VITTORIO E. BONONCINI (*)

Sulle funzioni lipschitziane di due variabili. (**)

Si danno esempi effettivi di funzioni di due variabili che mostrano l'indipendenza tra la lipschitzianità di ordine α, $0 < \alpha < 1$, e l'integrabilità L^{β}, $1 < \beta \leqslant 2$, delle derivate parziali prime delle funzioni assolutamente continue secondo TONELLI.

1. - Sia $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, una funzione reale, assolutamente continua. È noto che in queste ipotesi la $f(x)$ ammette derivata prima finita quasi dappertutto e tale derivata è integrabile L; è pure noto che se la $f(x)$ possiede la derivata prima integrabile L^{β} ($\beta > 1$), allora la $f(x)$ è lipschitziana di ordine α (lip α) in senso generalizzato per ogni $\alpha \leqslant 1 - 1/\beta$. Viceversa dati ad arbitrio due numeri reali α, β, $0 < \alpha < 1$, $\beta > 1$, esistono funzioni di una sola variabile assolutamente continue, lip α e la cui derivata prima non è integrabile L^{β} (1).

(*) Indirizzo: Istituto Matematico « S. PINCHERLE », Università, Bologna (Italia).

(**) Ricevuto per la stampa il 10-I-1950.

(1) Diamo qui un semplice esempio. Se $\alpha \leqslant 1 - 1/\beta$, allora la funzione $f(x) = x^{\alpha}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, è assolutamente continua e la sua derivata $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ non è integrabile L^{β} essendo $\beta(\alpha - 1) \leqslant -1$. Finalmente, se $0 \leqslant x \leqslant x' \leqslant 1$, allora $0 \leqslant f(x') - f(x) = x'^{\alpha} - x^{\alpha} = \alpha(x' - x)\xi^{\alpha-1} < (x' - x)^{\alpha}$ essendo $0 \leqslant x < \xi < x' \leqslant 1$, $0 < \alpha < 1$. Perciò $f(x)$ è lip α.

Sia $\alpha > 1 - 1/\beta$ e perciò, posto $\gamma = \beta(\alpha - 1) + 1$, è $0 < \gamma < \alpha < 1$. Sia $\delta_n = n^{-2/(\alpha+\gamma)}$, $(n = 1, 2, \ldots)$. Le serie $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{\alpha}$ sono convergenti, mentre la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{\gamma}$ è divergente. Poniamo $x_0 = 0$, $x_n = 2(\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n)$, $(n = 1, 2, \ldots)$, $\omega = \lim_{n \to \infty} x_n$, onde $x_n = x_{n-1} = 2\delta_n$, $0 = x_0 < x_1 < \ldots < \omega$. Poniamo $f(\omega) = 0$, $f(x) = (x - x_{n-1})^{\alpha}$ se $x_{n-1} \leqslant x \leqslant x_{n-1} + \delta_n$, $f(x) = (x_n - x)^{\alpha}$ se $x_{n-1} + \delta_n \leqslant x \leqslant x_n$, $(n = 1, 2, \ldots)$. La funzione $f(x)$ è così definita, continua e non negativa in $(0, \omega)$. È poi $\int_{x_{n-1}}^{x_n} | f'(x) | \, dx = 2\delta_n^{\alpha}$, e perciò dalla convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^{\alpha}$ segue l'integrabilità L della $f'(x)$ in $(0, \omega)$

Da quanto sopra, segue che l'integrabilità L^β con $\beta > 1$ della derivata prima implica la lipschitzianità della $f(x)$, ma non inversamente.

Per le funzioni $f(x, y)$ di due variabili x, y, assolutamente continue secondo TONELLI (ACT), le cose vanno diversamente, nel senso che l'integrabilità L^β $(\beta > 1)$ delle derivate parziali prime e la lipschitzianità della funzione sono fatti completamente indipendenti.

