CARLO BIRINDELLI (*)

Nuova trattazione di problemi al contorno di uno strato, per l'equazione di POISSON in tre variabili. (**)

Parte I.

Introduzione. In questo lavoro si applica il « metodo della trasformata di LAPLACE ad intervallo di integrazione finito » (¹) del PICONE al problema al contorno di uno strato illimitato e relativamente alla equazione di POISSON $\Delta_2 u(x, y, z) = f(x, y, z)$, quando lungo le due facce dello strato sono imposte due combinazioni lineari a coefficienti costanti nelle u, $\frac{\partial u}{\partial z}$. Si mette soprattutto in evidenza come il detto metodo sia atto a stabilire il teorema di esistenza e di unicità sotto condizioni estremamente larghe per quel che ha riferimento coi dati al contorno e cioè in casi non risolti con gli ordinari metodi.

Il lavoro complessivo è diviso in tre parti, sopratutto per ragioni di stampa.

1. – Nello spazio $S_{(3)}$ ordinario sia assegnato lo strato illimitato compreso tra i due piani $z = 0$, $z = a$, $a > 0$, strato che indicheremo col simbolo T. Si pensi assegnata in T una funzione $f(x, y, z)$ continua in $T + \mathrm{F}T$ e hölderiana in ogni dominio limitato di T, e due funzioni $\gamma_0(x, y)$, $\gamma_a(x, y)$ definite, rispettivamente, sulle due parti $z = 0$, $z = a$ di $\mathrm{F}T$ ed ivi continue.

Per armonizzare quanto precede coi procedimenti che dovremo seguire, può essere conveniente presentare il complesso delle ipotesi di cui sopra nel seguente modo.

Sia $P(x, y)$ un punto dello spazio euclideo $S_{(2)}$, a due dimensioni, di ori-

(*) Indirizzo: Via Parenzo, 8; Roma (Italia).

(**) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo. Ricevuto il 7-VI-1950.

(¹) Vedere, a proposito di questo metodo, l'applicazione fattane da D. CALIGO, *Sul problema di Dirichlet per l'iperstrato,* Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) 1, 534-539 (1946).

gine O; $\omega(O)$ la circonferenza unitaria di centro O; Q il punto, di $\omega(O)$, che si trova sulla semiretta OP; ϱ la distanza di P da O; z una variabile reale dell'intervallo $(0, a)$; T lo strato dello spazio (x, y, z) a $2+1$ dimensioni, definito dalle condizioni: P in $S_{(2)}$ e z nell'intervallo $(0, a)$.

Siano inoltre $f(P, z) \equiv f(Q, \varrho, z)$ una funzione continua in $T + \mathrm{F}T$; $\gamma_0(P) \equiv \gamma_0(Q, \varrho)$, $\gamma_a(P) \equiv \gamma_a(Q, \varrho)$ due assegnate funzioni continue sulla frontiera $\mathrm{F}T$ di T; $u(P, z) \equiv u(Q, \varrho, z)$, soluzione dell'equazione di POISSON

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(P, z), \tag{1}$$

continua in $T + \mathrm{F}T$ assieme alla derivata parziale prima rispetto a z e avente, nell'interno di T, continue le due rimanenti derivate prime e le seconde che compaiono nella (1), essendo inoltre prescritte alla u le condizioni (indicando con α_0, β_0, α, β quattro assegnate costanti tali che $\alpha_0^2 + \beta_0^2 = 1$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1$)

$$\left(\alpha_0 u + \beta_0 \frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=0} = \gamma_0(P), \qquad \left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=a} = \gamma_a(P), \tag{2}$$

$$\lim_{\varrho \to \infty} \frac{u(Q, \varrho, z)}{\varphi(Q, \varrho)} = 0, \tag{3}$$

uniformemente al variare di Q su $\omega(O)$ e di z in $(0, a)$.

La funzione $\varphi(P) > 0$ sarà ricercata in maniera da assicurare la validità del teorema di unicità.

Le quattro costanti α_0, β_0, α, β, reali, sono qui supposte tutte diverse da zero. Volendo considerare il caso che interessa la Fisica matematica, dovremo supporre $\alpha_0\beta_0 < 0$, $\alpha\beta > 0$, risultando così $\alpha\beta_0 - \alpha_0\beta \neq 0$, e ci si potrà ridurre sempre al caso in cui $\alpha\beta_0 - \alpha_0\beta > 0$.

In questo lavoro ricercheremo la soluzione u del problema sopra indicato, e seguiremo il noto procedimento, dovuto al PICONE, della *trasformata parziale di* LAPLACE *ad intervallo di integrazione finito*: sarà così risolto tale problema in condizioni estremamente generali.

2. – Al solito, per il fatto di non sapere quale possa essere il comportamento delle $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, lungo $\mathrm{F}T$, conviene lavorare nello strato T_ε compreso tra i due piani $z = \varepsilon$, $z = a - \varepsilon$, con $a - 2\varepsilon > 0$, per poi passare al limite per $\varepsilon \to 0$.

Inizieremo col cercare le funzioni $w = w(z, \varepsilon)$ autosoluzioni dell'equazione

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \lambda w = 0 \tag{4}$$

con le condizioni ai limiti

$$(5)\qquad \left(\alpha_0 w + \beta_0 \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)_{z=\varepsilon} = 0\,, \qquad \left(\alpha w + \beta \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)_{z=a-\varepsilon} = 0\,.$$

Col procedimento svolto in un precedente lavoro (²), mantenendo qui il simbolismo ivi adottato, si trova, dopo aver fatto tendere ε a zero, che il sistema ortonormalizzato delle $w_h(z) = w_h(z, 0)$, con $h = 0, 1, 2, 3, \ldots$, è esprimibile mediante le espressioni che seguono

$$(6)\qquad w_h(z) = \varrho_h[-\beta_0\sqrt{\lambda_h}\cos(\sqrt{\lambda_h}z) + \alpha_0 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_h}z)] =$$

$$= \varrho_h'[\alpha \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_h}(a-z)) + \beta\sqrt{\lambda_h}\cos(\sqrt{\lambda_h}(a-z))]\,, \qquad h = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

ove le costanti λ_h, ϱ_h, ϱ_h' sono quelle indicate a pag. 161 del sopra richiamato mio lavoro. Ricorderemo solamente che questi autovalori λ_h, relativi alle autosoluzioni $w_h(z)$, sono positivi e vanno assumendo valori via via crescenti man mano che il loro numero d'ordine h cresce e la successione $\sqrt{\lambda_h}$ è monotona nel senso della crescenza come l'altra $h\pi/a$ in modo tale che la differenza $\varepsilon_h = \sqrt{\lambda_h} - h\pi/a$ è infinitesima, definitivamente monotona, e positiva, nel senso della decrescenza, e l'ordine suo di infinitesimo è quello di $1/(h\pi)$.

Le ϱ_h, ϱ_h' sono, a loro volta, infinitesime come $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_h}}$, cioè come $\dfrac{a}{h\pi}$; tenendo poi conto delle considerazioni relative a pag. 167 di loc. cit. in (²), risulta limitata la classe dei numeri $\varrho_h\sqrt{\lambda_h}$, $\varrho_h'\sqrt{\lambda_h}$, cosicchè la classe numerica di tutte le $w_h(z)$ risulta limitata quando $0 \leqslant z \leqslant a$ e quando $h = 0, 1, 2, \ldots$.

3. – Ciò premesso, si considerino le « trasformate » della soluzione u:

$$(7_c)\qquad u_{h,l}^{(c)}(\varrho) = \frac{1}{\pi}\int_0^a w_h(z)\,\mathrm{d}z\int_0^{2\pi} u(Q, \varrho, z)\cos(lt)\cdot \mathrm{d}t\,, \qquad \begin{cases} h = 0, 1, 2, \ldots, \\ l = 0, 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

$$(7_s)\qquad u_{h,l}^{(s)}(\varrho) = \frac{1}{\pi}\int_0^a w_h(z)\,\mathrm{d}z\int_0^{2\pi} u(Q, \varrho, z)\operatorname{sen}(lt)\cdot \mathrm{d}t\,, \qquad \begin{cases} h = 0, 1, 2, \ldots, \\ l = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

In riferimento allo strato T_ε, con ε tale che $0 < \varepsilon < a/2$, porremo, corrispondentemente alle precedenti,

$$(7_c')\qquad v_{h,l}^{(c)}(\varrho) = \frac{1}{\pi}\int_\varepsilon^{a-\varepsilon} w_h(z, \varepsilon)\,\mathrm{d}z\int_0^{2\pi} u(Q, \varrho, z)\cos(lt)\cdot \mathrm{d}t\,, \qquad \begin{cases} h = 0, 1, 2, \ldots, \\ l = 0, 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

(²) C. BIRINDELLI, *Nuova trattazione di problemi al contorno di una striscia per l'equazione di* LAPLACE *in due variabili*. Ann. Mat. Pura Appl. (4) **25**, 156-162 (1946).

$$(7'_s)\qquad v^{(s)}_{h,l}(\varrho) = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{a-\varepsilon} w_h(z,\varepsilon)\,\mathrm{d}z \int_0^{2\pi} u(Q,\varrho,z)\,\mathrm{sen}\,(lt)\cdot\mathrm{d}t\,,\qquad \begin{cases} h = 0, 1, 2, \dots, \\ l = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

$$(7''_c)\qquad \Phi^{(c)}_{h,l}(\varrho) = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{a-\varepsilon} w_h(z,\varepsilon)\,\mathrm{d}z \int_0^{2\pi} f(Q,\varrho,z)\cos\,(lt)\cdot\mathrm{d}t\,,\qquad \begin{cases} h = 0, 1, 2, \dots, \\ l = 0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

$$(7''_s)\qquad \Phi^{(s)}_{h,l}(\varrho) = \frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{a-\varepsilon} w_h(z,\varepsilon)\,\mathrm{d}z \int_0^{2\pi} f(Q,\varrho,z)\,\mathrm{sen}\,(lt)\cdot\mathrm{d}t\,,\qquad \begin{cases} h = 0, 1, 2, \dots, \\ l = 1, 2, \dots\,. \end{cases}$$

Per la continuità di $u(P,z)$ in T, si ha

$$(8)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0} v^{(c)}_{h,l}(\varrho) = u^{(c)}_{h,l}(\varrho)\,,\qquad \lim_{\varepsilon\to 0} v^{(s)}_{h,l}(\varrho) = u^{(s)}_{h,l}(\varrho)\,.$$

Dalla (1), che deve valere entro T, si ha, applicando le trasformazioni $(7')$, $(7'')$ $\left(\text{e indicando con } \Delta_2 u \text{ l'espressione } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$,

$$\int_{\varepsilon}^{a-\varepsilon} w_h(z,\varepsilon)\,\mathrm{d}z\,\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\Delta_2 u + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right]\cos\,(lt)\cdot\mathrm{d}t = \Phi^{(c)}_{h,l}(\varrho)\,,$$

$$\int_{\varepsilon}^{a-\varepsilon} w_h(z,\varepsilon)\,\mathrm{d}z\,\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\Delta_2 u + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right]\mathrm{sen}\,(lt)\cdot\mathrm{d}t = \Phi^{(s)}_{h,l}(\varrho)\,.$$

Rammentando che nel piano è $\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial \varrho}$, ove $x = \varrho\cos t$, $y = \varrho\,\mathrm{sen}\,t$, si ha

$$(8'_c)\qquad \frac{\mathrm{d}^2 v^{(c)}_{h,l}(\varrho)}{\mathrm{d}\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\mathrm{d}v^{(c)}_{h,l}(\varrho)}{\mathrm{d}\varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{a-\varepsilon} w_h(z,\varepsilon)\,\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 u(Q,\varrho,z)}{\partial t^2}\cos\,(lt)\cdot\mathrm{d}t\,+$$
$$+\int_{\varepsilon}^{a-\varepsilon} w_h(z,\varepsilon)\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(Q,\varrho,z)\cos\,(lt)\cdot\mathrm{d}t\right\}\right]\mathrm{d}z = \Phi^{(c)}_{h,l}(\varrho)\,,$$

$$(8'_s)\qquad \frac{\mathrm{d}^2 v^{(s)}_{h,l}(\varrho)}{\mathrm{d}\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\mathrm{d}v^{(s)}_{h,l}(\varrho)}{\mathrm{d}\varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{a-\varepsilon} w_h(z,\varepsilon)\,\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 u(Q,\varrho,z)}{\partial t^2}\,\mathrm{sen}\,(lt)\cdot\mathrm{d}t\,+$$
$$+\int_{\varepsilon}^{a-\varepsilon} w_h(z,\varepsilon)\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(Q,\varrho,z)\,\mathrm{sen}\,(lt)\cdot\mathrm{d}t\right\}\right]\mathrm{d}z = \Phi^{(s)}_{h,l}(\varrho)\,.$$

