JAURÈS CECCONI (*)

Una proprietà caratteristica delle trasformazioni assolutamente continue. (**)

Osservazione, durante la correzione delle bozze di stampa. La presente Nota fu già, in sunto, l'argomento di una mia Comunicazione al 3º Convegno della Unione Matematica Italiana, tenutosi a Pisa nel settembre 1948. È avvenuto che nell'anno 1949, in cui presentai questa mia Nota per la stampa, il RADÓ ritrovò il mio teorema. Vedasi:

T. RADÓ, *On essentially absolutely continuous plane transformations*. Bull. Amer. Math. Soc. 55, 629-632 (1949).

Mi trovo ora costretto a pubblicare egualmente la presente Nota in quanto essa è strettamente collegata ad altro mio lavoro che esce in questo stesso fascicolo e che venne presentato contemporaneamente all'attuale Nota per la stampa in questa Rivista.

Introduzione.

Siano $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ due funzioni continue nel quadrato unitario A del piano uv e sia T la trasformazione piana continua

$$(1) \qquad T: \quad x = x(u, v)\,, \quad y = y(u, v)\,, \qquad (u, v) \in A\,.$$

Allo scopo principale di studiare il problema dell'area delle superficie in forma parametrica sono state proposte varie definizioni di trasformazione piana «a variazione limitata» ed «assolutamente continua». Tra le più notevoli, per quanto corrispondenti ad un significato dell'area diverso da quello del LEBESGUE, sono le definizioni date da S. BANACH [1] e da G. VITALI [8] le quali costituiscono una diretta generalizzazione del concetto di funzione di una variabile «a variazione limitata» ed «assolutamente continua».

In relazione a queste S. BANACH [1] dimostrò una proprietà caratteristica,

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Pisa (Italia).
(**) Lavoro ricevuto il 10-XII-1949.

già osservata anche da B. LEVI [5] per le funzioni di una variabile, espressa dal seguente

Teorema. Condizione necessaria e sufficiente perchè una trasformazione piana continua « a variazione limitata secondo BANACH » sia « assolutamente continua secondo BANACH » è che trasformi ogni insieme di punti di misura nulla in un insieme di punti di misura nulla.

In questi ultimi anni L. CESARI [2], [3] ha dato nuovi concetti di trasformazione piana « a variazione limitata » (B.V.) ed « assolutamente continua » (A.C.) che permettono di caratterizzare rispettivamente le superficie di area finita secondo LEBESGUE e quelle la cui area, supposta finita, è espressa dall'integrale classico.

Quasi contemporaneamente ed indipendentemente T. RADÓ e P. V. REICHELDERFER [1], hanno esteso per altra via le definizioni di S. BANACH e sono pervenuti alla considerazione di trasformazioni piane « a variazione essenzialmente limitata » (e.B.V.) ed « essenzialmente assolutamente continue » (e.A.C.) che, come ha fatto vedere T. RADÓ [6], coincidono rispettivamente con quelle date da L. CESARI. È notevole il fatto che per tali trasformazioni continue la proprietà caratteristica enunciata da S. BANACH non sussiste, come ha fatto vedere L. GIULIANO [4]. Scopo della presente Nota è di dimostrare che sussiste invece una proprietà caratteristica del tipo di quella di S. BANACH limitatamente ai punti che appartengono ai continui così detti essenziali.

Precisamente dimostro il

Teorema. *Se T è la trasformazione piana* (1) *e se essa è B.V., condizione necessaria e sufficiente perchè essa sia A.C. è che detto E l'insieme dei punti che appartengono a qualche e.m.m.c. di A, per ogni insieme I di A per il quale è* $|E \cdot I| = 0$ *si abbia* $|T(E \cdot I)| = 0$.

1. – Definizioni e notazioni.

Sia B l'insieme limitato e chiuso del piano xy i cui punti sono immagini di qualche punto di A, sia cioè $B = T(A)$. Sia K un quadrato, con i lati paralleli agli assi x, y, che contiene nel suo interno l'insieme B. Se (x, y) è un punto di B esiste in A un insieme non vuoto di punti (u, v): l'insieme dei modelli di (x, y). Tale insieme, che è indicato con $T^{-1}(x, y)$, è chiuso ed i suoi componenti sono dei continui, che possono ridursi a punti, ai quali si dà il nome di continui modelli massimali (m.m.c.) di (x, y).

