ETTORE CARRUCCIO (*)

La Matematica nel pensiero di CARTESIO. (**)

A chi vuol rievocare, nel terzo centenario della morte di DESCARTES la sua opera matematica, legata da vitali e inscindibili relazioni al suo pensiero filosofico, si presenta una questione preliminare da risolvere: dato che il significato del termine « Matematica » si è andato evolvendo attraverso i secoli della Storia della Scienza, occorre precisare qual'è la concezione della Matematica adottata dal nostro Autore.

La precisazione cercata già si trova nel *Discours de la methode* (1) e viene formulata nelle *Regulae ad directionem ingenii* (2); secondo DESCARTES si riferiscono alla Matematica soltanto tutte quelle speculazioni nelle quali si prende in esame l'ordine o la misura, astrazion fatta dagli oggetti che vengono ordinati o sui quali tali misure vengono eseguite.

(*) Indirizzo: Via P. Gaddi, 4; Modena (Italia).

(**) Il presente Articolo riproduce in sostanza una Conferenza tenuta nel marzo 1950 a Torino, alla Sezione Piemontese della Società Filosofica Italiana, e successivamente alla Università di Roma e al Corso di Perfezionamento in Matematica e Fisica della Università di Bologna. – Questo Articolo è stato ricevuto per la stampa il 25-IV-1950.

(1) « Mais ie n'eu pas dessein, pour cela, de tascher d'apprendre toutes ces sciences particulieres, qu'on nomme communement Mathematiques; et voyant qu'encore que leurs obiets soient differens, elles ne laissent pas de s'accorder toutes, en ce qu'elles n'y considerent autre chose que les divers rappors ou proportions qui s'y trouvent, ie pensay qu'il valoit mieux que i'examinasse seulement ces proportions en general... ». Cfr. *Oeuvres* de DESCARTES publiées par CH. ADAM et P. TANNERY, Paris 1894-1913, vol. VI, pp. 19-20. Le citazioni di tale edizione delle opere di DESCARTES verranno date mediante la sigla A.T. seguita dal Volume e dalle pagine relative. Seguiamo l'ortografia adottata nell'edizione predetta (diversa da quella del francese contemporaneo). La prima edizione del *Discours de la methode* è del 1637.

(2) « Quod attentius consideranti tandem innotuit, illa omnia tantum, in quibus ordo vel mensura examinatur, ad Mathesim referri, nec interesse utrum in numeris, vel figuris, vel astris, vel sonis aliove quovis objecto, talis mensura querenda sit, ac proinde generalem quandam esse debere scientiam, quae id omne explicet, quod circa ordinem et mensuram nulli speciali materiae addictam quaeri potest, eamdemque, non ascititio vocabulo, sed jam inveterato atque usu recepto, Mathesim universalem nominari quoniam in hac continetur illud omne, propter quod aliae scientiae Mathematicae partes appellantur » (A.T. X, 377-378).

Sorge ora la questione: questa concezione che riconduce la Matematica allo studio dei rapporti e delle misure, quindi in sostanza dei numeri, e che conduce a considerare anche la geometria sotto l'aspetto numerico, coincide o si differenzia con la visione della Matematica classica?

Se noi risaliamo alle origini della sistemazione razionale della Matematica nel mondo ellenico, nella Scuola Pitagorica, ivi troviamo una posizione concettuale analoga a quella indicata.

Come ARISTOTELE riferisce nella Metafisica, secondo i Pitagorici «i numeri costituiscono gli elementi di tutte le cose». Interpretando questa affermazione nel modo che appare più probabile, come sostenne validamente l'ENRIQUES [3], il numero non deve qui intendersi in astratto, ma in concreto, come aggregato di unità, monadi, punti (non ancora pensati come inestesi). Le ricerche dei Pitagorici sui numeri figurati (triangolari, quadrati, piramidali, etc.) confermano l'interpretazione data, che conduce la nostra mente ad una teoria monadica, la quale nonostante i suoi difetti, favoriva nelle menti una sintesi dell'aritmetica e della geometria.

Più di venti secoli dopo l'epoca dei primi Pitagorici, DESCARTES, il sommo artefice della sintesi dell'algebra e della geometria, meditava sui numeri figurati, come risulta da un suo scritto che verosimilmente risale a quell'inverno 1619-1620 durante il quale il nostro Filosofo vide, come alla luce di un lampo, la sua via da percorrere nel mondo del pensiero, e gettò le basi della geometria analitica [4].