Osservazione. Con due successive integrazioni per parti si ha:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 u(Q,\varrho,z)}{\partial t^2} \cos(lt)\cdot dt = \left[\frac{\partial u(Q,\varrho,z)}{\partial t}\cos(lt)\right]_0^{2\pi} +$$

$$+\, l\int_0^{2\pi} \frac{\partial u(Q,\varrho,z)}{\partial t} \operatorname{sen}(lt)\cdot dt = l\cdot[u(Q,\varrho,z)\operatorname{sen}(lt)]_0^{2\pi} -$$

$$-\, l^2\int_0^{2\pi} u(Q,\varrho,z)\cos(lt)\cdot dt = -\,l^2\int_0^{2\pi} u(Q,\varrho,z)\cos(lt)\cdot dt\,,$$

e analogamente

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 u(Q,\varrho,z)}{\partial t^2}\operatorname{sen}(lt)\cdot dt = -\,l^2\int_0^{2\pi} u(Q,\varrho,z)\operatorname{sen}(lt)\cdot dt\,.$$

Cosippure si ha

$$\int_\varepsilon^{a-\varepsilon} w_h(z,\varepsilon)\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(Q,\varrho,z)\,\frac{\cos(lt)}{\operatorname{sen}(lt)}\,dt\right\}\right]dz =$$

$$= \left[w_h(z,\varepsilon)\,\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(Q,\varrho,z)\,\frac{\cos(lt)}{\operatorname{sen}(lt)}\,dt\right\}\right]_\varepsilon^{a-\varepsilon} - \frac{1}{\pi}\int_\varepsilon^{a-\varepsilon}\frac{dw_h(z,\varepsilon)}{dz}\,dz\int_0^{2\pi}\frac{\partial u(Q,\varrho,z)}{\partial z}\,\frac{\cos(lt)}{\operatorname{sen}(lt)}\,dt =$$

$$= w_h(a-\varepsilon,\varepsilon)\,\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial u(Q,\varrho,z)}{\partial z}\right]_{z=a-\varepsilon}\frac{\cos(lt)}{\operatorname{sen}(lt)}\,dt - w_h(\varepsilon,\varepsilon)\,\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial u(Q,\varrho,z)}{\partial z}\right]_{z=\varepsilon}\frac{\cos(lt)}{\operatorname{sen}(lt)}\,dt -$$

$$-\,\frac{1}{\pi}\,\frac{dw_h(a-\varepsilon,\varepsilon)}{dz}\int_0^{2\pi} u(Q,\varrho,a-\varepsilon)\,\frac{\cos(lt)}{\operatorname{sen}(lt)}\,dt + \frac{1}{\pi}\,\frac{dw_h(\varepsilon,\varepsilon)}{dz}\int_0^{2\pi} u(Q,\varrho,\varepsilon)\,\frac{\cos(lt)}{\operatorname{sen}(lt)}\,dt +$$

$$+\,\frac{1}{\pi}\int_\varepsilon^{a-\varepsilon}\frac{d^2 w_h(z,\varepsilon)}{dz^2}\,dz\int_0^{2\pi} u(Q,\varrho,z)\,\frac{\cos(lt)}{\operatorname{sen}(lt)}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[w_h(a-\varepsilon,\varepsilon)u_z(Q,\varrho,a-\varepsilon) - w_h'(a-\varepsilon,\varepsilon)u(Q,\varrho,a-\varepsilon)]\,\frac{\cos(lt)}{\operatorname{sen}(lt)}\,dt -$$

$$-\,\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[w_h(\varepsilon,\varepsilon)u_z(Q,\varrho,\varepsilon) - w_h'(\varepsilon,\varepsilon)u(Q,\varrho,\varepsilon)]\,\frac{\cos(lt)}{\operatorname{sen}(lt)}\,dt - \lambda_h\,\frac{v_{h,l}^{(c)}(\varrho)}{v_{h,l}^{(s)}(\varrho)}\,,$$

per la (4).

Il limite di questa ultima espressione è, per $\varepsilon \to 0$, tenendo conto delle (2), (6),

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\varrho_h'\beta\sqrt{\lambda_h}\,u_z(Q,\varrho,a)+\varrho_h'\alpha\sqrt{\lambda_h}\,u(Q,\varrho,a)\right]\begin{matrix}\cos(lt)\\ \operatorname{sen}(lt)\end{matrix}\,dt-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[-\varrho_h'\beta_0\sqrt{\lambda_h}\,u_z(Q,\varrho,0)-\varrho_h\alpha_0\sqrt{\lambda_h}\,u(Q,\varrho,0)\right]\begin{matrix}\cos(lt)\\ \operatorname{sen}(lt)\end{matrix}\,dt-\lambda_h\begin{matrix}u_{h,l}^{(c)}(\varrho)\\ u_{h,l}^{(s)}(\varrho)\end{matrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\varrho_h\sqrt{\lambda_h}\int_0^{2\pi}\gamma_0(Q,\varrho)\begin{matrix}\cos(lt)\\ \operatorname{sen}(lt)\end{matrix}\,dt+\frac{1}{\pi}\varrho_h'\sqrt{\lambda_h}\int_0^{2\pi}\gamma_a(Q,\varrho)\begin{matrix}\cos(lt)\\ \operatorname{sen}(lt)\end{matrix}\,dt-\lambda_h\begin{matrix}u_{h,l}^{(c)}(\varrho)\\ u_{h,l}^{(s)}(\varrho)\end{matrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\sqrt{\lambda_h}\int_0^{2\pi}\left[\varrho_h\gamma_0(Q,\varrho)+\varrho_h'\gamma_a(Q,\varrho)\right]\begin{matrix}\cos(lt)\\ \operatorname{sen}(lt)\end{matrix}\,dt-\lambda_h\begin{matrix}u_{h,l}^{(c)}(\varrho)\\ u_{h,l}^{(s)}(\varrho)\end{matrix}.$$

Si noti infine che è, per la continuità di u in T,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_\varepsilon^{a-\varepsilon}w_h(z,\varepsilon)\,dz\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 u(Q,\varrho,z)}{\partial t^2}\begin{matrix}\cos(lt)\\ \operatorname{sen}(lt)\end{matrix}\,dt=$$

$$=-l^2\frac{1}{\pi}\int_0^a w_h(z)\,dz\int_0^{2\pi}u(Q,\varrho,z)\begin{matrix}\cos(lt)\\ \operatorname{sen}(lt)\end{matrix}\,dt=-\frac{l^2}{\pi}\pi\begin{matrix}u_{h,l}^{(c)}(\varrho)\\ u_{h,l}^{(s)}(\varrho)\end{matrix}.$$

Per la supposta continuità di $f(P,z)$ se $0\leqslant z\leqslant a$, si ha inoltre

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Phi_{h,l}^{(c)}(\varrho)=\frac{1}{\pi}\int_0^a w_h(z)\,dz\int_0^{2\pi}f(Q,\varrho,z)\cos(lt)\,dt=\Psi_{h,l}^{(c)}(\varrho),$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Phi_{h,l}^{(s)}(\varrho)=\frac{1}{\pi}\int_0^a w_h(z)\,dz\int_0^{2\pi}f(Q,\varrho,z)\operatorname{sen}(lt)\,dt=\Psi_{h,l}^{(s)}(\varrho).$$

Ciò premesso e tornando alle $(8_c')$, $(8_s')$, si hanno, dopo avere fatto tendere ε a zero, le due seguenti equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine nelle $u_{h,l}^{(c)}(\varrho)$, $u_{h,l}^{(s)}(\varrho)$, funzioni incognite nella variabile indipendente ϱ, con $0\leqslant\varrho<\infty$;

$$(8_c'')\quad \frac{d^2u_{h,l}^{(c)}(\varrho)}{d\varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{du_{h,l}^{(c)}(\varrho)}{d\varrho}-\left(\frac{l^2}{\varrho^2}+\lambda_h\right)u_{h,l}^{(c)}(\varrho)=$$

$$=\frac{-\sqrt{\lambda_h}}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\varrho_h\gamma_0(Q,\varrho)+\varrho_h'\gamma_a(Q,\varrho)\right]\cos(lt)\,dt+\Psi_{h,l}^{(c)}(\varrho);$$

$$(8''_s) \quad \frac{d^2 u^{(s)}_{h,l}(\varrho)}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{d u^{(s)}_{h,l}(\varrho)}{d\varrho} - \left(\frac{l^2}{\varrho^2} + \lambda_h\right) u^{(s)}_{h,l}(\varrho) =$$

$$= \frac{-\sqrt{\lambda_h}}{\pi}\int_0^{2\pi} [\varrho_h \gamma_0(Q, \varrho) + \varrho'_h \gamma_a(Q, \varrho)] \operatorname{sen}(lt)\, dt + \Psi^{(s)}_{h,l}(\varrho) \ .$$

Col cambiamento della variabile indipendente e della funzione incognita $\sigma = \varrho\sqrt{\lambda_h}$, $\nu^{(c)}_{h,l}(\sigma) = u^{(c)}_{h,l}(\varrho)$, nella $(8''_c)$; e col cambiamento $\sigma = \varrho\sqrt{\lambda_h}$, $\nu^{(s)}_{h,l}(\sigma) = u^{(s)}_{h,l}(\varrho)$, nella $(8''_s)$; le $(8''_c)$, $(8''_s)$ si possono scrivere nelle due forme seguenti:

$$(8'''_c) \quad \sigma^2 \frac{d^2 \nu^{(c)}_{h,l}(\sigma)}{d\sigma^2} + \sigma \frac{d\nu^{(c)}_{h,l}(\sigma)}{d\sigma} - (l^2 + \sigma^2)\nu^{(c)}_{h,l}(\sigma) =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\lambda_h}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left\{ -\sqrt{\lambda_h}\left[\varrho_h \gamma_0\left(Q, \frac{\sigma}{\sqrt{\lambda_h}}\right) + \varrho'_h \gamma_a\left(Q, \frac{\sigma}{\sqrt{\lambda_h}}\right)\right] + \int_0^a f\left(Q, \frac{\sigma}{\sqrt{\lambda_h}}, s\right) w_h(s)\, ds \right\} \cos(lt)\, dt \ ;$$

$$(8'''_s) \quad \sigma^2 \frac{d^2 \nu^{(s)}_{h,l}(\sigma)}{d\sigma^2} + \sigma \frac{d\nu^{(s)}_{h,l}(\sigma)}{d\sigma} - (l^2 + \sigma^2)\nu^{(s)}_{h,l}(\sigma) =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\lambda_h}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left\{ -\sqrt{\lambda_h}\left[\varrho_h \gamma_0\left(Q, \frac{\sigma}{\sqrt{\lambda_h}}\right) + \varrho'_h \gamma_a\left(Q, \frac{\sigma}{\sqrt{\lambda_h}}\right)\right] + \int_0^a f\left(Q, \frac{\sigma}{\sqrt{\lambda_h}}, s\right) w_h(s)\, ds \right\} \operatorname{sen}(lt)\, dt.$$

Per queste due equazioni del tipo di BESSEL, essendo l intero, una coppia di integrali indipendenti, per la equazione omogenea associata, è data dalle due funzioni di BESSEL (di prima e di seconda specie, rispettivamente)

$$I_l(\sigma) = \sum_n^{0,\infty} \frac{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^{l+2n}}{n!\,(l+n)!} \ , \qquad K_l(\sigma) = \int_\sigma^\infty \frac{I_l(\sigma)}{\mu I_l^2(\mu)}\, d\mu \, .$$

Si verifica subito che il loro wronskiano è $\frac{-1}{\sigma}$; infatti l'espressione del wronskiano è

$$I_l(\sigma)K'_l(\sigma) - K_l(\sigma)I'_l(\sigma) = I_l(\sigma)\left[K'_l(\sigma) - I'_l(\sigma)\int_\sigma^\infty \frac{1}{\mu I_l^2(\mu)}\, d\mu\right] =$$

$$= I_l(\sigma)\left[I'_l(\sigma)\int_\sigma^\infty \frac{1}{\mu I_l^2(\mu)}\, d\mu - \frac{I_l(\sigma)}{\sigma I_l^2(\sigma)} - I'_l(\sigma)\int_\sigma^\infty \frac{1}{\mu I_l^2(\mu)}\, d\mu\right] = -\frac{1}{\sigma} \, .$$

