

PIERO POZZATI (*)

Contributo al calcolo dei solai a fungo. (**)

In questa Nota vengono date le soluzioni in serie semplici della lastra continua su appoggi isolati (lastra a fungo), con ogni campo sottoposto a un carico uniformemente ripartito su un rettangolo centrale, e della lastra a fungo caricata lungo i bordi dei campi.

1. - Le soluzioni note della lastra a fungo sono quella generale del LEWE (1) (ottenuta per mezzo di una serie doppia trigonometrica) e quella in serie semplice relativa al caso del carico distribuito uniformemente su tutta la lastra (2).

Alle volte può presentarsi la necessità di conoscere le sollecitazioni provocate da un carico uniformemente distribuito su un rettangolo parziale (al limite il carico diventa centrato).

Pertanto può essere utile questa soluzione in serie semplice che, data la rapida convergenza, permette di calcolare rapidamente le deformazioni e le sollecitazioni.

Le reazioni dei pilastri sono supposte, al solito, applicate in punti isolati: ad ogni modo i valori del massimo momento positivo nel centro del campo variano poco al cambiare delle dimensioni del capitello che trasmette alla lastra una reazione ripartita.

Con tale soluzione si studia nello stesso tempo una lastra a fungo soggetta

(*) Indirizzo: Istituto di Scienza delle Costruzioni, Facoltà di Ingegneria, Università, Bologna (Italia).

(**) Lavoro ricevuto il 20-X-1950.

(1) V. LEWE. *Pilzdecken*, Ernst, Berlin 1926. In tale libro sono raccolte le varie Memorie pubblicate dallo stesso Autore sull'argomento. Si veda anche l'accurata bibliografia alla fine del testo.

(2) A. NADAI, *Die elastischen Platten*, Springer, Berlin 1925 (cfr. § 37). Dello stesso Autore: *Über die Biegung durchlaufender Platten...*, *Z. Angew. Math. Mech.* 2, 5-12 (1922). Si veda anche: S. WOJNOSKY-KRIEGER, *Beitrag zur Theorie der Pilzdecken*, *Z. Angew. Math. Mech.* 14, 13-18 (1934). In questa interessante Memoria viene studiata la lastra caricata uniformemente, con le reazioni dei pilastri non concentrate ma uniformemente distribuite dai capitelli su rettangoli parziali.

nel centro di ogni campo a un carico concentrato e con le reazioni uniformemente distribuite su rettangoli.

Quindi la tabella che riunisce i valori dei momenti flettenti positivi massimi, per carico ripartito su una zona centrale e reazioni concentrate, dà anche i valori dei massimi momenti negativi nel centro dei capitelli quando le reazioni sono ripartite e il carico è concentrato.

Altri casi sono sviluppati nei nn. 4, 5, 6, 7.

**La lastra a fungo indefinita, su appoggi isolati puntiformi,
con ogni campo caricato su un rettangolo parziale.**

2. — Le notazioni adottate risultano dalla fig. 1: la superficie caricata è $2c \cdot 2d$, nei punti *A* sono applicate le reazioni.

Dividiamo ogni campo in tre strisce: la striscia 1 (che comprende il carico) e le strisce 2 uguali e scariche.

L'equazione generale della superficie elastica della striscia 1, in coordi-

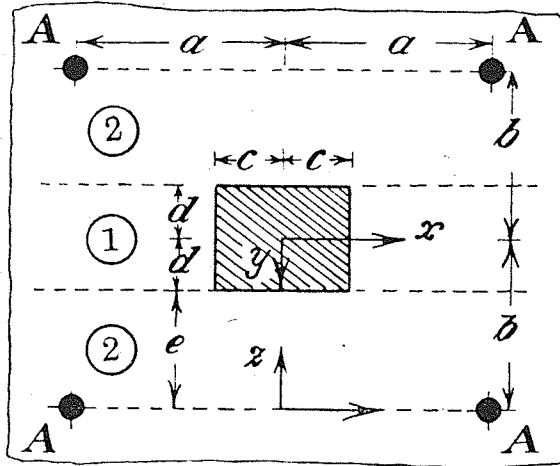


Fig. 1.

nate cartesiane, come è noto, è (sviluppando in serie di FOURIER il carico)

$$(1) \quad B\Delta^4 w_1 = \frac{pc}{a} + \frac{2p}{\pi} \sum_n \frac{1}{n} \text{sen } a_n c \cos a_n x, \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

dove B è la rigidezza della lastra e $a_n = n\pi/a$.