Ma per vedere nel modo più rapido per quali vie si giunge storicamente alla posizione concettuale di DESCARTES nei riguardi della Matematica, ritorniamo, ancora per un momento all'antica teoria pitagorica secondo la quale ogni segmento doveva essere costituito da punti-monadi. Tutti i segmenti avrebbero dovuto ammettere la monade come summultiplo comune, non avrebbero dovuto esistere segmenti incommensurabili. Ma una scoperta sconcertante, altamente significativa dal punto di vista concettuale, quella dell'esistenza delle grandezze incommensurabili, che comprometteva le basi della teoria monadica, venne compiuta proprio in seno alla scuola pitagorica generando ivi profondo sgomento, di cui giunge ancora a noi l'eco attraverso un suggestivo scolio al X libro di EUCLIDE [5].

Questa scoperta impose una revisione della primitiva teoria delle propor-

---

[3] Cfr. per es., F. ENRIQUES, *L'evoluzione delle idee geometriche nel pensiero greco: punto, linea e superficie.* «Questioni riguardanti le Matematiche elementari», raccolte e coordinate da F. ENRIQUES, parte I, vol. I, Zanichelli, Bologna 1924, p. 13.

[4] Cfr. G. MILHAUD, *L'oeuvre de* DESCARTES *pendant l'hiver 1619-1620*, Scientia, 1918, I, II, p. 87. Sullo sviluppo storico della geometria analitica v. E. BORTOLOTTI, *Lezioni di geometria analitica*, Bologna 1923, Introduzione storica, pp. IX-XXXIX.

[5] Cfr. EUCLIDIS, *Elementa*, ed. Heiberg, vol. V, Lipsia 1888, p. 417.

zioni tra segmenti, degli antichi Pitagorici, e condusse, attraverso un affinamento dei concetti fondamentali della geometria (critica eleatica) ad una sistemazione razionale della teoria geometrica delle proporzioni fra grandezze che si attribuisce ad EUDOSSO da Cnido [6], e che poi fu accolta nel 5° libro degli Elementi di EUCLIDE.

In assenza di una teoria puramente numerica dei rapporti di grandezze incommensurabili che venne costruita molto più tardi, i matematici greci videro nella geometria una dottrina più generale della teoria dei numeri, e vennero condotti a vedere la Matematica prevalentemente sotto l'aspetto geometrico.

Ad esempio i problemi di secondo grado, che i matematici moderni preferiscono risolvere algebricamente, vengono risolti da EUCLIDE mediante costruzioni geometriche.

Non dobbiamo meravigliarci se la sistemazione euclidea della Matematica effettuata secondo i canoni della Scienza alessandrina non andò a genio a DESCARTES. Ecco quanto ci dice uno dei suoi primi biografi [7]: « Pour ce qui est d'EUCLIDE, il n'estimoit pas beaucoup ses Elémens, parce qu'il ne croyoit pas qu'ils donnassent assez d'ouverture à l'esprit pour faire de grands progrez dans la Géométrie. Il disoit que, si la XLVII proposition du prémier livre de ce Géométre avoit coûté une hécatombe entiére, c'est à dire, un sacrifice de cent bœufs immoléz aux Dieux pour les remercier de cette découverte, tous les animaux de la terre n'auroient pas suffi pour le sacrifice qu'on auroit dû faire en action de grace pour les belles découvertes qu'on a pû faire depuis sur de meilleurs principes ».

Inoltre appare estranea alla mentalità di DESCARTES l'opera di ARCHIMEDE, in quanto i procedimenti infinitesimali del sommo siracusano in cui i risultati venivano rigorosamente sistemati, ma nascondendo piuttosto che rivelando i procedimenti euristici, non erano conformi alle aspirazioni intellettuali del Nostro, mentre il suo atteggiamento nei riguardi dell'infinito matematico lo allontanava dall'intuizione dei metodi euristici archimedei che vennero invece divinati e rinnovati dai suoi contemporanei CAVALIERI e TORRICELLI. Nelle opere di DESCARTES non troviamo ricordato STRABONE che con le sue coordinate geografiche può considerarsi un precursore della geometria analitica. I matematici dell'antichità più stimati da DESCARTES furono APOLLONIO, PAPPO e DIOFANTO [8]. Queste preferenze si spiegano agevolmente.

APOLLONIO stabiliva proprietà caratteristiche delle coniche espresse sotto

---

(6) Cfr. F. ENRIQUES, loc. cit. in (3), (cfr. p. 24).