Si ha dunque che

$$\frac{1}{I_l(\sigma)K'_l(\sigma) - K_l(\sigma)I'_l(\sigma)} = -\sigma \, ,$$

e, di conseguenza, gli integrali generali delle $(8_c''')$, $(8_s''')$, sono dati, rispettivamente, dalle seguenti espressioni:

$$(9_c)\qquad v_{h,l}^{(c)}(\sigma) = A_{h,l}^{(c)} I_l(\sigma) + B_{h,l}^{(c)} K_l(\sigma) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_h \pi}\int_{\underline{\sigma}}^{\sigma} \xi \cdot [I_l(\sigma)K_l(\xi) - K_l(\sigma)I_l(\xi)]\left[\int_0^{2\pi}\left\{ -\sqrt{\lambda_h}\left[\varrho_h\gamma_0\left(Q, \frac{\xi}{\sqrt{\lambda_h}}\right) + \varrho_h'\gamma_a\left(Q, \frac{\xi}{\sqrt{\lambda_h}}\right)\right] + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_0^a f\left(Q, \frac{\xi}{\sqrt{\lambda_h}}, s\right) w_h(s)\,\mathrm{d}s \right\} \cos(lt)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\xi\ ,$$

$$(9_s)\qquad v_{h,l}^{(s)}(\sigma) = A_{h,l}^{(s)} I_l(\sigma) + B_{h,l}^{(s)} K_l(\sigma) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_h \pi}\int_{\underline{\sigma}}^{\sigma} \xi \cdot [I_l(\sigma)K_l(\xi) - K_l(\sigma)I_l(\xi)]\left[\int_0^{2\pi}\left\{ -\sqrt{\lambda_h}\left[\varrho_h\gamma_0\left(Q, \frac{\xi}{\sqrt{\lambda_h}}\right) + \varrho_h'\gamma_a\left(Q, \frac{\xi}{\sqrt{\lambda_h}}\right)\right] + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_0^a f\left(Q, \frac{\xi}{\sqrt{\lambda_h}}, s\right) w_h(s)\,\mathrm{d}s \right\} \mathrm{sen}\,(lt)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\xi,$$

ove è inteso che le $A_{h,l}^{(c)}$, $B_{h,l}^{(c)}$, $A_{h,l}^{(s)}$, $B_{h,l}^{(s)}$ rappresentano, per ora, costanti reali arbitrarie.

4. – Da quanto precede si conclude che alle trasformate (7_c), (7_s) della soluzione della (1) si possono dare le seguenti espressioni:

$$(9_c')\qquad u_{h,l}^{(c)}(\varrho) = A_{h,l}^{(c)} I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) + B_{h,l}^{(c)} K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{\underline{\varrho}}^{\varrho} \xi \cdot [I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})K_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) - K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})]\left[\int_0^{2\pi}\left\{ -\sqrt{\lambda_h}\,[\varrho_h\gamma_0(Q, \xi) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \varrho_h'\gamma_a(Q, \xi)] + \int_0^a f(Q, \xi, s) w_h(s)\,\mathrm{d}s \right\} \cos(lt)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\xi\ ;$$

$$(9_s')\qquad u_{h,l}^{(s)}(\varrho) = A_{h,l}^{(s)} I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) + B_{h,l}^{(s)} K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{\underline{\varrho}}^{\varrho} \xi \cdot [I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})K_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) - K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})]\left[\int_0^{2\pi}\left\{ -\sqrt{\lambda_h}\,[\varrho_h\gamma_0(Q,\xi) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \varrho_h'\gamma_a(Q, \xi)] + \int_0^a f(Q, \xi, s) w_h(s)\,\mathrm{d}s \right\} \mathrm{sen}\,(lt)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\xi\ .$$

Osservazione. Rammentiamo che $I_l(x)$ è trascendente intera infinitesima d'ordine l per $x \to 0$ e, per x positivo, è sempre positiva e crescente, con derivate tutte positive, e, con essa, crescenti all'infinito, d'ordine comunque elevato, per $x \to \infty$. $K_l(x)$, a sua volta, è infinitamente grande per $x \to 0$, e precisamente d'ordine l, per $l \geqslant 1$, e logaritmicamente per $l = 0$. $K_l(x)$, ch'è sempre positiva, riesce, per $x \to \infty$, infinitesima d'ordine comunque elevato, $K_l(x)$ ha inoltre derivata negativa per $x > 0$.

Aggiungiamo le relazioni asintotiche

$$I_l(x) \sim e^x (2\pi x)^{-\frac{1}{2}} \left[1 + 0\left(\frac{1}{x}\right)\right]; \quad K_l(x) \sim e^{-x}\sqrt{\pi}(2x)^{-\frac{1}{2}} \left[1 + 0\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

5. – Se u verifica la (1) col secondo membro eguale a zero e se le condizioni al contorno (2) hanno esse pure i secondi membri eguali a zero, le espressioni $(9'_c)$, $(9'_s)$ delle trasformate si riducono alle seguenti:

$$u_{h,l}^{(c)}(\varrho) = A_{h,l}^{(c)} I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) + B_{h,l}^{(c)} K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}),$$

$$u_{h,l}^{(s)}(\varrho) = A_{h,l}^{(s)} I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) + B_{h,l}^{(s)} K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}).$$

Queste si mantengono finite per $\varrho \to 0$ solo se $B_{h,l}^{(c)} = B_{h,l}^{(s)} = 0$.

In riferimento alla condizione (3), se si prende $\varphi(Q, \varrho) = e^{\varrho\sqrt{\lambda_0}}\varrho^{-1}$, essendo $I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) \sim e^{\varrho\sqrt{\lambda_0}}(2\pi\varrho\sqrt{\lambda_h})^{-\frac{1}{2}}\left[1 + 0\left(\frac{1}{\varrho\sqrt{\lambda_h}}\right)\right]$, se imponiamo la condizione (3), allora, ricordando le (7_c), (7_s), deve essere $\lim\limits_{\varrho\to\infty} u_{h,l}^{(c)}(\varrho)\varrho e^{-\varrho\sqrt{\lambda_0}} = \lim\limits_{\varrho\to\infty} u_{h,l}^{(s)}(\varrho)\varrho e^{-\varrho\sqrt{\lambda_0}} = 0$ uniformemente per Q in $\omega(O)$, deve cioè essere per ogni $h \geqslant 0$:

$$A_{h,l}^{(c)} \lim_{\varrho\to\infty} \{ I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})e^{-\varrho\sqrt{\lambda_0}}\varrho \} = A_{h,l}^{(s)} \lim_{\varrho\to\infty} \{ I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})e^{-\varrho\sqrt{\lambda_0}}\varrho \} =$$

$$= A_{h,l}^{(c)} \lim_{\varrho\to\infty} \{ e^{\varrho(\sqrt{\lambda_h}-\sqrt{\lambda_0})}\varrho(2\pi\varrho\sqrt{\lambda_h})^{-\frac{1}{2}} \} = A_{h,l}^{(s)} \lim_{\varrho\to\infty} \{ e^{\varrho(\sqrt{\lambda_h}-\sqrt{\lambda_0})}\varrho(2\pi\varrho\sqrt{\lambda_h})^{-\frac{1}{2}} \} = 0,$$

uniformemente al variare di Q in $\omega(O)$; questa condizione è evidentemente soddisfatta per $h \geqslant 0$ solo se $A_{h,l}^{(c)} = A_{h,l}^{(s)} = 0$. Ciò permette di concludere $u_{h,l}^{(c)}(\varrho) \equiv u_{h,l}^{(s)}(\varrho) \equiv 0$ per ogni h e ogni l. La soluzione di (1) è dunque unica se nella (3) la $\varphi(Q, \varrho) = e^{\sqrt{\lambda_0}\varrho}\varrho^{-1}$. Vale dunque il seguente

Teorema di unicità. *Se per la funzione u è*

$$\lim_{\varrho\to\infty} \frac{u(Q, \varrho, z)}{e^{\varrho\sqrt{\lambda_0}}\varrho^{-1}} = 0 \tag{10}$$

uniformemente per Q in $\omega(O)$ e z tale che $0 \leqslant z \leqslant a$, allora la soluzione del problema proposto, se esiste, è certamente unica.

6. – Ciò premesso, determiniamo le $A^{(c)}_{h,l}$, $B^{(c)}_{h,l}$, $A^{(s)}_{h,l}$, $B^{(s)}_{h,l}$ in maniera tale da soddisfare la condizione (10) d'unicità della soluzione u del nostro problema al contorno.

Poniamo anzitutto

$$J^{(c)}_{h,l,1}(\bar{\varrho}, \varrho) = \frac{1}{\pi}\int_{\bar{\varrho}}^{\varrho} K_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\xi \cdot \left[\int_0^{2\pi}\left\{-\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q, \xi) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \varrho'_h\gamma_a(Q, \xi)] + \int_0^a f(Q, \xi, s)w_h(s)\,\mathrm{d}s\right\}\cos(lt)\cdot \mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\xi\,,$$

$$J^{(c)}_{h,l,2}(\bar{\varrho}, \varrho) = \frac{1}{\pi}\int_{\bar{\varrho}}^{\varrho} I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\xi \cdot \left[\int_0^{2\pi}\left\{-\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q, \xi) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \varrho'_h\gamma_a(Q, \xi)] + \int_0^a f(Q, \xi, s)w_h(s)\,\mathrm{d}s\right\}\cos(lt)\cdot \mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\xi\,,$$

e $J^{(s)}_{h,l,1}(\bar{\varrho}, \varrho)$, $J^{(s)}_{h,l,2}(\bar{\varrho}, \varrho)$ siano, rispettivamente, le espressioni ricavate da queste con la sola sostituzione di sen (lt) al posto di cos (lt). Le $(9'_c)$, $(9'_s)$ diventano

$$(10'_c)\qquad u^{(c)}_{h,l}(\varrho) = I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})[A^{(c)}_{h,l} + J^{(c)}_{h,l,1}(\bar{\varrho}, \varrho)] + K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})[B^{(c)}_{h,l} - J^{(c)}_{h,l,2}(\bar{\varrho}, \varrho)]\,,$$

$$(10'_c)\qquad u^{(s)}_{h,l}(\varrho) = I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})[A^{(s)}_{h,l} + J^{(s)}_{h,l,1}(\bar{\varrho}, \varrho)] + K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})[B^{(s)}_{h,l} - J^{(s)}_{h,l,2}(\bar{\varrho}, \varrho)]\,.$$

Fatto ciò poniamo la condizione che $\gamma_0(Q, \varrho)$, $\gamma_a(Q, \varrho)$, $f(Q, \varrho, z)$ siano assegnati in modo tale che esistano tre costanti positive N, M, β (con $\beta < \sqrt{\lambda_0}$) tali da essere

$$(11)\qquad |\gamma_0(Q, \varrho)| < Me^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\varrho}, \quad |\gamma_a(Q, \varrho)| < Me^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\varrho}, \quad |f(Q, \varrho, z)| < Ne^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\varrho}$$

Mostriamo che sotto queste condizioni (11) è possibile determinare le costanti $A^{(c)}_{h,l}$, $B^{(c)}_{h,l}$, $A^{(s)}_{h,l}$, $B^{(s)}_{h,l}$ in modo tale che le $(10'_c)$, $(10'_s)$ si mantengano finite per $\varrho \to 0$ e che la soluzione $u(Q, \varrho, z)$ verifichi la condizione:

$$(11_a)\qquad \lim_{\varrho\to\infty}\frac{u(Q, \varrho, z)}{e^{(\sqrt{\lambda_0}-\gamma)\varrho}} = 0 \qquad \text{per}\quad 0 < \gamma < \beta < \sqrt{\lambda_0}\,,$$

uniformemente al variare di Q in $\omega(O)$ e di z in $(0, a)$, e quindi le condizione (10) di unicità indietro stabilita.

Si cominci con l'osservare che al n. 2 si è già detto essere le quantità $\varrho_h\sqrt{\lambda_h}$, $\varrho'_h\sqrt{\lambda_h}$, $w_h(s)$ totalmente limitate per il complesso di tutti i valori $h = 0, 1, 2, \ldots$ ed s con $0 \leqslant s \leqslant a$. Ne segue che si può assegnare una costante positiva L tale da risultare

$$(11_b)\qquad \left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{-\sqrt{\lambda_h}\,[\varrho_h\gamma_0(Q,\xi)+\varrho'_h\gamma_a(Q,\xi)]+\int_0^a f(Q,\xi,s)w_h(s)\,ds\right\}\begin{matrix}\cos(lt)\\ \mathrm{sen}\,(lt)\end{matrix}\,dt\right|<$$

$$<\frac{1}{\pi}2\pi[L\{2M+Na\}\,e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\xi}]=2L\{2M+Na\}\,e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\xi}.$$

Tenendo conto di questa e ricordando il contenuto della Osservazione del n. 4 si ha, poichè $K_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\sim e^{-\xi\sqrt{\lambda_h}}\sqrt{\pi}\cdot(2\xi\sqrt{\lambda_h})^{-1/2}\left[1+0\left(\frac{1}{\xi\sqrt{\lambda_h}}\right)\right]$, che per $\begin{matrix}h=0,1,2,\ldots,\\ l=0,1,2,\ldots\end{matrix}$ gli integrali $J^{(c)}_{h,l,1}(\overline{\varrho},\varrho)$, $J^{(s)}_{h,l,1}(\overline{\varrho},\varrho)$ risultano entrambi convergenti quando $\varrho\to\infty$.

Cosippure, per essere $I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})$ infinitesima d'ordine l per $\varrho\to 0$ [per $l=0$ è invece $\lim\limits_{\varrho\to 0} I_0(\varrho\sqrt{\lambda_h})=1$], gli integrali $J^{(c)}_{h,l,2}(\overline{\varrho},\varrho)$, $J^{(s)}_{h,l,2}(\overline{\varrho},\varrho)$ risultano convergenti per $\varrho\to 0$, quando $\begin{matrix}h=0,1,2,\ldots,\\ l=0,1,2,\ldots\end{matrix}$. Per essere poi $\varrho K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})$ infinitamente grande per $\varrho\to 0$ e precisamente d'ordine $l-1$, se $l\geqslant 1$, (e invece logaritmicamente la $K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})$ per $l=0$), e $I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})$ infinitesima d'ordine l [per $l=0$ è invece, come si è detto, $\lim\limits_{\varrho\to 0} I_0(\varrho\sqrt{\lambda_h})=1$], si ha, procedendo col teorema di L'Hospital, se $l\geqslant 1$,

$$\lim_{\varrho\to 0}\left\{I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})\int_{\overline{\varrho}}^{\varrho}K_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\xi e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\xi}\,d\xi\right\}=\lim_{\varrho\to 0}\frac{\displaystyle\int_{\overline{\varrho}}^{\varrho}K_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\xi e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\xi}\,d\xi}{\dfrac{1}{I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})}}=$$

$$=\lim_{\varrho\to 0}\frac{K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})\varrho e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\varrho}}{\dfrac{-I'_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})}{[I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})]^2}\sqrt{\lambda_h}}=-\frac{1}{\sqrt{\lambda_h}}\lim_{\varrho\to 0}\left[I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})\varrho\cdot e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\varrho}\frac{I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})}{I'_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})}\right]$$

e questo limite è zero.

Risulta dunque, per $l\geqslant 1$ (e per $h=0,1,2,\ldots$),

$$(11')\qquad \lim_{\varrho\to 0}\{I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})J^{(c)}_{h,l,1}(\overline{\varrho},\varrho)\}=\lim_{\varrho\to 0}\{I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})J^{(s)}_{h,l,1}(\overline{\varrho},\varrho)\}=0\,.$$

Per $l=0$ si può invece dire che hanno significato $J^{(c)}_{h,0,1}(\overline{\varrho},0)$, $J^{(s)}_{h,0,1}(\overline{\varrho},0)$ come valori finiti di $\lim\limits_{\varrho\to 0}J^{(c)}_{h,0,1}(\overline{\varrho},\varrho)$, $\lim\limits_{\varrho\to 0}J^{(s)}_{h,0,1}(\overline{\varrho},\varrho)$. Sempre tenendo presente la Osservazione del n. 4, si ha poi (se $\varrho > \overline{\varrho}$), per $\varrho \to \infty$,

$$e^{-(\sqrt{\lambda_0}-\gamma)\varrho} K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) \,|\, J^{(c)}_{h,l,2}(\overline{\varrho}, \varrho) \,| < e^{-(\sqrt{\lambda_0}-\gamma)\varrho} K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) 2L \{ 2M + Na \} \cdot$$
$$\cdot \int_{\overline{\varrho}}^{\varrho} I_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) \xi e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\xi} \, d\xi < 2L \{ 2M + Na \} K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) \varrho^2 \cdot$$
$$\cdot e^{-(\sqrt{\lambda_0}-\gamma)\varrho + (\sqrt{\lambda_0}-\beta)\varrho} \sim 2L \{ 2M + Na \} e^{-\varrho\sqrt{\lambda_h}} \sqrt{\pi} (2\pi\varrho\sqrt{\lambda_h})^{-1/2} \cdot$$
$$\cdot e^{\varrho\sqrt{\lambda_h}} (2\pi\varrho\sqrt{\lambda_h})^{-1/2} \varrho^2 e^{(\gamma-\beta)\varrho} = 2L \{ 2M + Na \} \frac{\varrho}{2\sqrt{\lambda_h}} e^{(\gamma-\beta)\varrho} =$$
$$= \frac{L}{\sqrt{\lambda_h}} \{ 2M + Na \} e^{(\gamma-\beta)\varrho} \varrho \,,$$

e l'ultima espressione è infinitesima quando $\varrho \to \infty$ (per essere $\gamma < \beta$).

Si ha di conseguenza che valgono le due seguenti relazioni (la seconda si giustifica con lo stesso calcolo con cui si è sopra giustificata la prima):

$$(11'') \qquad \begin{cases} \lim\limits_{\varrho\to\infty} \{ K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) J^{(c)}_{h,l,2}(\overline{\varrho}, \varrho) e^{-(\sqrt{\lambda_0}-\gamma)\varrho} \} = 0 \,, \\ \lim\limits_{\varrho\to\infty} \{ K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) J^{(s)}_{h,l,2}(\overline{\varrho}, \varrho) e^{-(\sqrt{\lambda_0}-\gamma)\varrho} \} = 0 \,. \end{cases}$$

Ciò premesso, se si vuole che per $\varrho \to 0$ le $u^{(c)}_{h,l}(\varrho)$, $u^{(s)}_{h,l}(\varrho)$ si mantengano finite, nel senso che esista finito il limite, siccome si è visto che gli integrali $J^{(c)}_{h,l,2}(\overline{\varrho}, \varrho)$, $J^{(s)}_{h,l,2}(\overline{\varrho}, \varrho)$, sono convergenti per $\varrho \to 0$ e che valgono le (11′) e che tutto il primo addendo del 2° membro della (10′$_c$), (10′$_s$) convergono a zero per $\varrho \to 0$ e che $K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})$ è infinitamente grande per $\varrho \to 0$, necessita scegliere $B^{(c)}_{h,l}$ e $B^{(s)}_{h,l}$ in maniera tale che

$$B^{(c)}_{h,l} - J^{(c)}_{h,l,2}(\overline{\varrho}, \varrho) \,, \qquad B^{(s)}_{h,l} - J^{(s)}_{h,l,2}(\overline{\varrho}, \varrho)$$

risultino infinitesime per $\varrho \to 0$. Poichè per $\varrho \to 0$ gli integrali $J^{(c)}_{h,l,2}(\overline{\varrho}, \varrho)$ $J^{(s)}_{h,l,2}(\overline{\varrho}, \varrho)$ sono, come si è detto, convergenti, necessita dunque porre:

$$(12) \qquad B^{(c)}_{h,l} = J^{(c)}_{h,l,2}(\overline{\varrho}, 0) \,, \qquad B^{(s)}_{h,l} = J^{(s)}_{h,l,2}(\overline{\varrho}, 0) \,.$$

Fatto ciò, risulta, ad esempio, applicando il teorema di L'HOSPITAL,

$$\lim_{\varrho\to 0} \{ K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) [J^{(c)}_{h,l,2}(\overline{\varrho}, 0) - J^{(c)}_{h,l,2}(\overline{\varrho}, \varrho)] \} = \lim_{\varrho\to 0} \frac{J^{(c)}_{h,l,2}(\overline{\varrho}, 0) - J^{(c)}_{h,l,2}(\overline{\varrho}, \varrho)}{\dfrac{1}{K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})}} =$$
$$= \lim_{\varrho\to 0} \left\{ \frac{-K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})}{\sqrt{\lambda_h} K'_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})} K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) \varrho \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ -\sqrt{\lambda_h} [\varrho_h \gamma_0(Q, \varrho) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \varrho'_h \gamma_a(Q, \varrho)] + \int_0^a f(Q, \varrho, s) w_h(s) \, ds \right\} \cos l(t) \cdot dt \,,$$

limite certamente finito, e altrettanto avviene per

$$\lim_{\varrho\to 0}\{K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})[J^{(s)}_{h,l,2}(\bar{\varrho},0)-J^{(s)}_{h,l,2}(\bar{\varrho},\varrho)]\}$$

come si vede per la stessa via; tutto ciò per $l=0,1,2,\ldots$. Se si vuole infine che le $u^{(c)}_{h,l}(\varrho)e^{-(\sqrt{\lambda_0}-\gamma)\varrho}$, $u^{(s)}_{h,l}(\varrho)e^{-(\sqrt{\lambda_0}-\gamma)\varrho}$ convergano a zero per $\varrho\to\infty$, siccome si è visto che gli integrali $J^{(c)}_{h,l,1}(\bar{\varrho},\varrho)$, $J^{(s)}_{h,l,1}(\bar{\varrho},\varrho)$ sono convergenti per $\varrho\to\infty$ e che valgono le (11″), cioè che i prodotti di $e^{-(\sqrt{\lambda_0}-\gamma)\varrho}$ per ciascuno dei secondi addendi dei secondi membri delle $(10'_c)$, $(10'_s)$ convergano a zero per $\varrho\to\infty$ [tenendo presente che $I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})e^{-(\sqrt{\lambda_0}-\gamma)\varrho}$ è infinitamente grande per $\varrho\to\infty$: infatti si ha

$$\text{(12 bis)}\qquad I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})e^{-(\sqrt{\lambda_0}-\gamma)\varrho}\sim e^{\varrho\sqrt{\lambda_h}}(2\pi\varrho\sqrt{\lambda_h})^{-1/2}e^{-(\sqrt{\lambda_0}-\gamma)\varrho}=e^{(\sqrt{\lambda_h}-\sqrt{\lambda_0}+\gamma)\varrho}(2\pi\varrho\sqrt{\lambda_h})^{-1/2},$$

ove questa ultima espressione diverge quando $\varrho\to\infty$ e ciò per ogni $h=0,1,2,\ldots$] necessita porre

$$\text{(12')}\qquad A^{(c)}_{h,l}=-J^{(c)}_{h,l,1}(\bar{\varrho},\infty)\,,\qquad A^{(s)}_{h,l}=-J^{(s)}_{h,l,1}(\bar{\varrho},\infty)\,,$$

se si vuole che esista il limite (nullo) delle espressioni

$$[A^{(c)}_{h,l}+J^{(c)}_{h,l,1}(\bar{\varrho},\varrho)]I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})e^{-(\sqrt{\lambda_0}-\gamma)\varrho},\qquad [A^{(s)}_{h,l}+J^{(s)}_{h,l,1}(\bar{\varrho},\varrho)]I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})e^{-(\sqrt{\lambda_0}-\gamma)\varrho}\,,$$

per $\varrho\to\infty$, nelle quali il prodotto del secondo e del terzo fattore è infinitamente grande per $\varrho\to\infty$. Deve appunto necessariamente rendersi infinitesimo il primo fattore, e affinchè ciò sia devonsi scegliere le costanti $A^{(c)}_{h,l}$, $A^{(s)}_{h,l}$ nel modo indicato nelle (12′).

Resta naturalmente da vedere ancora se le due ultime espressioni, prodotti di tre fattori, siano allora effettivamente infinitesime per $\varrho\to\infty$.

Procedendo infatti col teorema di L'Hospital si ha [ad es. per la prima di quelle due espressioni, tenendo presente la (12 bis)]:

$$\lim_{\varrho\to\infty}[J^{(c)}_{h,l,1}(\bar{\varrho},\varrho)-J^{(c)}_{h,l,1}(\bar{\varrho},\infty)]I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})e^{-(\sqrt{\lambda_0}-\gamma)\varrho}=$$

$$=-\lim_{\varrho\to\infty}\frac{\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_\varrho^\infty K_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\xi\cdot\left[\int_0^{2\pi}\left\{-\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q,\xi)+\varrho'_h\gamma_a(Q,\xi)]+\int_0^a f(Q,\xi,s)w_h(s)\,ds\right\}\cos(lt)\,dt\right]d\xi}{(2\pi\varrho\sqrt{\lambda_h})^{1/2}\cdot e^{-(\sqrt{\lambda_h}-\sqrt{\lambda_0}+\gamma)\varrho}}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{\varrho\to\infty}\frac{e^{-\varrho\sqrt{\lambda_h}}\sqrt{\pi}(2\varrho\sqrt{\lambda_h})^{-1/2}\varrho\displaystyle\int_0^{2\pi}\left\{-\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q,\varrho)+\varrho'_h\gamma_a(Q,\varrho)]+\int_0^a f(Q,\varrho,s)w_h(s)\,ds\right\}\cos(lt)\,dt}{\left[2\pi\sqrt{\lambda_h}\dfrac{1}{2}(2\pi\varrho\sqrt{\lambda_h})^{-1/2}+(2\pi\varrho\sqrt{\lambda_h})^{1/2}(-\sqrt{\lambda_h}+\sqrt{\lambda_0}+\gamma)\right]e^{-(\sqrt{\lambda_h}-\sqrt{\lambda_0}+\gamma)\varrho}},$$

e siccome il modulo di questa frazione si può maggiorare nel modo seguente, per (11_b),

$$\frac{2L\pi(2M+Na)}{|\pi\lambda_h(1-2\varrho[\sqrt{\lambda_h}-\sqrt{\lambda_0}+\gamma])|}e^{-(\sqrt{\lambda_h}-\sqrt{\lambda_0}+\beta)\varrho+(\sqrt{\lambda_h}-\sqrt{\lambda_0}+\gamma)\varrho}$$

e questa espressione tende a zero quando $\varrho\to\infty$, per essere $\gamma<\beta$, allora è pure infinitesima l'espressione di cui sopra. Sostituendo i valori trovati di (12) e (12') per le costanti $A^{(c)}_{h,l}$, $B^{(c)}_{h,l}$, $A^{(s)}_{h,l}$, $B^{(s)}_{h,l}$, nelle $(10'_c)$, $(10'_s)$, si hanno per le trasformate $u^{(c)}_{h,l}(\varrho)$, $u^{(s)}_{h,l}(\varrho)$, della soluzione u, le seguenti espressioni definitive:

$$(13_c)\quad u^{(c)}_{h,l}(\varrho)=-K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})\frac{1}{\pi}\int_0^\varrho I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\xi\cdot\left[\int_0^{2\pi}\left\{-\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q,\xi)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\varrho'_h\gamma_a(Q,\xi)]+\int_0^a f(Q,\xi,s)w_h(s)\,ds\right\}\cos(lt)\cdot dt\right]d\xi-$$

$$-I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})\frac{1}{\pi}\int_\varrho^\infty K_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\xi\cdot\left[\int_0^{2\pi}\left\{-\sqrt{\lambda_h}\,[\varrho_h\gamma_0(Q,\xi)+\varrho'_h\gamma_a(Q,\xi)]+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_0^a f(Q,\xi,s)w_h(s)\,ds\right\}\cos(lt)\cdot dt\right]d\xi\ ;$$

$$(13_s)\quad u^{(s)}_{h,l}(\varrho)=-K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})\frac{1}{\pi}\int_0^\varrho I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\xi\cdot\left[\int_0^{2\pi}\left\{-\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q,\xi)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\varrho'_h\gamma_a(Q,\xi)]+\int_0^a f(Q,\xi,s)w_h(s)\,ds\right\}\operatorname{sen}(lt)\cdot dt\right]d\xi-$$

$$-I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})\frac{1}{\pi}\int_\varrho^\infty K_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\xi\cdot\left[\int_0^{2\pi}\left\{-\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q,\xi)+\varrho'_h\gamma_a(Q,\xi)]+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_0^a f(Q,\xi,s)w_h(s)\,ds\right\}\operatorname{sen}(lt)\cdot dt\right]d\xi\ ;$$

ove, per le cose dette, i vari integrali sono tutti convergenti e le trasformate $u^{(c)}_{h,l}(\varrho)$, $u^{(s)}_{h,l}(\varrho)$, della soluzione u, soddisfano le relazioni

$$(14)\qquad \lim_{\varrho\to\infty}\{u^{(c)}_{h,l}(\varrho)e^{-(\sqrt{\lambda_0}-\gamma)\varrho}\}=\lim_{\varrho\to\infty}\{u^{(s)}_{h,l}(\varrho)e^{-(\sqrt{\lambda_0}-\gamma)\varrho}\}=0$$

per $0 < \gamma < \beta < \sqrt{\lambda_0}$, e quindi, di conseguenza, le relazioni

$$(15) \qquad \lim_{\varrho \to \infty} \{ u^{(c)}_{h,l}(\varrho) e^{-\sqrt{\lambda_0}\varrho} \} = \lim_{\varrho \to \infty} \{ u^{(s)}_{h,l}(\varrho) e^{-\sqrt{\lambda_0}\varrho} \} = 0$$

corrispondenti alle (10).

7. – Dopo quanto siamo venuti dicendo nei precedenti nn. possiamo concludere che se $Z(H, \varrho, z)$, ove H è il punto di $S_{(2)}$ di modulo 1 e argomento $t = \omega$, è il punto generico dello strato T, alla eventuale soluzione (unica se esiste) $u(H, \varrho, z)$ di (1), che verifica le equazioni al contorno (2) e la (3), compete lo sviluppo, per ora almeno formale,

$$(\mathrm{A}) \quad u(H, \varrho, z) \backsim \sum_h^{0,\infty} w_h(z) \left\{ \frac{1}{2} u^{(c)}_{h,0}(\varrho) + \sum_l^{1,\infty} (u^{(c)}_{h,l}(\varrho) \cos(l\omega) + u^{(s)}_{h,l}(\varrho) \operatorname{sen}(l\omega)) \right\}$$

e di questo sviluppo in serie, se del caso opportunamente trasformato, ricercheremo qui la convergenza puntuale in T, e nella parte II e parte III di questo lavoro stabiliremo l'esistenza delle derivate parziali della somma $u(H, \varrho, z)$, allo scopo di mostrare che tale $u(H, \varrho, z)$ è effettiva soluzione (unica, per quanto si è visto) del nostro problema al contorno.

Osservazione I. Si ricordi che (³) per $l > -1/2$ è

$$I_l(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^l}{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi e^{x\cos\theta} \operatorname{sen}^{2l}\theta \, d\theta .$$

Considerato l'integrale $\int_0^\pi e^{x\cos\theta} \operatorname{sen}^{2l}\theta \, d\theta$, ponendo $\cos\theta = \delta$, si ha $\theta = \arccos\delta$, $d\theta = \frac{-1}{\sqrt{1-\delta^2}} d\delta$, e

$$\int_0^\pi e^{x\cos\theta} \operatorname{sen}^{2l}\theta \, d\theta = \int_{-1}^1 e^{x\delta} (1-\delta^2)^{l-\frac{1}{2}} d\delta .$$

Ne risulta, se x e x' sono due valori arbitrari positivi con $0 < x < x'$, essendo

$$\int_0^\pi e^{x\cos\theta} \operatorname{sen}^{2l}\theta \, d\theta < \int_{-1}^1 e^{x\delta}(1-\delta^2)^{l-1} d\delta , \qquad \int_{-1}^1 e^{x'\delta}(1-\delta^2)^l d\delta < \int_0^\pi e^{x'\cos\theta} \operatorname{sen}^{2l}\theta \, d\theta ,$$

(³) G. N. WATSON, *Theory of* BESSEL *functions*, Vol. II, Cambridge 1922, (cfr. pag. 204, n. 7.25).

che è

$$(0) \qquad 0 < \frac{\int_0^\pi e^{x\cos\theta}\,\mathrm{sen}^{2l}\,\theta\cdot d\theta}{\int_0^\pi e^{x'\cos\theta}\,\mathrm{sen}^{2l}\,\theta\cdot d\theta} < \frac{\int_{-1}^1 e^{x\delta}\,(1-\delta^2)^{l-1}\,d\delta}{\int_{-1}^1 e^{x'\delta}\,(1-\delta^2)^{l}\,d\delta}.$$

Per valutare il comportamento del rapporto ultimo di questa diseguaglianza, per $l \to \infty$, conviene intanto sviluppare gli integrali del tipo $\int_{-1}^1 e^{x'\delta}(1-\delta^2)^l\,d\delta$.

Per cose note si ha

$$\int_c^\infty e^{-tx'}t^k\,dt = e^{-cx'}\left[\frac{c^k}{x'} + \frac{kc^{k-1}}{x'^2} + \frac{k(k-1)c^{k-2}}{x'^3} + \dots + \frac{k!}{x'^{k+1}}\right].$$

Ponendo allora $\delta = -t$ segue

$$\int_0^1 e^{x'\delta}\delta^{2r}\,d\delta = \int_{-1}^\infty e^{-x't}t^{2r}\,dt - \int_0^\infty e^{-x't}t^{2r}\,dt =$$

$$= e^{x'}\left[\frac{(-1)^{2r}}{x'} + \frac{2r(-1)^{2r-1}}{x'^2} + \frac{2r(2r-1)(-1)^{2r-2}}{x'^3} + \dots + \frac{(2r)!}{x'^{2r+1}}\right] - \frac{(2r)!}{x'^{2r+1}},$$

$$\int_{-1}^0 e^{x'\delta}\delta^{2r}\,d\delta = \int_0^1 e^{-x't}t^{2r}\,dt = \frac{(2r)!}{x'^{2r+1}} - e^{-x'}\left[\frac{1}{x'} + \frac{2r}{x'^2} + \frac{2r(2r-1)}{x'^3} + \dots + \frac{(2r!)}{x'^{2r+1}}\right].$$

Ne risulta che è

$$\int_0^1 e^{x'\delta}\delta^{2r}\,d\delta = e^{x'}\frac{(2r)!}{x'^{2r+1}}\left\{\sum_k^{0,2r}\frac{(-x')^k}{k!} - e^{-x'}\right\},$$

$$\int_{-1}^0 e^{x'\delta}\delta^{2r}\,d\delta = e^{-x'}\frac{(2r)!}{x'^{2r+1}}\left\{e^{x'} - \sum_k^{0,2r}\frac{x'^k}{k!}\right\}.$$

Se con r' indichiamo il minimo intero per cui $2r'$ supera x' allora quando $r \geqslant r'$ la successione di numeri positivi $\frac{x'^{2r+s}}{(2r+s)!}$ risulta monotona nel senso della decrescenza e infinitesima quando $s \to \infty$. Ne segue che per ogni r maggiore od eguale al numero r' l'espressione $\left\{\sum_k^{0,2r}\frac{(-x')^k}{k!} - e^{-x'}\right\}$ si mantiene sempre positiva ed ammette come espressione maggiorante $\frac{x'^{2r+1}}{(2r+1)!}$ e per espressione minorante $\frac{x'^{2r+1}}{(2r+1)!}\left[1-\frac{x'}{2r+2}\right]$.

Similmente, essendo x' positivo, risulta che, sempre per ogni r maggiore od eguale al numero r', l'altra espressione sempre positiva $\left\{e^{x'}-\sum_k^{0,2r}\frac{x'^k}{k!}\right\}$ ammette come espressione maggiorante l'altra $2(r+1)x'^{2r+1}\frac{1}{(2r+1)(2r)![2(r+1)-x']}$ e, ad es., come espressione minorante la seguente altra $[2(r+1)+x']\frac{x'^{2r+1}}{[2(r+1)]!}$. Al crescere di r la parte principale di queste espressioni maggioranti e minoranti (che sono infinitesime) è $\frac{x'^{2r+1}}{(2r+1)!}$.