Nel presente lavoro si dimostrano con esempi effettivi le seguenti proposizioni:

a) *Dati ad arbitrio due numeri reali* α, β, $0 < \alpha < 1$, $1 < \beta \leqslant 2$, *esistono funzioni di due variabili* ACT, *non* lip α, *dotate di derivate parziali prime integrabili* L^β.

b) *Dati ad arbitrio due numeri reali* α, β, $0 < \alpha < 1$, $1 < \beta$, *esistono funzioni di due variabili* ACT, lip α, *le cui derivate prime sono non integrabili* L^β.

Rimane però ancora aperta la questione se l'integrabilità L^β con $\beta > 2$, la delle derivate parziali prime implica o no la lipschitzianità della funzione stessa ([2]).

2. – Si dice che $f(x, y)$, $(x, y) \in I$ *è lipschitziana in senso generalizzato, o* lip α nell'insieme I, se esiste una costante $c > 0$ (finita) tale che

$$| f(P') - f(P'') | \leqslant c(P'P'')^\alpha$$

per ogni coppia di punti $P' \equiv (x', y')$, $P'' \equiv (x'', y'')$ di I, indicando con $(P'P'')$ distanza dei due punti P' e P''. Se $\alpha = 1$ la $f(x, y)$ si dice *lipschitziana*, o lip 1, in I.

---

e quindi $f(x)$ è assolutamente continua in $(0, \omega)$. È ancora $\int_{x_{n-1}}^{x_n} | f'(x) |^\beta \, dx = 2\alpha^\beta \delta_n^\gamma$ e, perciò, dalla divergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^\gamma$ segue che $f'(x)$ non è integrabile L^β in $(0, \omega)$. Siano ora x, x' punti di $(0, \omega)$. Se $x_{n-1} \leqslant x \leqslant x' \leqslant x_{n-1} + \delta_n$ oppure $x_{n-1} + \delta_n \leqslant x \leqslant x' \leqslant x_n$, allora sappiamo già che $| f(x') - f(x) | \leqslant | x' - x |^\alpha$. Se $x_{n-1} \leqslant x \leqslant x_{n-1} + \delta_n \leqslant x' \leqslant x_n$ allora $| f(x') - f(x) | \leqslant | f(\bar{x}) - f(x) | + | f(x') - f(\bar{x}) | \leqslant | \bar{x} - x |^\alpha + | x' - \bar{x} |^\alpha \leqslant 2(x' - x)^\alpha$, ove $\bar{x} = x_{n-1} + \delta_n$ e si è tenuto conto della relazione $u^\alpha + v^\alpha \leqslant 2(u + v)^\alpha$, $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$. Analogamente, in ogni caso che si ottenga in relazione alle seguenti alternative: $x \in (x_{n-1}, x_{n-1} + \delta_n)$, $x \in (x_{n-1} + \delta_n, x_n)$, e $x' \in (x_{m-1}, x_{m-1} + \delta_m)$, $x' \in (x_{m-1} + \delta_m, x_m)$, $n \leqslant m$. Sia infine $x_{n-1} \leqslant x \leqslant x_n$, $x' = \omega$. Allora $| f(x) - f(\omega) | : | x - \omega |^\alpha \leqslant \delta_n^\alpha : 2(\delta_{n+1} + \delta_{n+2} + \dots)^\alpha \leqslant \delta_n^\alpha 2^{-\alpha} \delta_{n+1}^{-\alpha} = 2^{-\alpha} [n : (n+1)] - 2\alpha/(\alpha + \gamma) < 2$. È così dimostrato che $f(x)$ è lip α in $(0, \omega)$.

([2]) La sola esistenza di funzioni verificanti le condizioni delle proposizioni *a*) e *b*) era stata precedentemente provata dal CAPPETTI, con metodi topologici, nella sua tesi di laurea discussa nella Università di Pisa nel luglio 1942.