(7) Cfr. A. BAILLET, *La vie de Monsieur Des Cartes*, 1691, t. II, pp. 481-482; riportato in A.T. X, 481.

(8) Cfr. A. BAILLET, loc. cit. in (7).

forma geometrica, le quali proprietà si prestano ad essere immediatamente tradotte in equazioni cartesiane.

L'opera di PAPPO, pur essendo stata composta in un periodo di decadenza della scienza classica (o forse proprio per questo), contiene spunti, idee, risultati che troveranno la loro sistemazione in teorie organiche nella Matematica moderna: basta ricordare che PAPPO tratta dell'invariabilità per proiezioni e sezioni del birapporto di quattro elementi di una forma di prima specie, delle proprietà armoniche del quadrangolo completo, del caso particolare del teorema di PASCAL sulle coniche, nel caso in cui queste degenerano in due rette e così via. Del cosidetto problema di PAPPO, parleremo in seguito.

Con DIOFANTO, fiorito verso il 300 d. C., si manifesta uno spostamento dell'interesse matematico dalla geometria alla Teoria dei numeri secondo un ordine d'idee che attirava particolarmente DESCARTES (9).

Ma un'affermazione di carattere generale riguardante la riduzione della Matematica alla considerazione dei numeri si trova in un passo del *De Ordine* di S. AGOSTINO (10), che presenta una forte analogia con il punto di vista di DESCARTES sull'argomento.

La preparazione degli elementi che hanno reso possibile l'opera di DESCARTES avviene poi con lo sviluppo dell'algebra, promosso dagli arabi con una traduzione in termini numerici delle costruzioni geometriche euclidee, trasmesso all'occidente e perfezionato da LEONARDO PISANO, giunto a notevole perfezione con l'opera degli algebristi italiani del Rinascimento cui dobbiamo la risoluzione delle equazioni di 3° e 4° grado: DESCARTES cita più di una volta nei suoi scritti la regola di CARDANO (11).

Non ci risulta invece che la concezione delle coordinate che in qualche modo si affaccia insieme con l'introduzione degli esponenti frazionari negli scritti di NICOLA ORESME, vescovo di Lisieux (1323-1382) (12) abbia influito sull'opera di DESCARTES.

Su MARINO GHETALDI (APOLLONIUS redivivus, 1566-1626), che viene anche ricordato tra i precursori della geometria analitica, troviamo nelle opere di DESCARTES soltanto un breve cenno che non testimonia un'influenza di pensiero (13).

---

(9) Sui risultati di DESCARTES nel campo della Teoria dei numeri, vedansi i passi citati in A.T. XIII, 87, sotto « nombres ». In particolare per i risultati sui numeri perfetti cfr. A.T. II, 429-430.

(10) « Hinc [ratio] est profecta in oculorum opes et terram coelumque collustrans sensit nihil aliud quam pulchritudinem sibi placere et in pulchritudine figuras in figuris dimensiones, in dimensionibus numeros ». (S. AUGUSTINI, *De Ordinè*, lib. II, cap. XV, 42, ed. Migne, Parigi 1877, t. I, col. 1014).

(11) A.T. III, 190; A.T. VI, 471 (Geometrie, Livre III).

(12) F. ENRIQUES, *Le matematiche nella storia e nella cultura*, Zanichelli, Bologna 1938, p. 29.

(13) A.T. I, 478.

DESCARTES conobbe gli scritti algebrici di VIETA, tuttavia in una lettera a MERSENNE della fine del dicembre 1637 sulla *Geometrie* (14), osservando di aver iniziati i suoi risultati sulle radici delle equazioni dove VIETA termina, dice di aver fatto ciò senza pensarci « car, egli dice, i'ay plus feuilleté VIETA depuis que i'ay receu vostre derniere que ie n'avois iamais fait auparavant.... et entre nous ie ne trouve pas qu'il en ait tant sceu que ie ne pensois, nonobstant qu'il fust fort habile ».

I tempi di DESCARTES erano ormai maturi per un'applicazione dell'algebra alla geometria la quale riguardasse non soltanto le dimensioni delle figure, ma anche le posizioni dei punti, e risolvesse i problemi relativi con quella generalità, semplicità e potenza di metodi caratteristiche dell'algebra, giunta ormai ad un notevole grado di sviluppo. Infatti l'*Isagoge ad locos planos et solidos* di P. FERMAT, pubblicata postuma nel 1674 dopo la Geometria di DESCARTES, ma divulgata prima in una cerchia di amici, contiene i princìpi fondamentali della geometria analitica: la corrispondenza tra punti del piano e coppie di numeri mediante un sistema di assi coordinati, e le equazioni della retta e delle coniche (15).