Sia c una curva di JORDAN semplice chiusa orientata in A. Allora c è trasformata da T in una curva continua chiusa orientata, non necessariamente semplice, del piano xy. Sia c' tale curva. La funzione $O(x, y; c)$ è definita come segue: se (x, y) appartiene a c' allora $O(x, y; c) = 0$, altrimenti $O(x, y; c)$ è uguale all'indice topologico del punto (x, y) rispetto a c'. Sia R una regione di JORDAN di connessione finita e sia $D = c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_l$ il contorno orientato di R. La funzione $O(x, y; R)$ è definita come segue: se (x, y) appartiene a $T(D)$ è $O(x, y; R) = 0$ altrimenti è $O(x, y; R) = \sum_{i=1}^{l} O(x, y; c_i)$. Sia R una regione di JORDAN, $R \subset A$, essa sarà chiamata indicatrice per un punto (x, y) quando si avrà $O(x, y; R) = 0$. Un m.m.c. γ di (x, y) sarà chiamato essenziale (e.m.m.c.) se ha le seguenti proprietà: α) $\gamma \subset A^0$, β) se G è un insieme aperto tale che $\gamma \subset G$ allora esiste una regione indicatrice R per (x, y) tale che $\gamma \subset R^0 \subset G$.

La funzione $\Psi(x, y; T)$, molteplicità assoluta, è stata definita da L. CESARI nel seguente modo: $\Psi(x, y; T) = \text{extr sup} \sum_{i=1}^{n} | O(x, y; p_i) |$ ove $p_1, p_2, \ldots, p_n$ è un gruppo finito di regioni semplici di JORDAN, appartenenti ad A e senza punti interni in comune.

La funzione $k(x, y; T)$ è stata definita da T. RADÓ e P. V. REICHELDERFER i quali hanno dimostrato che « $k(x, y; T)$ è uguale al numero degli e.m.m.c. di (x, y) » . Per tale ragione essa è stata chiamata funzione di molteplicità essenziale.

Le funzioni $\Psi(x, y; T)$, $k(x, y; T)$ sono state confrontate da T. RADÓ [6] il quale ha dimostrato che queste funzioni, per ogni trasformazione piana continua coincidono, salvo al più per un insieme numerabile di punti (x, y).

Entrambe le funzioni $\Psi(x, y; T)$, $k(x, y; T)$ sono semicontinue inferiormente, esistono perciò (finiti o $+\infty$) gli integrali

$$W(T) = \iint_K \Psi(x, y; T)\, dx\, dy = \iint_K k(x, y; T)\, dx\, dy$$

che esprimono la variazione totale della trasformazione T. Se $W(T) < +\infty$ la T è a variazione limitata (B.V.).

La trasformazione T viene detta assolutamente continua (A.C.) se

a) per ogni $\varepsilon > 0$ può determinarsi un numero $\sigma > 0$ tale che per ogni gruppo di poligoni semplici di A, $\{p_s;\ s = 1, 2, \ldots, n\}$, a due a due senza punti interni in comune e tali che $\sum_{s=1}^{n} |p_s| < \sigma$, si ha $\sum_{s=1}^{n} \iint_K | O(x_i, y_i; p_s) |\, dx\, dy < \varepsilon$;

b) per ogni poligono p_0 di A e per ogni suddivisione $\{p_s;\ s = 1, 2, \ldots, n\}$ di p_0 in poligoni semplici si ha $W(T_{p_0}) = \sum_{i=1}^{n} W(T_{p_i})$; ove T_{p_s} $(s = 0, 1, \ldots, n)$ è la trasformazione piana T_{p_s}: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $(u, v) \in p_s$.

2. - Dimostrazione del Teorema.

La condizione è sufficiente. Dimostro intanto che è soddisfatta la condizione a) della definizione di A.C..