Diremo *costante di lipschitzianità* di ordine α di $f(x, y)$ in I il numero

$$c = \text{extr sup} \frac{|f(P') - f(P'')|}{(P'P'')^\alpha},$$

per ogni coppia di punti P', P'' di I, $P' \neq P''$.

3. – Una funzione $f(x, y)$ definita nel quadrato $Q \equiv (0, 0; 1, 1)$, di vertici opposti $(0, 0)$, $(1, 1)$, si dice *assolutamente continua* secondo TONELLI (ACT) se, per quasi tutti i valori $\bar{x}$ e $\bar{y}$ di $(0, 1)$ le $f(\bar{x}, y)$ e $f(x, \bar{y})$ sono funzioni assolutamente continue rispettivamente della y e della x in $(0, 1)$, e se inoltre le variazioni totali $V_y(\bar{x})$, $V_x(\bar{y})$ della $f(\bar{x}, y)$ e $f(x, \bar{y})$ in $(0, 1)$ sono funzioni, rispettivamente della $\bar{x}$ e della $\bar{y}$, integrabili in $(0, 1)$ [3].

Qualora $f(x, y)$, continua in Q, sia assolutamente continua come funzione della sola x per quasi ogni y e sia assolutamente continua come funzione della sola y per quasi ogni x, allora per l'assoluta continuità secondo TONELLI occorre e basta che le derivate parziali prime $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ siano integrabili L in Q.

4. – Consideriamo la funzione $f(x, y)$ così definita

$$z = f(x, y) = \begin{cases} h\left[1 - \left\{\dfrac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{r^2}\right\}^{\gamma/2}\right] & \text{se } (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq r^2, \\ 0 \text{ per ogni altra coppia } (x, y) \text{ di } Q\,, \end{cases} \tag{1}$$

essendo il cerchio $C \equiv [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2]$ contenuto in $Q \equiv (0, 0; 1, 1)$, γ un numero reale, $0 < \gamma < 1$, h ed r costanti positive.

Ci proponiamo di vedere se la funzione (1) ha derivate parziali prime integrabili L^β, con $1 < \beta \leq 2$, e di calcolare la costante di lipschitzianità c_α, $(0 < \alpha < 1)$.

Osserviamo anzitutto che in luogo della (1) si può considerare la funzione

$$z = \frac{h}{r^\gamma}(x^2 + y^2)^{\gamma/2}\,, \qquad (x, y) \in C' \equiv [x^2 + y^2 \leq r^2]\,. \tag{2}$$

Avendosi dalla (2)

$$z'_x = \frac{h\gamma}{r^\gamma} x(x^2 + y^2)^{(\gamma/2)-1}\,, \qquad z'_y = \frac{h\gamma}{r^\gamma} y(x^2 + y^2)^{(\gamma/2)-1}\,,$$

riesce

$$\mathcal{J}_\beta = \iint_{C'} \{|z'_x|^\beta + |z'_y|^\beta\} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{h^\beta \gamma^\beta}{r^{\gamma\beta}} \iint_{C'} \{|x|^\beta + |y|^\beta\}(x^2 + y^2)^{\beta[(\gamma/2)-1]} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

---

(3) L. TONELLI, *Sulla quadratura delle superficie*. Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) **3**, 633-638 (1926).

Passando a coordinate polari ρ, θ risulta

$$\mathcal{J}_\beta = \lambda_\beta \frac{h^\beta \gamma^\beta}{r^{\gamma\beta}} \int_0^r \rho^{\beta(\gamma-1)+1} \, d\rho \,, \tag{3}$$

ove si è posto

$$\lambda_\beta = \int_0^{2\pi} \{ |\cos\theta|^\beta + |\operatorname{sen}\theta|^\beta \} \, d\theta \,.$$

Se $\beta(\gamma-1)+1<0$ l'integrale a secondo membro della (3) è generalizzato e per la sua esistenza deve risultare $\beta(\gamma-1)+1>-1$ ossia $\gamma>1-2/\beta$, condizione quest'ultima manifestamente soddisfatta per essere $0<\gamma<1$, $1<\beta\leqslant 2$.