Assumendo l'origine degli assi nel centro della lastra, la superficie elastica, essendo simmetrica rispetto all'asse x , contiene i soli termini che hanno carat-

tere di simmetria. Scritta nella forma data da M. LEVY, essa in questo caso è

$$(2) \quad w_1 = \eta_1 + w_0 + \frac{p}{aB} \sum_n \left(\frac{2 \operatorname{sen} a_n c}{a_n^5} + A_n \cosh a_n y + B_n a_n y \operatorname{senh} a_n y \right) \cos a_n x,$$

dove A_n, B_n, w_0 sono costanti incognite da determinare (w_0 è il valore del termine della somma quando $n = 0$) e η_1 fa parte dell'integrale particolare e tiene conto del valore medio del carico pc/a (3).

L'equazione della striscia 2 vale

$$(3) \quad w_2 = \eta_2 + w_0 + \frac{p}{aB} \sum_n (C_n \cosh a_n z + D_n a_n z \operatorname{senh} a_n z + \\ + E_n \operatorname{senh} a_n z + F_n a_n z \cosh a_n z) \cos a_n x,$$

dove C_n, D_n, E_n, F_n sono costanti da determinare; η_2 insieme a η_1 rappresenta la linea elastica di una trave incastrata lungo le rette $z = 0, z = 2b$, sottoposta nel tratto 1 al carico uniforme pc/a e scarica nei tratti 2 [cfr. (3)].

Per il tronco 1 e per il tronco 2 (scarico), si hanno rispettivamente le linee elastiche (4)

$$(4) \quad \eta_1 = \frac{pc}{24aB} (y^4 + \alpha_0 y^3 + \beta_0 y^2 + \gamma_0 y + \delta_0),$$

$$(5) \quad \eta_2 = \frac{pc}{24aB} (0 + \varepsilon_0 z^3 + \varphi_0 z^2 + \psi_0 z + \varkappa_0).$$

Le costanti $\alpha_0, \beta_0, \dots, \varkappa_0$ sono al solito determinate dalle condizioni limiti relative alla provvisoria situazione di trave [cfr. (3) e (4)].

Poichè si deve avere abbassamento, rotazione nulla e taglio $t_z = pc/d/a$ per $z = 0$, rotazione e taglio nullo per $y = 0$, e infine abbassamento, rotazione e momento uguali sulla retta di confine dei due tronchi (cioè per $z = e$,

(3) Quindi la soluzione è ottenuta come somma di due situazioni, nella prima delle quali si pensa provvisoriamente la lastra incastrata lungo i due lati opposti $z = 0, z = 2b$, con la striscia 1 sottoposta al carico uniforme medio pc/a e con le strisce 2 scariche.

Si ha in tale caso comportamento di trave incastrata caricata nel tronco centrale uniformemente: sono pertanto già rispettate le condizioni di vincolo lungo i due lati paralleli agli assi y e z , ma non quelle lungo i lati paralleli all'asse x . Per ricondurre anche tali lati al rispetto della congruenza, si interviene per le strisce 1 e 2 con gli integrali generali.

(4) Anche l'equazione differenziale della linea elastica di una trave può essere integrata considerando l'integrale dell'equazione $\eta^{(4)} = q/B$, come somma di un integrale particolare $\eta_1 = qy^4/(24B)$ e dell'integrale generale dell'equazione omogenea $\eta^{(4)} = 0$. Nel caso in esame si ha $q = pc/a$. Si veda, ad esempio, O. BELLUZZI, *Scienza delle Costruzioni*, Zanichelli, Bologna 1944, (cfr. Cap. 26, es. 1193).

$y = d$), si ottiene

$$(6) \quad \begin{cases} \alpha_0 = \gamma_0 = \psi_0 = \varkappa_0 = 0, & \beta_0 = -(2d^3 + 6bde)/b, & \delta_0 = d^4 + 2bde(b + d), \\ \varepsilon_0 = -4d, & \varphi_0 = (-2d^3 + 6b^2d)/b. \end{cases}$$

Le espressioni di queste costanti si verificano facilmente considerando i due casi limiti (carico totale uniforme e carico concentrato) per i quali si debbono trovare i noti valori relativi alla trave incastrata di luce $2b$ (5).

Similmente si determinano i valori delle costanti A_n, \dots, F_n : cioè lungo la retta $z = 0$ si deve avere per la striscia 2 rotazione nulla e taglio (6) uguale alla metà della reazione concentrata $R = 4pcd$ (7).

Infine lungo le rette $z = e, y = d$, di confine delle due strisce, si deve avere uguale abbassamento, uguale rotazione, uguale momento e uguale taglio.

Queste sei condizioni danno luogo a un sistema di sei equazioni dal quale si ottiene:

$$(7) \quad \begin{cases} A_n = - [\text{sen } a_n c \cdot (2 \text{senh } \beta_n \cdot \text{senh } \eta_n + \delta_n \cosh \beta_n \cdot \text{senh } \eta_n - \eta_n \text{senh } \delta_n) + \\ \quad + (-1)^n c d a_n^2 (\text{senh } \beta_n + \beta_n \cosh \beta_n)]: (a_n^5 \text{senh}^2 \beta_n), \\ C_n = - [\text{sen } a_n c \cdot (-2 \text{senh } \beta_n \cdot \text{senh } \delta_n - \eta_n \text{senh } \beta_n \cdot \cosh \delta_n + \beta_n \text{senh } \eta_n) + \\ \quad + (-1)^n c d a_n^2 (\beta_n + 0,5 \text{senh } 2\beta_n)]: (a_n^5 \text{senh}^2 \beta_n), \\ B_n = [\text{sen } a_n c \cdot \text{senh } \eta_n + (-1)^n c d a_n^2]: (a_n^5 \text{senh } \beta_n), \\ D_n = - [\text{sen } a_n c \cdot \text{senh } \delta_n - (-1)^n c d a_n^2 \cosh \beta_n]: (a_n^5 \text{senh } \beta_n), \\ E_n = - F_n = (-1)^n c d: a_n^3. \end{cases}$$

In tali espressioni per brevità si è posto

$$(8) \quad a_n = n\pi e/a, \quad \beta_n = n\pi b/a, \quad \delta_n = n\pi d/a, \quad \eta_n = n\pi c/a = \beta_n - \delta_n.$$

(5) Ad esempio per $e = 0, d = b$ si deve trovare la situazione della trave incastrata, di lunghezza $2b$, caricata uniformemente. Infatti

$$(\eta_1)_{y=0} = \delta_0 = pcb^3/(24aB) = 1/384 \cdot pc(2b)^4/(aB),$$

$$(M)_{y=0} = -pc/(24a) \cdot 2\beta_0 = pc(2b)^2/(24a),$$

$$(M)_{y=b} = -pc/(24a) \cdot (12y^2 + 2\beta_0) = -pc(2b)^2/(12a).$$

(6) È sufficiente il taglio invece della reazione, perchè lungo il lato in esame è nullo il momento torcente.

(7) Il taglio in tale caso è rappresentato, in serie di coseni, dalla espressione

$$\frac{1}{2} \left[\frac{R}{2a} + \frac{R}{a} \sum_n (-1)^n \cos a_n x \right].$$

Infine, dovendo essere $w_2 = 0$ per $x = a$ e $z = 0$, si ha

$$(9) \quad w_0 = -\frac{p}{aB} \sum_n (-1)^n C_n.$$

Ottenute le espressioni delle costanti, la soluzione è completa.

Un controllo di tutte le operazioni svolte si ha considerando che per $e = 0$, $c = a$, $d = b$, ossia con il rettangolo caricato coincidente con l'intero campo, la soluzione ottenuta coincide con quella data dal NADAI ⁽⁸⁾.

La quantità che maggiormente interessa è il momento flettente massimo positivo, cioè il momento nel centro del campo ($x = y = 0$).

Esso, posto $c/a = d/b = k$, vale:

$$(10) \quad m_x = m_y = (1 + \nu)pa^2 \left[\sum_n \frac{\text{sen } n\pi k}{n^3\pi^3} \left(1 - \frac{\text{senh } \eta_n}{\text{senh } \beta_n} \right) - \frac{(-1)^n bk^2}{n\pi a \text{senh } \beta_n} \right] + \\ + (1 + \nu) \frac{pb^2 k^2}{12} \cdot (3 - 3k + k^2).$$

Nella tabella seguente vengono dati i valori dei momenti flettenti massimi positivi (per $x = 0$, $y = 0$) per la lastra quadrata e per i vari valori del parametro $k = c/a = d/b$ (c , d sono i lati del rettangolo caricato, $Q = 4pcd$ è il carico totale).

Momenti nel centro ($x = y = 0$) per la lastra quadrata ($a = b$):

| $k = c/a = d/b$ | k | 0,0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1 |
|-----------------------|-------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $m_0 = \mu(1 + \nu)Q$ | μ | ∞ | 0,193 | 0,138 | 0,107 | 0,085 | 0,068 | 0,0555 | 0,0460 | 0,0385 | 0,0324 | 0,0276 |

⁽⁸⁾ Infatti per $e = 0$ (quindi $\eta_n = 0$), $b = d$, $c = a$ (quindi $\text{sen } a_n c = 0$) le costanti della superficie elastica della striscia 1 (che è la sola a rimanere) si riducono a

$$A_n = -(-1)^n ab (\text{senh } \beta_n + \beta_n \cosh \beta_n) : (a_n^3 \text{senh}^2 \beta_n),$$

$$B_n = (-1)^n ab : (a_n^3 \text{senh } \beta_n).$$

Quindi è

$$w_1 = \eta_1 + w_0 + \frac{pa^3 b}{\pi^2 B} \sum_n (-1)^n \frac{\cos a_n x}{n^2 \text{senh } \beta_n} \{ a_n y \text{senh } a_n y - (1 + \beta_n \coth \beta_n) \cosh a_n y \},$$

con w_0 determinato dalla solita condizione ed $\eta_1 = -\frac{pb^4}{24B} \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right)^2$. Tale soluzione coincide con quella data da A. NADAI [cfr. ⁽²⁾]; si veda anche S. TIMOSHENKO, *Theory of plates and shells*, Mc Graw-Hill, New York 1940, (cfr. § 46).

3. - Come è stato detto, con la soluzione ottenuta, a parte alcune rettifiche, si studia anche la lastra sottoposta a un carico concentrato P e con le reazioni P dei pilastri ripartite su rettangoli tutti uguali di lati c e d [$p = P/(4cd)$].

In tale modo, poichè è nota anche la soluzione della lastra caricata uniformemente con le reazioni dei pilastri ripartite su rettangoli parziali [cfr. (2)], in condizione di carico intermedio alle due studiate, si possono avere riferimenti mediante il confronto con i due casi limiti.

È necessario però avere presente che ora si deve avere $w_1 = 0$ per $x = 0$, $y = 0$, ossia abbassamento nullo nel centro del rettangolo caricato.

Pertanto le soluzioni trovate, cambiate di segno, sono ancora valide, purchè per p ora si intenda la reazione ripartita e non il carico, cioè $p = P/(4cd)$; cambia solo l'espressione di w_0 e di alcune costanti degli integrali particolari che, imponendo la condizione sopra detta, valgono

$$(11) \quad \begin{cases} w_0 = \frac{P}{4acdB} \sum_n \left(\frac{2 \operatorname{sen} a_n c}{a_n^5} - A_n \right), & \text{con } A_n \text{ dato dalle (7),} \\ \delta_0 = 0, & k_0 = d^3 + 2bde(b + d). \end{cases}$$

Quindi la soluzione di questo caso differisce dalla precedente solo per una costante, ossia per una traslazione rigida dell'insieme, che deve essere riportato al rispetto della nuova condizione di congruenza.

Rimane pertanto invariata (a parte il segno) l'espressione (10) che dà ora il momento flettente massimo negativo; quindi rimane ancora valida la tabella dei momenti nella quale però si deve porre P al posto di Q .

Nella seguente tabella sono riportati i valori dei *momenti flettenti nel centro dei capitelli di lato $2c = 2d$, per la lastra quadrata ($a = b$) e per vari valori del rapporto $k = c/a = d/b$, per carico concentrato P e carico ripartito su tutta la lastra e di valore totale Q* [cfr. (2)] (9):

| | $k = c/a = d/b$ | k | 0,0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 |
|----------------------|--------------------------------|---------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|
| carico concentr. P | $m_x = m_y = -(1 + \nu)P\mu_1$ | μ_1 | ∞ | 0,193 | 0,138 | 0,107 | 0,085 | 0,068 |
| carico unif. Q | $m_x = m_y = -(1 + \nu)Q\mu_2$ | μ_2 | ∞ | 0,158 | 0,109 | 0,078 | 0,057 | 0,041 |

(9) Si tenga presente però che in questo caso i valori diventano tanto meno attendibili quanto maggiore è il valore di k , cioè del rapporto del lato del capitello e del lato della lastra; questo perchè, in realtà, la reazione dei pilastri non è uniformemente ripartita e inoltre viene imposta (sia con soluzioni in serie doppie, sia con soluzioni in serie semplici) la condizione che w sia uguale a zero solo nel centro del capitello.

**Solaio a fungo sottoposto a carichi distribuiti con legge qualunque
lungo il contorno di ogni campo.**

4. — Alle volte, dovendo fissare trasmissioni, rotaie di ferrovie pensili, o isolare con muratura un campo dagli adiacenti, si ha la necessità di studiare lo schema di una lastra, sorretta da pilastri isolati, e sottoposta a carichi che agiscono lungo il perimetro dei campi.

La soluzione in serie doppia non si presta a studiare tale caso, perchè in essa è già posta la condizione che il taglio lungo il contorno sia nullo.

Invece con la soluzione in serie semplice si riesce a superare tale ostacolo e con facilità si impongono le condizioni di vincolo lungo il contorno.

Nella presente Nota vengono esaminate le due principali condizioni di carico: carico concentrato e carico ripartito uniformemente lungo tutto o parte del bordo.

Naturalmente si deve al solito supporre che il solaio sia indefinito e che lo schema di carico si ripeta in modo uguale per tutti i campi.

5. — Sia dato un solaio a fungo sottoposto a *carico distribuito uniformemente* lungo le rette $y = \pm b/2$ parallele all'asse x (cfr. fig. 2); siano a e b le dimensioni del campo e sia q il carico per unità di lunghezza.

Poichè i campi vengono supposti tutti ugualmente caricati è lecito pensare di isolarne uno e di svolgere su questo lo studio statico.

Per tale campo si deve avere rotazione e taglio nullo lungo i due lati paralleli all'asse y ; rotazione ancora nulla e taglio uguale alla metà del carico q lungo i due lati paralleli all'asse x .

Il carico distribuito lungo tali due lati è costituito dal carico uniforme q rivolto verso il basso e dalle rotazioni $R = qa$ rivolte verso l'alto e distanziate di a .

Rappresentando tali carichi con una serie trigonometrica si ottiene

$$(12) \quad \frac{1}{2} \left(q - \frac{R}{a} - \frac{2R}{a} \sum_n \cos \frac{2n\pi x}{a} \right) = -q \sum_n \cos \frac{2n\pi x}{a}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

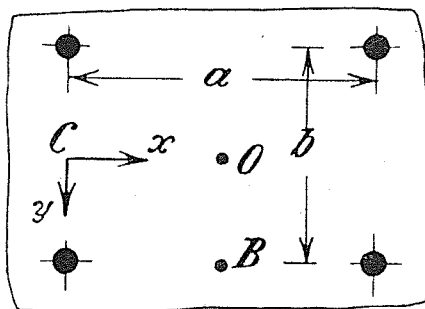


Fig. 2.

Poichè non si hanno carichi sulla superficie del campo, l'equazione della superficie elastica ha nullo il termine noto, ed essendo i carichi lungo il bordo simmetrici rispetto all'asse x , l'integrale generale dell'equazione di LAGRANGE contiene i soli termini che hanno carattere di simmetria, ossia è

$$(13) \quad w = w_0 + \sum_n \left(A_n \cosh \frac{2n\pi y}{a} + B_n \frac{2n\pi y}{a} \sinh \frac{2n\pi y}{a} \right) \cos \frac{2n\pi x}{a},$$

$$(n = 1, 2, 3, \dots).$$

Le due costanti A_n e B_n sono determinate dalle due condizioni ai limiti già accennate.

Dalla prima (rotazione nulla lungo i lati paralleli all'asse x , cioè per $y = b/2$) risulta, ponendo $\varphi_n = n\pi b/(2a)$,

$$B_n = -A_n \frac{\operatorname{tgh} 2\varphi_n}{2\varphi_n + \operatorname{tgh} 2\varphi_n}.$$

Dalla seconda [il taglio lungo i due lati paralleli all'asse x deve essere uguale alla metà del carico rappresentato nella forma (12), cioè con una serie trigonometrica] si ottiene:

$$\frac{8B}{a_n^3} \{ (A_n + 3B_n) \sinh 2\varphi_n + B_n 2\varphi_n \cosh 2\varphi_n \} = q.$$

Risolvendo risulta

$$(14) \quad A_n = -\frac{qa^3}{B} \frac{2\varphi_n + \operatorname{tgh} 2\varphi_n}{16n^2\pi^3 \sinh 2\varphi_n \operatorname{tgh} 2\varphi_n}, \quad B_n = \frac{qa^3}{B} \frac{1}{16n^2\pi^3 \sinh 2\varphi_n}.$$

La costante w_0 è infine determinata dalla condizione che si abbia $w = 0$, per $x = 0$ e $y = b/2$, quindi vale:

$$(15) \quad w_0 = \frac{qa^3}{B} \sum_n \frac{1}{16\pi^3 n^3} \left(-2\varphi_n + \frac{2\varphi_n + \operatorname{tgh} 2\varphi_n}{\operatorname{tgh}^2 2\varphi_n} \right).$$

Dalla relazione (13), nella quale le costanti hanno le espressioni (14) e (15), mediante derivazione si ottengono le quantità richieste.

Per una lastra quadrata, avente $\nu = 0$, nei punti B , C , O si ha

$$f = 0,003196 qa^3/B,$$

$$(m_x)_O = 0,0276 qa, \quad (m_y)_O = -0,0141 qa,$$

$$(m_x)_B = 0,0573 qa, \quad (m_y)_B = 0,0536 qa,$$

$$(m_x)_C = 0,0298 qa, \quad (m_y)_C = -0,0157 qa.$$

6. - Quando il carico q è distribuito lungo tutto il contorno, la soluzione si ottiene ancora facilmente impiegando due volte la (13); una volta per la lastra sottoposta al carico solamente lungo i due lati paralleli all'asse x e una seconda per la lastra sottoposta al carico lungo i due rimanenti lati.

Si sovrappongono poi gli effetti ottenuti nelle due condizioni di carico parziale.

Ad esempio, se la lastra è quadrata e se $\nu = 0$, si ha

$$f = 0,006392 qa^3/B,$$

$$(m_x)_O = (m_y)_O = 0,0135 qa, \quad (m_x)_B = (m_y)_C = 0,0416 qa, \quad (m_y)_B = 0,0834 qa.$$

7. - Esaminiamo una seconda condizione di carico.

Sia dato un solaio a fungo sottoposto a un carico concentrato nel punto di mezzo dei lati paralleli all'asse x .

Anche questa condizione di carico si studia facilmente.

Al solito, isolato un campo, il carico lungo i due bordi paralleli all'asse x è costituito dai carichi P concentrati e dalle reazioni (uguali a P) dimezzati: pertanto può ancora essere rappresentato con una serie trigonometrica, e si ottiene:

$$-\frac{2P}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \cos \frac{2(2k+1)\pi x}{a}.$$

Quindi le relazioni ottenute per il carico uniforme q sono ancora valide purchè si sostituisca $2P/a$ a q .

Ad esempio, per una lastra quadrata e per $\nu = 0$, si ottiene,

$$f = 0,0058 Pa^2/B, \quad (m_x)_O = 0,0573 P, \quad (m_y)_O = -0,0298 P.$$

Una immediata verifica dei calcoli e delle formule si ha considerando che (per il teorema di MAXWELL) l'abbassamento f nel centro O per effetto della forza in B coincide con l'abbassamento del punto B per effetto del carico in O ⁽¹⁰⁾.

Se i carichi sono applicati anche nei punti di mezzo dei lati paralleli all'asse y , si procede come è stato detto nel n. 6.

Infine, ogni altra condizione di carico, che rientri nelle ipotesi fatte, si studia in modo del tutto analogo a quello seguito nei paragrafi precedenti.

Università di Bologna, Istituto di Scienza delle Costruzioni.

⁽¹⁰⁾ Si veda la pag. 81 dell'Opera citata in ⁽¹⁾.