Tuttavia la *Geometrie* di DESCARTES che ora esamineremo più particolarmente presenta maggiore interesse filosofico dell'*Isagoge* di FERMAT; in quanto mentre in questa l'algebra interviene soltanto a titolo di aiuto della geometria (16), nella prima si afferma il primato logico del numero sul mondo geometrico (17) capovolgendo, come si è visto, la concezione classica.

Ma a quali esigenze filosofiche rispondeva il primato dell'analisi numerica, sulla Geometria?

Innanzi tutto alla sete cartesiana d'idee chiare e distinte: DESCARTES ritiene che i concetti dei numeri e delle operazioni su di essi siano più semplici delle nozioni geometriche e perciò logicamente le precedano (18).

A questo proposito egli scrive a DESARGUES: « .... il y a bien plus de gens qui sçavent ce que c'est la Multiplication, qu'il n'y en a qui sçavent ce que c'est que composition de raisons etc. » (19).

L'esigenza alla quale abbiamo accennato dipende dal primo dei 4 precetti con cui DESCARTES nel *Discours de la methode* sostituisce « ce gran nombre de preceptes dont la Logique est composée » (20).

---

(14) A.T. I, 479-480.

(15) *Oeuvres* de FERMAT, ed. P. TANNERY-C. HENRY, t. I, 1891, p. 92.

(16) Cfr. P. BOUTROUX, *L'ideal scientifique des Mathématiciens*, Alcan, Paris 1920, pp. 105-109.

(17) F. ENRIQUES, loc. cit. in (12), cfr. pp. 43-44.

(18) F. ENRIQUES, loc. cit. in (12), cfr. p. 44.

(19) Lettera del 16 giugno 1639; A.T. I, 555.

(20) A.T. VI, 18.

Si tratta del precetto dell'evidenza, dell'intuizione, delle idee chiare e distinte, il quale non soltanto si oppone al principio di autorità per l'ammissione degli assiomi fondamentali, ma afferma che anche la deduzione non viene effettuata secondo le regole di una logica formale ma mediante una successione di atti d'intuizione (21). Ciò spiega perchè Descartes, mentre respinge la logica tradizionale « syllogismorum formae nihil juvant ad rerum veritatem percipiendam » (22), non le sostituisce precise regole per dedurre, come sono ad esempio quelle della logica matematica contemporanea (regola di sostituzione e schema di conclusione) (23), ma si limita a dare norme generali come quelle contenute nel *Discours de la methode* e nelle *Regulae ad directionem ingenii*.

Questo punto di vista di Descartes è particolarmente interessante, anche se, anzi proprio perchè, appare lontano dalla mentalità logico-matematica contemporanea. Non dobbiamo però credere che tra i pensatori matematici del nostro tempo non si trovi talora efficacemente riaffermato il valore dell'intuizione di fronte all'applicazione di un sistema di regole logiche. Basta pensare al discorso del prof. Francesco Severi sul tema « Intuizionismo e astrattismo nella Matematica contemporanea » (24).

Ma qual'è il significato filosofico dell'evidenza di Descartes?

A questo proposito il prof. Pastore riconosce nell'evidenza di Descartes non « la semplice evidenza » ma « l'intuizione logica dell'elemento formale dello sviluppo del discorso » quale viene distinta da altre forme d'intuizione nella Logica del Potenziamento (25).

Vi è poi un altro motivo più sottile nella filosofia cartesiana per ricondurre, per quanto è possibile, la geometria all'algebra: l'irriducibile eterogeneità della *res extensa* e della *res cogitans*. Si pone quindi il problema: come può l'estensione venir pensata?

La questione, fino a un certo punto, si risolve, osservando con il Brunschvicg (26) che Descartes, interpretando mediante relazioni fra numeri le

---

(21) G. Milhaud, loc. cit. in (4), cfr. p. 2: « At vero haec intuitus evidentia et certitudo, non ad solas enuntiationes sed etiam ad quoslibet discursus requiritur » (A.T. X, 369).

(22) Cfr. *Regulae ad directionem ingenii*, Regula XIV, A.T. X, 439-440.

(23) