$.

Le equazioni (6), (10) e analoghe formano un sistema di quattro equazioni integrali in u_1, u_2, H_x, H_y. Risolto tale sistema si possono determinare le costanti C_1 e C_2, supponendo note le intensità di corrente I_1 e I_2 nei due conduttori e ricordando che è:

$$I_1 = \int_{\Sigma_1} \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{k}\, \mathrm{d}\Sigma_1\,, \qquad I_2 = \int_{\Sigma_2} \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{k}\, \mathrm{d}\Sigma_2\,. \tag{11}$$

Se nella (6) poniamo

$$m = \frac{\partial I_1}{\partial t}\frac{\mu_0}{2\pi}\log l + \frac{\partial I_2}{\partial t}\frac{\mu_0}{2\pi}\log l\,, \tag{12}$$

si possono indicare tutti i termini costanti con $-\gamma(m + C_1)$; analogamente nell'equazione che dà il valore di u_2 possiamo sostituire alle varie costanti $-\gamma(m + C_2)$.

Risolvendo il sistema delle (6), (10) e analoghe, si ottengono u_1, u_2, H_x, H_y come funzioni lineari di $m + C_1$ ed $m + C_2$, determinati a loro volta dalle (11).

3. – Vogliamo ora sostituire al sistema di equazioni integrali trovate un sistema equivalente di equazioni differenziali.

A tale scopo introduciamo due nuove incognite

$$\boldsymbol{e} = -\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial t} + \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\partial I_1}{\partial t}\log l\boldsymbol{k} + \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\partial I_2}{\partial t}\log l\boldsymbol{k}, \tag{13}$$

$$\boldsymbol{h} = \frac{\operatorname{rot}\boldsymbol{G}}{\mu}\,, \tag{14}$$

convenendo di porre, per i punti esterni ai cilindri, nella (14) μ_0 in luogo di μ. Dall'espressione (5) di $\boldsymbol{G}$ si ha poi $\boldsymbol{e}$ parallelo a $\boldsymbol{k}$.

Le considerazioni che nel paragrafo precedente ci hanno provata la (9), come conseguenza della (7) e (8), ci dimostrano che $\mu_0\,\boldsymbol{h}$ è rappresentato anche all'esterno dei conduttori dal secondo membro della (9), in altre parole $\boldsymbol{h}$ è il campo generato da due conduttori cilindrici indefiniti.

Anzi i risultati del numero precedente ci fanno vedere che $\boldsymbol{h}$ ed $\boldsymbol{e} - (m + C_1)\boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{e} - (m + C_2)\boldsymbol{k}$, rappresentano nell'interno dei cilindri il campo magnetico e il campo elettrico.

Poichè $\boldsymbol{e}$ ed $\boldsymbol{h}$ dipendono solo da x, y, basterà considerarli in questo piano. È facile vedere che soddisfano alle equazioni di MAXWELL [4]:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{h} = \boldsymbol{u}\,, \tag{15}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{e} = -\mu\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial t}\,. \tag{16}$$

---

[4] La seconda di queste equazioni si dimostra subito applicando l'operatore rot alla (13) e tenendo conto della (14); s'intende che all'esterno dei cilindri μ va sostituito

Ripetendo poi considerazioni della Nota sopracitata, si trova che $\boldsymbol{e}$ ed $\boldsymbol{h}$ hanno almeno le componenti tangenziali continue sulle linee del piano xy che separano i conduttori dal dielettrico e che per P esterno ad un cerchio di centro in un punto O del piano xy e di raggio R_0 sufficientemente grande, valgono le relazioni:

$$\boldsymbol{e}(P) = e\boldsymbol{k} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\partial I_1}{\partial t}\log R\boldsymbol{k} + \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\partial I_2}{\partial t}\log R\boldsymbol{k} + \frac{\alpha}{R}\boldsymbol{k}\,, \tag{17}$$

$$\boldsymbol{h} = \operatorname{rot}\frac{I_1 + I_2}{R}\boldsymbol{k} + \frac{1}{R^2}\boldsymbol{\beta}\,, \tag{18}$$

dove R è la distanza di P da O ed α e β sono grandezze limitate per ogni t e per ogni $R > R_0$.

Infine osserviamo che, entro i due conduttori, $\boldsymbol{u}$ ha l'espressione:

$$\boldsymbol{u} = \gamma(\boldsymbol{e} - m\boldsymbol{k} - C_1\boldsymbol{k})\,, \qquad \boldsymbol{u} = \gamma(\boldsymbol{e} - m\boldsymbol{k} - C_2\boldsymbol{k})\,. \tag{19}$$

4. – Il sistema di equazioni (15), (16), (19), (11), in $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{u}$, $m + C_1$, $m + C_2$, del paragrafo precedente, con le suddette condizioni di continuità e di convergenza all'infinito, determinano in modo unico la $\boldsymbol{u}$, ossia la distribuzione della corrente nei conduttori.

Per provare ciò siano $\boldsymbol{e} + \boldsymbol{e}'$, $\boldsymbol{h} + \boldsymbol{h}'$, $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}'$, $m + C_1 + C_1'$, $m + C_2 + C_2'$ un'altra eventuale soluzione del sistema in discorso.

Poichè le equazioni soprascritte sono lineari, si ha:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{h}' = \boldsymbol{u}'\,, \tag{20}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{e}' = -\mu\frac{\partial \boldsymbol{h}'}{\partial t}\,, \tag{21}$$

relazioni analoghe alle (15) e (16). Inoltre, per le (11),

$$\int_{\Sigma_1}\boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{k}\,d\Sigma_1 = 0\;; \qquad \int_{\Sigma_2}\boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{k}\,d\Sigma_2 = 0\,. \tag{22}$$

Moltiplichiamo ora la (20) scalarmente per $\boldsymbol{e}'$ e la (21) per $\boldsymbol{h}'$; sottraendo membro a membro si ottiene:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{h}' \times \boldsymbol{e}' - \operatorname{rot}\boldsymbol{e}' \times \boldsymbol{h}' = \boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{e}' + \mu\frac{\partial \boldsymbol{h}'}{\partial t} \times \boldsymbol{h}'\,.$$

---

con μ_0. La prima si ottiene osservando che $\boldsymbol{h}$ è il campo magnetico generato da due cilindri indefiniti, oppure notando che dall'espressione (9) valida anche per $\boldsymbol{h}$, come si è osservato, si ha:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{h} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \Delta'\boldsymbol{A} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{u} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A}\,,$$

che, essendo $\boldsymbol{A}$ solenoidale, coincide con la (15).

Integriamo questa equazione su un cerchio Ω di centro O e raggio R, che contenga nel suo interno le sezioni Σ_1 e Σ_2 dei due conduttori nel piano xy.

Ricordiamo poi che $\boldsymbol{e}'$ ed $\boldsymbol{h}'$ hanno componenti tangenziali continue sulle linee c_1 e c_2, quindi su tali linee è continua $\boldsymbol{e}' \wedge \boldsymbol{h}' \times \boldsymbol{n}$ (essendo $\boldsymbol{n}$ versore normale a z e a c_1 o c_2), sicchè, applicando il teorema della divergenza (s è la circonferenza che limita Ω) si ottiene:

$$(23) \qquad \int_s \boldsymbol{h}' \wedge \boldsymbol{e}' \times \operatorname{grad} R \,\mathrm{d}s = \int_{\Sigma_1} \boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{e}' \,\mathrm{d}\Sigma_1 + \int_{\Sigma_2} \boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{e}' \,\mathrm{d}\Sigma_2 + \int_{\Omega} \mu \frac{\partial \boldsymbol{h}'}{\partial t} \times \boldsymbol{h}' \,\mathrm{d}\Omega .$$

Si ha poi, ricordando le (19),

$$(24) \qquad \boldsymbol{e}' = \frac{\boldsymbol{u}'}{\gamma} - C_1' \boldsymbol{k}, \qquad \boldsymbol{e}' = \frac{\boldsymbol{u}'}{\gamma} - C_2' \boldsymbol{k}_2$$

e sostituendo nella (23):

$$(25) \qquad \int_{\Sigma_1} \frac{u'^2}{\gamma} \mathrm{d}\Sigma_1 + \int_{\Sigma_2} \frac{u'^2}{\gamma} \mathrm{d}\Sigma_2 - C_1' \int_{\Sigma_1} \boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{k} \,\mathrm{d}\Sigma_1 - C_2' \int_{\Sigma_2} \boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{k} \,\mathrm{d}\Sigma_2 + \\ + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mu \frac{h'^2}{2} \mathrm{d}\Omega = \int_s \boldsymbol{h}' \wedge \boldsymbol{e}' \times \operatorname{grad} R \,\mathrm{d}s .$$

Per le (22) i termini in C_1' e C_2' sono nulli.

Indicando con T il periodo del campo elettromagnetico e integrando da t a $t+T$ avremo, essendo $\int_{\Omega} \mu\, h'^2 \,\mathrm{d}\Omega$ periodica,

$$(26) \qquad \int_t^{t+T} \mathrm{d}t \int_{\Sigma_1} \frac{u'^2}{\gamma} \mathrm{d}\Sigma_1 + \int_t^{t+T} \mathrm{d}t \int_{\Sigma_2} \frac{u'^2}{\gamma} \mathrm{d}\Sigma_2 = \int_t^{t+T} \mathrm{d}t \int_s \boldsymbol{h}' \wedge \boldsymbol{e}' \times \operatorname{grad} R \,\mathrm{d}s.$$

Ora dalle (17) e (18) si ha che $\boldsymbol{e}'$ ed $\boldsymbol{h}'$ tendono allo zero per P tendente all'infinito e per ogni t, rispettivamente come $\frac{1}{R}$ e come $\frac{1}{R^2}$; perciò passando al limite per $P \to \infty$ l'integrale a secondo membro della (26) è nullo.

Allora, poichè γ è sempre positivo, la (26) è soddisfatta solo se $\boldsymbol{u}'$ è nulla in ogni istante e in ogni punto delle sezioni Σ_1 e Σ_2. Le equazioni soprascritte determinano perciò, come già si è affermato, in modo unico la distribuzione delle correnti nei conduttori [5].

---

[5] Al momento di rivedere le bozze di stampa vengo a conoscenza di una ricerca di C. MANNEBACH [*An integral equation for skin effect in parallel conductors*, Journ. Math. Physics **1**, 123-146 (1922)] in cui si studia il problema considerato nella presente Nota. Nella pregevole ricerca del MANNEBACH non sono però contenuti gran parte dei risultati qui conseguiti e cioè le equazioni integrali per i conduttori magnetici e il teorema di unicità.