Si noti che d'altra parte è

$$(0')\qquad \int_0^1 e^{x'\delta}(1-\delta^2)^l\,d\delta=\int_0^1 e^{x'\delta}\left[\sum_r^{0,l}\binom{l}{r}(-1)^r\delta^{2r}\right]d\delta=\sum_r^{0,l}\binom{l}{r}(-1)^r\int_0^1 e^{x'\delta}\delta^{2r}\,d\delta=$$

$$=e^{x'}\sum_r^{0,l}(-1)^r\binom{l}{r}\frac{(2r)!}{x'^{2r+1}}\left\{\sum_k^{0,2r}\frac{(-x')^k}{k!}-e^{-x'}\right\}=$$

$$=\frac{e^{x'}l!}{x'^{2l+1}}\cdot\sum_r^{0,l}(-1)^r\frac{(2r)!}{r!\,(l-r)!}x'^{2(l-r)}\left\{\sum_k^{0,2r}\frac{(-x')^k}{k!}-e^{-x'}\right\},$$

e analogamente

$$(0'')\qquad \int_{-1}^0 e^{x'\delta}(1-\delta^2)^l\,d\delta=\frac{e^{-x'}l!}{x'^{2l+1}}\sum_r^{0,l}\frac{(-1)^r(2r)!}{r!\,(l-r)!}x'^{2(l-r)}\left\{e^{x'}-\sum_k^{0,2r}\frac{x'^k}{k!}\right\}.$$

Per $r\to\infty$, $(r>r')$, la parte principale dell'infinitesimo $\left\{\sum_k^{0,2r}\frac{(-x')^k}{k!}-e^{-x'}\right\}$ si è detto essere $\frac{x'^{2r+1}}{(2r+1)!}$ e per $r>r'$ anche il primo di questi due infinitesimi si mantiene sempre positivo. Sostituendo il secondo infinitesimo $\frac{x'^{2r+1}}{(2r+1)!}$ all'altro $\left\{\sum_k^{0,2r}\frac{(-x')^k}{k!}-e^{-x'}\right\}$ nella espressione che in $(0')$ moltiplica $e^{x'}l!/x'^{2l+1}$ si ottiene l'altra $\sum_r^{0,l}\frac{(-1)^r(2r)!}{r!\,(l-r)!}x'^{2(l-r)}\frac{x'^{2r+1}}{(2r+1)!}=x'\sum_r^{0,l}(-1)^r\frac{1}{2r+1}\frac{x'^{2r}}{r!}\frac{x'^{2(l-r)}}{(l-r)!}$ e quest'ultima può interpretarsi come il termine di posto $l+1$, con a fattore comune $(x'^2)^l$, nella serie di potenze, di x'^2, prodotto formale secondo CAUCHY delle due serie $\sum_n^{0,\infty}(-1)^n\int_0^{x'}\frac{t^{2n}}{n!}\,dt$, $\sum_n^{0,\infty}\frac{x'^{2n}}{n!}$ le cui somme sono, rispettivamente, $\int_0^{x'}e^{-t^2}dt\left(=x'e^{-x'^2}\sum_n^{0,\infty}\frac{2^n x'^{2n}}{(2n+1)!!}\right)$, $e^{x'^2}$. Si ha di qui che il termine di posto $l+1$ del prodotto formale delle due serie di potenze in x'^2 è $2^l\frac{x'^{2l+1}}{(2l+1)!!}$, sicchè è $\frac{e^{x'}l!}{x'^{2l+1}}\sum_r^{0,l}(-1)^r\frac{(2r)!}{r!\,(l-r)!}\,x'^{2(l-r)}\frac{x'^{2r+1}}{(2r+1)!}=\frac{e^{x'}l!\,2^l x'^{2l+1}}{x'^{2l+1}(2l+1)!!}=e^{x'}\frac{(2l)!!}{(2l+1)!!}\sim$ $\sim\frac{\sqrt{2\pi l}}{2l+1}\frac{1}{\sqrt{2}}e^{x'}$, per $l\to\infty$ come facilmente si vede a mezzo della nota formula di Wallis $\sqrt{\pi}=\lim_{l\to\infty}\frac{l^{-1/2}(2l)!!}{(2l-1)!!}$. Si ha così che di tale comportamento è, per $l\to\infty$, l'infinitesimo $\int_0^1 e^{x'\delta}(1-\delta^2)^l\,d\delta$. Svolgendo il medesimo ragionamento per l'altro infinitesimo $\int_{-1}^0 e^{x'\delta}(1-\delta^2)^l\,d\delta$, se ne conclude che si può assegnare tale costante positiva M opportunamente grande affinchè i due rapporti della (0) siano maggiorabili mediante espressioni del tipo seguente

$$M\frac{e^x\frac{[2(l-1)]!!}{(2l-1)!!}}{e^{x'}\frac{(2l)!!}{(2l+1)!!}}\sim M\frac{\sqrt{\pi}\frac{\sqrt{l-1}}{2l-1}}{\sqrt{\pi}\frac{\sqrt{l}}{2l+1}}e^{x-x'}=\frac{2l+1}{2l-1}\sqrt{\frac{l-1}{l}}\,Me^{x-x'},$$

vale a dire che per $l\geqslant 1$ il primo dei rapporti della (0) sia, quando $0<x<x'$, maggiorabile mediante espressione del tipo $Me^{x-x'}$.

Osservazione II. Se $g(t)$ è funzione continua in qualsiasi intervallo e periodica con periodo 2π:

Qualora esista la derivata $g'(x)$ a variazione limitata in $(0, 2\pi)$, allora, detta $\overline{V}$ la variazione totale della $g'(x)$ in $(0, 2\pi)$, si ha, integrando per parti e tenendo conto che $g(0)=g(2\pi)$, pei coefficienti di Fourier della $g(x)$, $a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}g(x)\cos nx\cdot dx=\frac{-1}{n\pi}\int_0^{2\pi}g'(x)\,\mathrm{sen}\,nx\cdot dx$, $b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}g(x)\,\mathrm{sen}\,nx\cdot dx=$ $=\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}g'(x)\cos nx\cdot dx$, sicchè chiamando con $\overline{M}$ l'estremo superiore del modulo di $g'(x)$ in $(0, 2\pi)$ risulta allora

$$\left.\begin{matrix}|a_n|\\ |b_n|\end{matrix}\right\} < \frac{4\cdot(\overline{V}+\overline{M})}{\pi n^2}, \qquad \text{quando } n \geqslant 1 . \tag{16}$$

Condizioni D. In relazione a quanto si è or ora detto, si pensi di imporre alle funzioni $\gamma_0(Q, \xi)$, $\gamma_a(Q, \xi)$, $f(Q, \xi, s)$ la nuova condizione d'essere, lungo le circonferenze di raggio ξ concentriche a quelle $\omega(O)$, derivabili rispetto l'argomento t, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, con derivata prima assolutamente continua e derivata seconda continua a variazione limitata [per la $f(Q, \xi, s)$ ciò avvenga per ogni valore della costante s tale che $0 \leqslant s \leqslant a$] in modo tale che le variazioni totali delle rispettive derivate prime e gli estremi superiori dei moduli di queste derivate prime verifichino le stesse condizioni (11) cui già devono soddisfare, per ipotesi, le $\gamma_0(Q, \xi)$, $\gamma_a(Q, \xi)$, $f(Q, \xi, s)$. Per il seguito indicheremo con la dicitura *Condizioni* D quelle ora imposte alle γ_0, γ_a, f. Da esse si ha che, per il noto comportamento delle $\varrho_h\sqrt{\lambda_h}$, $\varrho_h'\sqrt{\lambda_h}$, scegliendo una costante $C > 0$ opportunamente grande, è

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi}\left\{-\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q, \xi) + \varrho_h'\gamma_a(Q, \xi)]\right\}\cos(l(t-\omega))\cdot \mathrm{d}t\right| < \frac{C}{l^2}\, e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\xi},$$

per $l \geqslant 1$. Per quel che si riferisce alla $f(Q, \xi, s)$ si ha, poichè la classe dei numeri $|w_h(s)|$ è limitata al variare comunque di h ed s, se la C si sceglie opportunamente grande,

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^a f(Q, \xi, s)w_h(s)\,\mathrm{d}s\right\}\cos(l(t-\omega))\cdot \mathrm{d}t\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left|\int_0^a w_h(s)\left[\int_0^{2\pi} f(Q, \xi, s)\cos(l(t-\omega))\cdot \mathrm{d}t\right]\mathrm{d}s\right| < \frac{C}{l^2}\, e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\xi},$$

per $l \geqslant 1$. Se ne conclude, considerando l'espressione complessiva, che se con C' indichiamo una costante positiva opportunamente grande si ha, sotto le *Condizioni* D,

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi}\left\{-\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q, \xi) + \varrho_h'\gamma_a(Q, \xi)] + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \int_0^a f(Q, \xi, s)w_h(s)\,\mathrm{d}s\right\}\cos(l(t-\omega))\cdot \mathrm{d}t\right| < \frac{C'}{l^2}\, e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\xi}, \tag{11*}$$

per $l \geqslant 1$.

Dimostrazione della convergenza puntuale della serie (A).

8. – Cominciamo collo scrivere per disteso l'espressione (A) di $u(H, \varrho, z)$:

$$\text{(B)}\qquad u(H,\varrho,z) \backsim -\sum_h^{0,\infty} w_h(z)\left\{\frac{1}{2}K_0(\varrho\sqrt{\lambda_h})\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\varrho}\xi I_0(\xi\sqrt{\lambda_h})\left[\int_0^{2\pi}\left\{-\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q,\xi)+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+\,\varrho_h'\gamma_a(Q,\xi)]+\int_0^a f(Q,\xi,s)w_h(s)\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\xi+\sum_l^{1,\infty}K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\varrho}\xi I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\,\cdot$$

$$\left.\cdot\left[\int_0^{2\pi}\left\{-\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q,\xi)+\varrho_h'\gamma_a(Q,\xi)]+\int_0^a f(Q,\xi,s)\,w_h(s)\,\mathrm{d}s\right\}\cos\,(l(t-\omega))\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\xi\right\}-$$

$$-\sum_h^{0,\infty} w_h(z)\left\{\frac{1}{2}I_0(\varrho\sqrt{\lambda_h})\,\frac{1}{\pi}\int_{\varrho}^{\infty}\xi K_0(\xi\sqrt{\lambda_h})\left[\int_0^{2\pi}\left\{-\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q,\xi)+\varrho_h'\gamma_a(Q,\xi)]+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_0^a f(Q,\xi,s)w_h(s)\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\xi+\sum_l^{1,\infty}I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})\frac{1}{\pi}\int_{\varrho}^{\infty}\xi K_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\,\cdot$$

$$\left.\cdot\left[\int_0^{2\pi}\left\{-\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q,\xi)+\varrho_h'\gamma_a(Q,\xi)]+\int_0^a f(Q,\xi,s)w_h(s)\,\mathrm{d}s\right\}\cos\,(l(t-\omega)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\xi\right\}.$$

Fin d'ora va qui inteso che, a seconda delle opportunità, di questo sviluppo in serie, come pure delle derivate formali, ricercheremo la convergenza sommando le serie doppie per linee, nel senso chiaramente indicato dalla forma scritta dello sviluppo, o in generale nel senso delle serie multiple.