Dalla (3) segue

$$\mathcal{J}_\beta = \lambda_\beta \frac{\gamma^\beta h^\beta r^{2-\beta}}{\beta(\gamma-1)+2} \,,$$

in particolare

$$\mathcal{J}_1 = \lambda_1 \frac{\gamma h r}{\gamma+1} \,.$$

Determiniamo ora la costante c_α di lipschitzianità. Si ha

$$c_\alpha = \operatorname*{extr\,sup}_{\substack{0\leqslant x'\leqslant r \\ 0\leqslant x''\leqslant r \\ x'\neq x''}} \frac{\left| -h\left(\dfrac{x''}{r}\right)^\gamma + h\left(\dfrac{x'}{r}\right)^\gamma \right|}{|x''-x'|^\alpha} \,,$$

e, posto $\dfrac{x'}{r} = x$, $\dfrac{x''}{r} = y$, risulta

$$c_\alpha = \frac{h}{r^\alpha} \operatorname*{extr\,sup}_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1 \\ 0\leqslant y\leqslant 1 \\ x\neq y}} \frac{|x^\gamma - y^\gamma|}{|x-y|^\alpha} \,.$$

Consideriamo ora nel quadrato Q la funzione così definita:

$$\varphi(x, y) = \frac{|x^\gamma - y^\gamma|}{|x-y|^\alpha} \quad \text{per} \quad x\neq y, \qquad \varphi(x, y) = 0 \quad \text{per} \quad x = y \,. \tag{4}$$

Per $\alpha<\gamma$ la (4) è continua in tutto Q; per $\alpha=\gamma$ la (4) è continua in tutto Q, eccetto l'origine. In tutti i casi si ha la continuità per $\alpha\leqslant\gamma$. I punti $(0, 1)$, $(1, 0)$ della frontiera di Q sono punti di massimo assoluto per la (4) ed è $\varphi(0, 1) = \varphi(1, 0) = 1$.

Segue

$$c_\alpha = \frac{h}{r^\alpha}.$$

5. – *Esempio di funzione $f(x, y)$, $(x, y) \in Q \equiv (0, 0; 1, 1)$, ACT, non lip α e dotata di derivate parziali prime integrabili L^β, ove α e β sono dati numeri reali,* $0 < \alpha < 1$, $1 < \beta \leqslant 2$.

Consideriamo ora la funzione $f(x, y)$ definita ponendo

$$(5) \qquad z = f(x, y) = \begin{cases} h_n \left[1 - \left\{ \dfrac{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2}{r_n^2} \right\}^{\gamma/2} \right] & \text{se } (x - x_n)^2 + (y - y_n)^2 \leqslant r_n^2, \\ 0 \quad \text{per ogni altro punto } (x, y) \text{ di } Q, \end{cases}$$

ove i cerchi $C_n \equiv [(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2 \leqslant r_n^2]$ sono cerchi di Q a due a due senza punti interni in comune e γ e un numero reale, $0 < \gamma < 1$.

Supposto ora che

$$\lim_{n \to \infty} h_n = 0, \qquad \lim_{n \to \infty} r_n = 0,$$

le condizioni che devono essere soddisfatte affinchè la (5) goda delle proprietà richieste sono le seguenti:

$$(6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} h_n^\beta r_n^{2-\beta} \quad \text{convergente},$$

$$(7) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} h_n r_n \quad \text{convergente},$$

$$(8) \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{h_n}{r_n^\alpha} = +\infty.$$

Le condizioni (6), (7), (8) assicurano rispettivamente che le derivate parziali prime della (5) sono L^β, che $f(x, y)$ è ACT e che $f(x, y)$ non è lip α.

Le suddette condizioni sono tutte verificate ponendo

$$h_n = \frac{1}{\sqrt{2^{n\alpha}}}, \qquad r_n = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Invero la serie (6) diviene

$$\frac{1}{2^{2-\beta}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{(\alpha\beta/2) - \beta + 2}} \right)^n,$$

e quest'ultima serie riesce convergente per essere $1 < \beta \leqslant 2$.