Suppongo, per assurdo, che esista un $\varepsilon > 0$ ed una successione di gruppi di poligoni semplici, ogni gruppo essendo costituito da un numero finito di poligoni appartenenti ad A, a due a due senza punti interni in comune $\{p_s;\ s = 1, 2, \ldots, \nu_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, tali che

$$\sum_{s=1}^{\nu_n} | p_s^{(n)} | < \frac{1}{2^n}, \quad \sum_{s=1}^{\nu_n} \iint_K | O(x, y;\, p_s^{(n)}) | \, dx\, dy > \varepsilon > 0 .$$

Intanto, poichè T è B.V. le funzioni caratteristiche risultano integrabili secondo LEBESGUE, si può perciò, in base allo $\varepsilon > 0$, sopra fissato, determinare un $\sigma > 0$ tale che per ogni insieme J misurabile di punti di K di misura $\leqslant \sigma$ si abbia

$$\iint_J \Psi(x, y;\ T)\, dx\, dy = \iint_J k(x, y;\ T)\, dx\, dy < \varepsilon .$$

Per ogni n (con $n = 1, 2, \ldots$) considero i seguenti insiemi:

F_n, insieme dei punti del piano uv che appartengano ai poligoni $\{p_s;\ s = 1, 2, \ldots, \nu_n\}$ dell'ennesimo gruppo.

H_n, insieme dei punti del piano xy per i quali si ha $\Psi(x, y;\ T) = k(x, y;\ T) \neq +\infty$, $\sum_{s=1}^{\nu_n} | O(x, y;\, p_s^{(n)}) | \neq 0$.

G_n, è l'insieme dei punti (u, v) che appartengono agli m.m.c., essenziali secondo T in $p_s^{(n)}$ $(s = 1, 2, \ldots, \nu_n)$, dei punti $(x, y) \in H_n$.

F, $F = \max\lim\limits_{n\to\infty} F_n$.

G, $G = \max\lim\limits_{n\to\infty} G_n$.

Sugli insiemi così definiti osservo quanto segue. Gli insiemi F_n, H_n, G_n, F, G, sono misurabili. Si ha $| F | = 0$, $G_n \subset F_n$, $| G | = 0$. Si ha $| H_n | > \sigma$.

Se fosse infatti $| H_n | \leqslant \sigma$ si avrebbe

$$\varepsilon < \sum_{s=1}^{\nu_n} \iint_K | O(x, y;\, p_s^{(n)}) | \, dx\, dy = \iint_K \sum_{s=1}^{\nu_n} | O(x, y;\, p_s^{(n)}) | \, dx\, dy =$$

$$= \iint_{H_n} \sum_{s=1}^{\nu_n} | O(x, y;\, p_s^{(n)}) | \, dx\, dy \leqslant \iint_{H_n} \Psi(x, y;\ T)\, dx\, dy < \varepsilon .$$

L'insieme G_n è non vuoto, infatti l'insieme H_n è di misura positiva e per ciascun punto (x, y) di H_n esiste un poligono indicatore $p_s^{(n)}$ che contiene almeno un e.m.m.c. di (x, y).

Evidentemente è $T(G_n) = H_n$ e $G_n \subset E$; perciò è anche $G \subset E$.

Provo ora che $T(G) = \max\lim_{n\to\infty} T(G_n)$.

Intanto $T(G) \subset \max\lim_{n\to\infty} T(G_n)$. Infatti se $(x, y) \in T(G)$ esiste un suo e.m.m.c., sia γ, che appartiene ad infiniti G_n (con $n = n_1, n_2, \ldots, n_m, \ldots$) e perciò $(x, y) \in T(G_n)$, $(n = n_1, n_2, \ldots, n_m, \ldots)$ e quindi $(x, y) \in \max\lim_{n\to\infty} T(G_n)$.

Viceversa se $(x, y) \in \max\lim_{n\to\infty} T(G_n)$ vorrà dire che (x, y) appartiene ad infiniti $T(G_n)$, $(n = n_1', n_2', \ldots, n_m', \ldots)$, esistono perciò altrettanti e.m.m.c. di (x, y) in ciascuno di tali G_n, precisamente $\gamma_1 \subset G_{n_1'}, \gamma_2 \subset G_{n_2'}, \ldots, \gamma_m \subset G_{n_m'}, \ldots$; ma poichè $k(x, y; T) \neq +\infty$, esiste solo un numero finito di e.m.m.c. di (x, y), e perciò uno almeno di essi, sia γ_0, appartiene ad infiniti G_n e quindi a G; di conseguenza $(x, y) \in T(G)$. Si ha allora

$$T(G \cdot E) = T(G) = \max\lim_{n\to\infty} T(G_n) = \max\lim_{n\to\infty} H_n$$

e quindi

$$| T(G \cdot E) | \geqslant \max\lim_{n\to\infty} | H_n | \geqslant \sigma .$$

Ma $| G \cdot E | = 0$, si è così pervenuti ad un assurdo.