9. – Tenendo presente l'espressione di $I_l(\sigma)$ indicata nella Osservazione I del n. 7 e che $K_l(\sigma) = I_l(\sigma)\displaystyle\int_{\sigma}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu I_l^2(\mu)}$, nonchè il risultato finale della stessa Osservazione e la (11*), si ha, indicando con C'' una costante positiva opportunamente grande, che nel secondo termine del secondo membro di (B) è, quando $l \geqslant 1$,

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_{\varrho}^{\infty}\xi w_h(z)I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})K_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\left[\int_0^{2\pi}\left\{-\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q,\xi)+\varrho_h'\gamma_a(Q,\xi)]+\right.\right.\right.$$

$$+\int_0^a f(Q,\xi,s)\cdot w_h(s)\,\mathrm{d}s\cos(l(t-\omega))\cdot \mathrm{d}t\Big]\mathrm{d}\xi\Big| < \frac{C''}{l^2}\int_\varrho^\infty e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\xi}\,\xi\,\frac{\left(\frac{1}{2}\varrho\sqrt{\lambda_h}\right)^l}{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\cdot$$

$$\cdot\left[\int_0^\pi e^{\varrho\sqrt{\lambda_h}\cos\theta}\operatorname{sen}^{2l}\theta\,\mathrm{d}\theta\right]\frac{\left(\frac{1}{2}\xi\sqrt{\lambda_h}\right)^l}{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left[\int_0^\pi e^{\xi\sqrt{\lambda_h}\cos\theta}\operatorname{sen}^{2l}\theta\,\mathrm{d}\theta\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\int_{\xi\sqrt{\lambda_h}}^\infty\frac{\left[\Gamma\left(l+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2\mathrm{d}\mu}{\mu\cdot\left(\frac{1}{2}\mu\right)^{2l}\left[\int_0^\pi e^{\mu\cos\theta}\operatorname{sen}^{2l}\theta\cdot\mathrm{d}\theta\right]^2}\right]\mathrm{d}\xi = \frac{C''}{l^2}\int_\varrho^\infty e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\xi}\,\xi\,\varrho^l\xi^l\lambda_h^l\cdot$$

$$\cdot\left[\int_{\xi\sqrt{\lambda_h}}^\infty\frac{1}{\mu^{2l+1}}\,\frac{\int_0^\pi e^{\varrho\sqrt{\lambda_h}\cos\theta}\operatorname{sen}^{2l}\theta\cdot\mathrm{d}\theta}{\int_0^\pi e^{\mu\cos\theta}\operatorname{sen}^{2l}\theta\cdot\mathrm{d}\theta}\,\frac{\int_0^\pi e^{\xi\sqrt{\lambda_h}\cos\theta}\operatorname{sen}^{2l}\theta\cdot\mathrm{d}\theta}{\int_0^\pi e^{\mu\cos\theta}\operatorname{sen}^{2l}\theta\cdot\mathrm{d}\theta}\,\mathrm{d}\mu\right]\mathrm{d}\xi$$

e notando che $\varrho\sqrt{\lambda_h}\leqslant\xi\sqrt{\lambda_h}\leqslant\mu$, sicchè $\dfrac{\xi}{\mu}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_h}}$, $\dfrac{\varrho}{\mu}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_h}}$, e quindi $\dfrac{\xi}{\mu}\dfrac{\varrho^l\xi^l}{\mu^l\mu^l}\lambda_h^l\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_h}}$, se ne conclude che l'ultima espressione risulta, con $C'''>0$ opportunamente grande,

$$<\frac{C'''}{l^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\lambda_h}}\int_\varrho^\infty e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\xi}\left[\int_{\xi\sqrt{\lambda_h}}^\infty e^{\varrho\sqrt{\lambda_h}-\mu+\xi\sqrt{\lambda_h}-\mu}\,\mathrm{d}\mu\right]\mathrm{d}\xi = \frac{C'''}{l^2}\,\frac{1}{\sqrt{\lambda_h}}\,e^{\varrho\sqrt{\lambda_h}}\int_\varrho^\infty e^{(\sqrt{\lambda_h}+\sqrt{\lambda_0}-\beta)\xi}\left[\int_{\xi\sqrt{\lambda_h}}^\infty e^{-2\mu}\mathrm{d}\mu\right]\mathrm{d}\xi =$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{C'''}{l^2\sqrt{\lambda_h}}\,e^{\varrho\sqrt{\lambda_h}}\int_\varrho^\infty e^{-2\sqrt{\lambda_h}\xi+(\sqrt{\lambda_h}+\sqrt{\lambda_0}-\beta)\xi}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2}\,\frac{C'''}{l^2\sqrt{\lambda_h}}\,e^{\varrho\sqrt{\lambda_h}}\int_\varrho^\infty e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta-\sqrt{\lambda_h})\xi}\,\mathrm{d}\xi$$

e questo ultimo membro, per essere $\sqrt{\lambda_h}-(\sqrt{\lambda_0}-\beta)>0$ quando $h\geqslant 0$, è uguale a

$$\frac{1}{2}\,\frac{C'''}{l^2\sqrt{\lambda_h}}\,e^{(\sqrt{\lambda_h}+\sqrt{\lambda_0}-\beta-\sqrt{\lambda_h})\varrho}\,\frac{1}{\sqrt{\lambda_h}-(\sqrt{\lambda_0}-\beta)} = \frac{C'''}{2}\,\frac{e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\varrho}}{l^2\sqrt{\lambda_h}[\sqrt{\lambda_h}-(\sqrt{\lambda_0}-\beta)]}\,.$$

Se ne conclude che tutta l'espressione integrale originaria è maggiorabile mediante la seguente espressione $\overline{C}e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\varrho}/\{[\sqrt{\lambda_h}-(\sqrt{\lambda_0}-\beta)]\sqrt{\lambda_h}l^2\}$, quando $h\geqslant 0$, $l\geqslant 1$, se $\overline{C}>0$ è costante positiva opportunamente grande. Resta da far l'analisi per il caso restante di $l = 0$. Per le solite relazioni, valide per $x \to \infty$, si ha $I_l(x) \sim e^x(2\pi x)^{-\frac{1}{2}}$, $K_l(x) \sim e^{-x}\sqrt{\pi}(2x)^{-\frac{1}{2}}$.

Tenendo presente che al crescere di h è $\sqrt{\lambda_h}$ monotona divergente positivamente, se ne deduce che in corrispondenza di un qualsiasi prescelto $\varrho > 0$ si può assegnare una quantità $K^{(\varrho)} > 1$, dipendente da ϱ, scelta opportunamente grande in modo tale che per ogni ξ con $\xi \geqslant \varrho$ sia $I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})K_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) < K^{(\varrho)}e^{\varrho\sqrt{\lambda_h}}(2\pi\varrho\sqrt{\lambda_h})^{-\frac{1}{2}}e^{-\xi\sqrt{\lambda_h}}\sqrt{\pi}(2\xi\sqrt{\lambda_h})^{-\frac{1}{2}}$. Quando per ϱ si assumono valori via via sempre più grandi la $K^{(\varrho)}$ è suscettibile, se si vuole, di valori sempre più prossimi al valore 1.

Se poi assieme al prescelto ϱ positivo arbitrario si pensa di assegnare pure un arbitrario positivo ε, si potrà sempre, in corrispondenza, trovare una quantità positiva abbastanza grande $\Omega^{(\varrho,\varepsilon)}$ tale che per ogni ξ, con $\xi \geqslant \varrho$, risulti $\sqrt{\dfrac{\xi}{\varrho}} < \Omega^{(\varrho,\varepsilon)}e^{\varepsilon\xi}$.

Al crescere di ϱ la quantità $\Omega^{(\varrho,\varepsilon)}$ è suscettibile, se si vuole, di valori via via decrescenti, mentre ϱ diverge positivamente.

Per le solite proprietà di $w_h(s)$ si può assegnare una costante positiva tale che, per tutti gli s di $(0, a)$ e per tutti gli h, risulti $2\,|\,w_h(s)\,| < C'''$.

Si noti infine che per la (11_b) risulta essere

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi}\Big\{-\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q, \xi) + \varrho_h'\gamma_a(Q, \xi)] + \right.$$
$$\left. + \int_0^a f(Q, \xi, s)w_h(s)\,ds\Big\}\,dt\right| < 4L\{2M + Na\}\,e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\xi}\,.$$

Dopo quanto precede, scegliendo ε in modo che $0 < \varepsilon < \beta - \gamma$ essendo $0 < \gamma < \beta < \sqrt{\lambda_0}$,

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_\varrho^\infty \xi w_h(z)I_0(\varrho\sqrt{\lambda_h})K_0(\xi\sqrt{\lambda_h})\left[\int_0^{2\pi}\Big\{-\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q, \xi) + \varrho_h'\gamma_a(Q. \xi)] + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \int_0^a f(Q, \xi, s)w_h(s)\,ds\Big\}\,dt\right]d\xi\right| < K^{(\varrho)}C'''\int_\varrho^\infty \xi e^{\varrho\sqrt{\lambda_h}}(2\pi\varrho\sqrt{\lambda_h})^{-\frac{1}{2}}\,\cdot$$
$$\cdot\, e^{-\xi\sqrt{\lambda_h}}\sqrt{\pi}(2\xi\sqrt{\lambda_h})^{-\frac{1}{2}}2L\{2M + Na\}\,e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\xi}\,d\xi =$$
$$= \frac{K^{(\varrho)}C'''L\{2M + Na\}}{\sqrt{\lambda_h}}\,e^{\varrho\sqrt{\lambda_h}}\int_\varrho^\infty\sqrt{\frac{\xi}{\varrho}}\,e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\xi-\sqrt{\lambda_h}\xi}\,d\xi <$$
$$< \frac{K^{(\varrho)}\Omega^{(\varrho,\varepsilon)}C'''L\{Na + 2M\}}{\sqrt{\lambda_h}}\,e^{\varrho\sqrt{\lambda_h}}\int_\varrho^\infty e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta+\varepsilon-\sqrt{\lambda_h})\xi}\,d\xi =$$
$$= K^{(\varrho)}\Omega^{(\varrho,\varepsilon)}C'''\{2M + Na\}\,Le^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta+\varepsilon)\varrho}\,\frac{1}{\sqrt{\lambda_h}[\sqrt{\lambda_h} - \varepsilon + \beta - \sqrt{\lambda_0}]}\,.$$

Rammentando che per $h \to \infty$ è $\sqrt{\lambda_h}$ sempre positiva e monotona nel senso della crescenza e divergente come $h\pi/a$, si conclude, mediante il raffronto con la serie doppia armonica generalizzata $\sum_h \sum_l \frac{1}{h^2 l^2}$ che

$$K^{(\varrho)} \Omega^{(\varrho,\varepsilon)} C''' \{2M + Na\} L\, e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta+\varepsilon)\varrho} \sum_h^{0,\infty} \frac{1}{2\sqrt{\lambda_h}[\sqrt{\lambda_h} - \varepsilon + \beta - \sqrt{\lambda_0}]} +$$

$$+ \overline{C}\, e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta+\varrho} \sum_h^{0,\infty} \sum_l^{1,\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_h}[\sqrt{\lambda_h} - (\sqrt{\lambda_h} - \beta)]l^2},$$

è assolutamente convergente. Risulta di conseguenza pur tale la serie doppia secondo addendo del secondo membro della (B) e moltiplicando la somma della serie per $e^{-(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\varrho}$ il prodotto è un infinitesimo quando $\varrho \to \infty$, essendo $0 < \gamma < \beta < \sqrt{\lambda_0}$.

Se ne conclude che la somma della serie doppia secondo addendo del secondo membro di (B) è funzione continua in $T + FT$, almeno quando $\varrho > 0$, e moltiplicandola per $\frac{1}{\varphi(Q, \varrho)} = e^{-\sqrt{\lambda_0}\varrho}\varrho$ il prodotto converge uniformemente a zero, rispetto agli z di $(0, a)$, quando $\varrho \to \infty$.