La serie (7) assume la forma

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{(\alpha/2)+1}} \right)^n,$$

e questa per essere $(\alpha/2) + 1 > 0$ è convergente.

Infine si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h_n}{r_n^\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{\alpha n + \alpha}}{2^{\alpha n/2}} = +\infty .$$

Se ora poniamo $x_n = y_n = \frac{3}{2^{n+1}}$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, i centri dei cerchi C_n sono sul segmento di estremi $(0, 0)$, $(1, 1)$, ed essendo $0 < x_n \pm r_n < 1$, $0 < y_n \pm r_n < 1$ e

$$[(x_n - x_{n+1})^2 + (y_n - y_{n+1})^2]^{1/2} > x_n - x_{n+1} = \frac{3}{2^{n+2}} = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} = r_n + r_{n+1} ,$$

i cerchi C_n, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sono tutti interni a Q ed esterni l'uno all'altro.

6. – *Osservazione* I. Più in generale si può costruire una funzione $f(x, y)$, $(x, y) \in Q \equiv (0, 0; 1, 1)$, che sia ACT, dotata di derivate parziali prima integrabili L^β, non lip α con $\alpha > 0$ piccolo a piacere. Allo scopo, in luogo di $h_n = \frac{1}{\sqrt{2^{n\alpha}}}$ poniamo $h_n = \frac{1}{\sqrt{2^{n\alpha_n}}}$ con $\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, cioè $h_n = \frac{1}{2^{\sqrt{n}/2}}$. Si verifica facilmente che le condizioni (6), (7), (8) sono soddisfatte e pertanto la funzione (5) è ACT in Q, ha derivate parziali prime integrabili L^β e non è lip α con $\alpha > 0$ comunque piccolo.

Osservazione II. Quanto sopra vale anche per α e β reali tali che $0 < \alpha < 1$, $1 \leqslant \beta < 4$, $\alpha > 2\left(1 - \frac{2}{\beta}\right)$.

7. – *Esempio di funzione* $f(x, y)$, $(x, y) \in Q \equiv (0, 0; 1, 1)$, ACT, lip α *e dotata di derivate parziali prime non* L^β, *ove* α *e* β *sono dati numeri reali*, $0 < \alpha < 1$, $\beta > 1$.

Riprendiamo la funzione (5) e vediamo se, scegliendo opportunamente h_n, r_n, $\omega > 0$, è possibile fare in modo che la (5) stessa risulti ACT in $Q' \equiv (0, 0; \omega, \omega)$, abbia derivate parziali prime non integrabili L^β e sia lip α.

Supposto anche ora che $\lim_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty} r_n = 0$, le condizioni [analoghe alle (6), (7), (8)] che debbono essere soddisfatte sono le seguenti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_n^\beta r_n^{2-\beta} \quad \text{divergente} , \tag{9}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_n r_n \quad \text{convergente} , \tag{10}$$

(11) $$\frac{h_1}{r_1^\alpha},\ \frac{h_2}{r_2^\alpha},\ \ldots,\ \frac{h_n}{r_n^\alpha},\ \ldots \quad \text{limitata}.$$

Le condizioni (9), (10), (11) assicurano rispettivamente la non integrabilità L^β delle derivate parziali prime, l'assoluta continuità e la lipschitzianità della funzione.

Le condizioni su esposte sono tutte soddisfatte ponendo

(12) $$h_n = \frac{1}{(n+1)^{\alpha\varkappa}[\log(n+1)]^2}, \qquad r_n = \frac{1}{(n+1)^\varkappa},$$

ove $\varkappa = \dfrac{1}{1+\alpha}$.

Esaminiamo le diverse condizioni.