Dimostro ora che è soddisfatta la condizione $b)$ della definizione di A.C.. Per ogni poligono $p \subset A$ considero la trasformazione T_p definita dalle equazioni T_p: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $(u, v) \in p$.

Sia p_0 un poligono semplice di A, $\{ p_s;\ s = 1, 2, \ldots, n \}$ una suddivisione di p_0 in n poligoni semplici a due a due senza punti interni in comune. Sia N l'insieme dei punti (x, y) in cui è $k(x, y; T) = +\infty$.

Per ogni punto (x, y) di $K - N$, $k(x, y; T_{p_s})$ dà il numero finito degli m.m.c. di (x, y) essenziali in p_s, si ha perciò

$$k(x, y; T_{p_0}) \geqslant \sum_{s=1}^{n} k(x, y; T_{p_s}) .$$

Sia allora λ l'insieme, di misura nulla, di punti (u, v) che appartengono alle poligonali che costituiscono il contorno dei poligoni p_s, $(s = 1, 2, \ldots, n)$. Considero un punto $(x, y) \in K - N$ in cui sia $k(x, y; T) = \mu$. Se le linee che costituiscono λ non incontrano gli e.m.m.c. di (x, y) in p_0, siano essi $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\mu$, allora tali m.m.c. seguitano ad essere essenziali rispetto ai poligoni p_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$ cui sono interni e nella relazione scritta sopra vale il segno di uguaglianza. Altrimenti si ha che λ incontra l'insieme $\sum_{i=1}^{\mu} \gamma_i$ ed è quindi $(x, y) \in T(\lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} \gamma_i) \subset T(\lambda \cdot E)$.

Ma $| T(\lambda \cdot E) | = 0$ per essere $| \lambda \cdot E | = 0$, è perciò, quasi dappertutto in K,

$$\sum_{s=1}^{n} k(x, y; T_{\nu_s}) = k(x, y; T_{\nu_0})$$

e quindi

$$W(T_{\nu_0}) = \sum_{s=1}^{n} W(T_{\nu_s}) .$$

La sufficienza della condizione è completamente dimostrata.

La condizione è necessaria. Ciò risulta dai seguenti fatti:

a) Se T è A.C. essa è anche e.A.C., ed anche A.C.E. [6], [7].

b) Se T è A.C.E. e se I è un insieme di punti di A per cui è $| E \cdot I | = 0$ allora è anche $| T(E \cdot I) | = 0$ [7].

Il teorema enunciato nella introduzione è così completamente dimostrato.

Bibliografia.

[1] S. BANACH, *Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie*. Fund. Math. **7**, 225-236 (1925).

[2] L. CESARI, *Caratterizzazione analitica delle superficie continue di area finita secondo Lebesgue*. Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) **10**, 253-294 (1941).

[3] L. CESARI, *Sui fondamenti geometrici dell'integrale classico per l'area delle superficie in forma parametrica*. Mem. Accad. Italia **13**, 1323-1481 (1943).

[4] L. GIULIANO, *Sulle trasformazioni assolutamente continue*. Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) **12**, 161-172 (1943).

[5] B. LEVI, *Ricerche sulle funzioni derivate*. Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. **15**, 674-684 (1906).

[6] T. RADÓ, *Two-dimensional concepts of bounded variation and absolute continuity*. Duke Math. J. **14**, 587-608 (1947).

[7] T. RADÓ and P. V. REICHELDERFER, *A theory of absolutely continuous transformations in the plane*. Trans. Amer. Math. Soc. **49**, 258-307 (1941).

[8] G. VITALI, *Sulle funzioni continue*. Fund. Math. **8**, 175-188 (1926).