Facciamo ora la corrispondente analisi relativa al comportamento del primo termine del secondo membro di (B). Con le stesse argomentazioni di prima si ha, quando $l \geq 1$,

$$\frac{1}{\pi}\left| \int_0^\varrho \xi w_h(z) K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) I_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) \left[\int_0^{2\pi} \left\{ -\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q,\xi) + \varrho_h'\gamma_a(Q,\xi)] + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \int_0^a f(Q,\xi,s) w_h(s)\, ds \right\} \cos(l(t-\omega)\, dt \right] d\xi \right| < \frac{C''}{l^2} \int_0^\varrho e^{(\lambda\sqrt{\lambda_0}-\beta)\xi}\, \xi \cdot$$

$$\cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\varrho\sqrt{\lambda_h}\right)^l}{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left[\int_0^\pi e^{\varrho\sqrt{\lambda_h}\cos\theta} \operatorname{sen}^{2l}\theta \cdot d\theta\right] \left[\int_{\varrho\sqrt{\lambda_h}}^\infty \frac{\left[\Gamma\left(l+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 d\mu}{\mu\left(\frac{1}{2}\mu\right)^{2l}\left[\int_0^\pi e^{\mu\cos\theta}\operatorname{sen}^{2l}\theta\cdot d\theta\right]^2} \right] \cdot$$

$$\cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\xi\sqrt{\lambda_h}\right)^l}{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left[\int_0^\pi e^{\xi\sqrt{\lambda_h}\cos\theta} \operatorname{sen}^{2l}\theta \cdot d\theta\right] d\xi =$$

$$= \frac{C''}{l^2} \int_0^\varrho e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\xi}\, \xi \varrho^l \xi^l \lambda_h^l \left[\int_{\varrho\sqrt{\lambda_h}}^\infty \frac{1}{\mu^{2l+1}} \frac{\int_0^\pi e^{\varrho\sqrt{\lambda_h}\cos\theta}\operatorname{sen}^{2l}\theta\cdot d\theta}{\int_0^\pi e^{\mu\cos\theta}\operatorname{sen}^{2l}\theta\cdot d\theta} \cdot \frac{\int_0^\pi e^{\xi\sqrt{\lambda_h}\cos\theta}\operatorname{sen}^{2l}\theta\cdot d\theta}{\int_0^\pi e^{\mu\cos\theta}\operatorname{sen}^{2l}\theta\cdot d\theta}\, d\mu \right] d\xi$$

e questo ultimo membro $\left(\text{si osservi che per essere } 0 < \xi\sqrt{\lambda_h} \leqslant \varrho\sqrt{\lambda_h} \leqslant \mu \text{ si ha } \frac{\xi}{\mu} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\lambda_h}}, \frac{\varrho}{\mu} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\lambda_h}}, \text{ e quindi } \xi\varrho^l\xi^l \frac{1}{\mu^{2l+1}}\lambda_h^l < \frac{1}{\sqrt{\lambda_h}}\right)$ è minore di

$$\frac{C'''}{l^2}\frac{1}{\sqrt{\lambda_h}}\int_0^\varrho e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\xi}\left[\int_{\varrho\sqrt{\lambda_h}}^\infty e^{\varrho\sqrt{\lambda_h}+\xi\sqrt{\lambda_h}-2\mu}\,d\mu\right]d\xi = \frac{C'''}{l^2}\frac{1}{\sqrt{\lambda_h}}e^{\varrho\sqrt{\lambda_h}}\int_0^\varrho e^{(\sqrt{\lambda_h}+\sqrt{\lambda_0}-\beta)\xi}\frac{e^{-2\varrho\sqrt{\lambda_h}}}{2}d\xi =$$

$$= \frac{C'''}{l^2}\frac{1}{\sqrt{\lambda_h}}\frac{e^{-\varrho\sqrt{\lambda_h}}}{2}\frac{e^{(\sqrt{\lambda_h}+\sqrt{\lambda_0}-\beta)\varrho}-1}{\sqrt{\lambda_h}+\sqrt{\lambda_0}-\beta} =$$

$$= \frac{C'''}{2}\left(e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\varrho}-e^{-\sqrt{\lambda_h}\varrho}\right)\frac{1}{[\sqrt{\lambda_h}+\sqrt{\lambda_0}-\beta]\sqrt{\lambda_h}l^2} < \frac{C'''}{2}\frac{e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\varrho}}{\sqrt{\lambda_h}[\sqrt{\lambda_h}+\sqrt{\lambda_0}-\beta]l^2}\,.$$

Se ne conclude che l'espressione integrale originaria è maggiorabile mediante la seguente, quando $h \geqslant 0$, $l \geqslant 1$, (ove al solito sia $\overline{C} > 0$ opportunamente grande) $\overline{C}e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\varrho}\dfrac{1}{[\sqrt{\lambda_h}+\sqrt{\lambda_0}-\beta]\sqrt{\lambda_h}l^2}$.

Consideriamo per ultimo il caso di $l = 0$. Si cominci con l'osservare che $\lim\limits_{x\to 0} I_0(x) = 1$ (e $\lim\limits_{x\to 0} I_l(x) = 0$ se $l \geqslant 1$), mentrechè per $x \to \infty$ risulta $I_l(x) \sim e^x(2\pi x)^{-1/2}$.

Siccome la successione delle $\sqrt{\lambda_h}$ diverge positivamente per $h \to \infty$, allora, considerando la costante $\varrho > 0$, arbitrariamente prefissata, la $K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})$ risulta infinitesima per $h \to \infty$, sicchè quando $h \to \infty$ possiamo servirci di $K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) \sim e^{-\varrho\sqrt{\lambda_h}}\sqrt{\pi}(2\varrho\sqrt{\lambda_h})^{-1/2}$.

In corrispondenza della scelta del $\varrho > 0$ possiamo allora assegnare una quantità positiva opportunamente grande $H^{(\varrho)}$ tale che, per ogni h e per $0 \leqslant \xi \leqslant \varrho$, risulti $K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})I_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) < H^{(\varrho)}e^{-\varrho\sqrt{\lambda_h}}\sqrt{\pi}(2\varrho\sqrt{\lambda_h})^{-1/2}\cdot e^{\xi\sqrt{\lambda_h}}(2\pi\xi\sqrt{\lambda_h})^{-1/2}$. Si ha, dopo ciò, che

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_0^\varrho \xi w_h(z)K_0(\varrho\sqrt{\lambda_h})I_0(\xi\sqrt{\lambda_h})\left[\int_0^{2\pi}\left\{-\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q,\xi)+\varrho_h'\gamma_a(Q,\xi)]+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\int_0^a f(Q,\xi,s)w_h(s)\,ds\right\}dt\right]d\xi\right|,$$

essendo $\xi/\varrho < 1$, risulta minore di

$$\frac{H^{(\varrho)}C'''}{2^2\sqrt{\lambda_h}}\int_0^\varrho \xi e^{-\varrho\sqrt{\lambda_h}}\frac{1}{\sqrt{\varrho\xi}}e^{\xi\sqrt{\lambda_h}}4L\{2M+Na\}e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\xi}d\xi <$$

$$< \frac{H^{(\varrho)}C'''L\{2M+Na\}}{\sqrt{\lambda_h}e^{\varrho\sqrt{\lambda_h}}}\int_0^\varrho e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta+\sqrt{\lambda_h})\xi}d\xi =$$

$$= \frac{H^{(\varrho)}C'''L\{2M+Na\}}{\sqrt{\lambda_h}[\sqrt{\lambda_h}+\sqrt{\lambda_0}-\beta]}\{e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\varrho}-e^{-\varrho\sqrt{\lambda_h}}\}<$$

$$< H^{(\varrho)}C'''L\{2M+Na\}e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\varrho}\frac{1}{\sqrt{\lambda_h}[\sqrt{\lambda_h}+\sqrt{\lambda_0}-\beta]},$$

per essere $\beta < \sqrt{\lambda_0}$.

Ripetendo allora le argomentazioni del precedente caso, se ne deduce che è pure assolutamente convergente la serie doppia primo addendo del secondo membro della (B). Siccome, qualora si facesse divergere ϱ positivamente, la $H^{(\varrho)}$ sarebbe suscettibile di valori il cui insieme potrebbe essere mantenuto limitato, la somma della serie doppia quando venga moltiplicata per $e^{-(\sqrt{\lambda_0}-\gamma)\varrho}$ dà, come risultato del prodotto, un infinitesimo per $\varrho \to \infty$, essendo $\gamma<\beta<\sqrt{\lambda_0}$.

Se ne conclude che la somma della serie doppia primo addendo del secondo membro di (B) è funzione continua in $T+\mathrm{F}T$, almeno quando $\varrho > 0$, e moltiplicata per la solita $\frac{1}{\varphi(Q;\varrho)} = e^{-\sqrt{\lambda_0}\varrho}\varrho$ converge uniformemente a zero, rispetto agli z di $(0, a)$, quando ϱ si fa divergere positivamente.

Riassumendo quanto siamo venuti dicendo in questo n., possiamo concludere che la

$$u(H, \varrho, z) \equiv u(\varrho\cos\omega, \ \varrho \operatorname{sen}\omega, z) \equiv u(x, y, z),$$

esprimente la somma delle due serie doppie (assolutamente convergenti in $T+\mathrm{F}T$, ove almeno è $\varrho > 0$) del secondo membro di (B), è funzione continua in $T+\mathrm{F}T$, almeno quando $\varrho > 0$, poichè quelle due serie doppie sono uniformemente convergenti in ogni dominio limitato di $T+\mathrm{F}T$, almeno per quelli cui non appartengono punti dell'asse z (pei quali è appunto $\varrho = 0$).

Per giustificare la definizione di u anche pei punti di T appartenenti all'asse z, nonchè la continuità di u nei punti stessi, limitiamoci ad osservare che per lo strato T la posizione dell'asse z è del tutto arbitraria, sicchè fatta una qualsiasi traslazione dell'asse stesso si otterrebbe una corrispondente espressione (B′) per la u e in tali condizioni per i punti per cui nel riferimento iniziale era $\varrho = 0$ si avrebbe invece nel nuovo riferimento $\varrho > 0$, cosicchè in queste condizioni l'espressione (B′) di u sarebbe ancora definita e continua.

La funzione $u(x, y, z) \equiv u(H, \varrho, z)$ *continua in* $T + \mathrm{F}T$ *è inoltre tale, per quanto si è visto, da soddisfare la relazione*

$$\lim_{\varrho\to\infty} \frac{u(H, \varrho, z)}{\varphi(H, \varrho)} = \lim_{\varrho\to\infty} \left\{ \frac{u(H, \varrho, z)}{e^{\sqrt{\lambda_0}\varrho}} \varrho \right\} = 0 ,$$

uniformemente rispetto agli z *di* $(0, a)$, *soddisfa cioè la condizione* (10) *relativa al teorema di unicità trovato, per il problema al contorno che ci occupa.*

Infatti la (10) *è conseguenza del fatto, sopra verificato, d'essere*

$$\lim_{\varrho\to\infty} \frac{u(H, \varrho, z)}{e^{(\sqrt{\lambda_0}-\gamma)\varrho}} = 0 , \quad con \quad 0 < \gamma < \beta < \sqrt{\lambda_0} ,$$

uniformemente al variare di H *lungo* $\omega(O)$ *e di* z *in* $(0, a)$.

Inoltre per le trasformate $u_{h,l}^{(c)}(\varrho)$, $u_{h,l}^{(s)}(\varrho)$, *della* u, *come ci è già noto, indipendentemente dalle risultanze di questo* n., *sono valide le relazioni corrispondenti*

$$\lim_{\varrho\to\infty} \{ u_{h,l}^{(c)}(\varrho)e^{-(\sqrt{\lambda_0}-\gamma)\varrho} \} = \lim_{\varrho\to\infty} \{ u_{h,l}^{(s)}(\varrho)e^{-(\sqrt{\lambda_0}-\gamma)\varrho} \} = 0 ,$$

e quindi, di conseguenza,

$$\lim_{\varrho\to\infty} \{ u_{h,l}^{(c)}(\varrho)e^{-\sqrt{\lambda_0}\varrho}\varrho \} = \lim_{\varrho\to\infty} \{ u_{h,l}^{(s)}(\varrho)e^{-\sqrt{\lambda_0}\varrho}\varrho \} = 0 .$$

Vale dunque il seguente

Teorema I. *Se le funzioni* $\gamma_0(Q, \varrho)$, $\gamma_a(Q, \varrho)$, $f(Q, \varrho, z)$, *soddisfano le condizioni indicate al* n. 1 (*essere cioè le prime due continue in tutto* $S_{(2)}$ *e la terza in* $T + \mathrm{F}T$), *nonchè l'altra d'esistere tre costanti positive* N, M, β *con* $\beta < \sqrt{\lambda_0}$, *tali che le* $|\gamma_0(Q, \varrho)|$, $|\gamma_a(Q, \varrho)|$ *siano minori di* $Me^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\varrho}$ *e l'altra* $|f(Q, \varrho, z)|$ *minore di* $Ne^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\varrho}$, *e se inoltre queste funzioni* γ_0, γ_a, f *soddisfano anche le «* Condizioni D *», allora l'espressione, somma di due serie doppie convergenti assolutamente in* $T + \mathrm{F}T$, *del secondo membro della* (B) *è convergente in senso puntuale in tutto* $T + \mathrm{F}T$ *e la somma* $u(H, \varrho, z)$ *esprime una funzione continua in* $T + \mathrm{F}T$.

Questa funzione $u(H, \varrho, z)$, *continua in* $T + \mathrm{F}T$, *soddisfacente a tutto il complesso di proprietà e condizioni sopra indicate, esprime l'unica effettiva soluzione per il nostro problema al contorno poichè ammette le derivate parziali e, oltre a soddisfare le imposte equazioni al contorno, verifica l'equazione* $\Delta_2 u = f$ *di* POISSON *in* T, *come vedremo nelle successive* 2ª *e* 3ª *parte di questo lavoro complessivo.*