La serie (9) diviene

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n+1)^{\varkappa(\alpha\beta-\beta+2)}[\log(n+1)]^{2\beta}},$$

e quest'ultima serie diverge per essere $\varkappa(\alpha\beta-\beta+2)<1$.

La serie (10) assume la forma

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n+1)^{\varkappa(\alpha+1)}[\log(n+1)]^2},$$

e poichè $\varkappa(\alpha+1)=1$ quest'ultima serie converge.

Infine si ha

(13) $$\lim_{n\to\infty}\frac{h_n}{r_n^\alpha} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{[\log(n+1)]^2} = 0.$$

È così verificato che le condizioni (9), (10), (11) sono soddisfatte.

Fissiamo come valore di ω il più grande dei due numeri $\dfrac{4(1+\alpha)}{\alpha}$, $\dfrac{2(2-\alpha)}{1-\alpha}$. Posto [4]

$$h_i = E(i^{(1+\alpha)/\alpha}), \qquad (i=1,2,3,\ldots),$$

si trae $h_1=1$, $h_2\geqslant 2$, $h_3\geqslant 3$, ..., $h_{i+1}\geqslant h_i$ e di più essendo

$$h_{i+1}-h_i = E[(1+i)^{(1+\alpha)/\alpha}] - E(i^{(1+\alpha)/\alpha}) \geqslant E(i^{(1+\alpha)/\alpha} + \frac{1+\alpha}{\alpha}\, i^{1/\alpha}) - E(i^{(1+\alpha)/\alpha}),$$

ove $\dfrac{1+\alpha}{\alpha}>1$, $i^{1/\alpha}>1$, risulta $h_{i+1}-h_i\geqslant 1$ e perciò

$$1 = h_1 < h_2 < h_3 < \ldots < h_p < h_{p+1} < \ldots.$$

(4) Essendo $E(i^{(1+\alpha)/\alpha})$ = parte intera di $i^{(1+\alpha)/\alpha}$.

Per ogni intero n esiste un intero p tale che $h_p + 1 \leqslant n \leqslant h_{p+1}$.
Poniamo

$$x_n = 2r_{h_p+1} + 2r_{h_p+2} + \dots + 2r_{n-1} + r_n\,,$$

$$y_n = 2r_1 + 2r_{h_1+1} + \dots + 2r_{h_{p-1}+1} + r_{h_p+1}\,.$$

In tal modo i cerchi C_n di centro (x_n, y_n) e raggio r_n sono a due a due senza punti interni in comune. Proviamo che essi sono tutti interni a Q'.

Infatti, per ogni p,

$$l_p = 2r_{h_p+1} + 2r_{h_p+2} + \dots + 2r_{h_{p+1}} = 2\sum_{j=h_p+1}^{h_{p+1}} r_j =$$

$$= 2\sum_{j=h_p+1}^{h_{p+1}} \frac{1}{(j+1)^\varkappa} < 2\sum_{j=h_p+1}^{h_{p+1}} \frac{1}{j^\varkappa} < 2\int_{h_p+1}^{h_{p+1}+1} \frac{1}{(t-1)^\varkappa}\,dt =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{1-\varkappa}\,(h_{p+1}^{1-\varkappa} - h_p^{1-\varkappa}) = \frac{2}{1-\varkappa}\,(h_{p+1}^{\alpha/(1+\alpha)} - h_p^{\alpha/(1+\alpha)}) <$$

$$< \frac{2}{1-\varkappa}\,[p+1-(p^{(1+\alpha)/\alpha}-1)^{\alpha/(1+\alpha)}]\,.$$

Dalla nota relazione $(A-B)^m \geqslant A^m - B^m$ per tutti i numeri reali $A \geqslant B \geqslant 0$, $0 \leqslant m \leqslant 1$, risulta

$$(p^{(1+\alpha)/\alpha} - 1)^{\alpha/(1+\alpha)} \geqslant p - 1\,,$$

e pertanto

$$l_p < \frac{2}{1-\varkappa}\,(p+1-p+1) = \frac{4}{1-\varkappa} = \frac{4(1+\alpha)}{\alpha} \leqslant \omega$$

per ogni $p = 1, 2, 3, \dots$.

Inoltre

$$L = 2r_1 + 2r_{h_1+1} + 2r_{h_2+1} + \dots = 2r_1 + 2\sum_{p=1}^{\infty} r_{h_p+1} = 2^{1-\varkappa} + 2\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(h_p+2)^\varkappa}\,;$$

e poichè

$$(l_p + 2)^\varkappa = [E(p^{(1+\alpha)/\alpha}) + 2]^\varkappa > (p^{(1+\alpha)/\alpha})^{1/(1+\alpha)} = p^{1/\alpha}\,,$$

si ha

$$L \leqslant 2^{1/(1+\alpha)} + 2\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^{1/\alpha}} < 2\left(1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^{1/\alpha}}\right).$$

Dalla relazione

$$\frac{1}{m-1} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^m} \leqslant 1 + \frac{1}{m-1} \quad (^5)\,,$$

---

(5) Si veda, ad es., É. GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique*, T. I, Paris 1902, (p.379).

valida per ogni $m > 1$, risulta

$$L < 2\left(1 + 1 + \frac{1}{\dfrac{1}{\alpha} - 1}\right) = \frac{2(2-\alpha)}{1-\alpha} \leqslant \omega\,.$$

La funzione (5), con le posizioni fissate (12), è ora definita in Q', è ivi continua perchè $h_n \to 0$, è ACT come risulta dalla convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} h_n r_n$ e ha le derivate parziali prime non L^β in Q'. In forza della (13) esiste un numero $M > 0$ tale che $\dfrac{h_n}{r_n^\alpha} \leqslant M$ per tutti gli n. Dobbiamo dimostrare che è lip α. Allo scopo ragioniamo nel modo seguente: se P', P'' sono entrambi fuori dei cerchi C_n, riesce

$$f(P') - f(P'') = 0\;;$$

se P' è interno ad un cerchio C_n e P'' è esterno a tutti i cerchi C_n, allora per ogni punto $\overline{P}$ della periferia di C_n si ha $f(P) = f(\overline{P})$,

$$|\,f(P') - f(P'')\,| = |\,f(P') - f(\overline{P})\,| \leqslant \frac{h_n}{r_n^\alpha}(P'P'')^\alpha \leqslant M(P'P'')^\alpha\,.$$

Supponiamo infine che i punti P', P'' appartengano rispettivamente ai due cerchi C_n e C_m. Diciamo P_1, P_2 i punti delle periferie di C_n, C_m che appartengono al segmento $P'P''$. Allora $f(P_1) = f(P_2) = 0$ e

$$|\,f(P') - f(P'')\,| \leqslant |\,f(P') - f(P_1)\,| + |\,f(P_1) - f(P_2)\,| + |\,f(P_2) - f(P'')\,| \leqslant$$
$$\leqslant M(P'P_1)^\alpha + M(P_2P'')^\alpha = M[(P'P_1)^\alpha + (P_2P'')^\alpha]\,.$$

Dalla nota relazione $A^\alpha + B^\alpha \leqslant 2(A+B)^\alpha$, con $A \geqslant 0$, $B \geqslant 0$, riesce

$$(P'P_1)^\alpha + (P_2P'')^\alpha \leqslant 2[P'P_1 + P_2P'']^\alpha \leqslant 2(P'P'')^\alpha\,,$$

e pertanto

$$|\,f(P') - f(P'')\,| \leqslant 2M(P'P'')^\alpha\,.$$

Ciò dimostra che $f(x, y)$ è lip α in $Q' \equiv (0, 0;\, \omega, \omega)$.

Possiamo quindi concludere che la funzione $f(\omega x, \omega y)$ soddisfa a tutte le condizioni richieste nel quadrato $Q \equiv (0, 0;\, 1, 1)$.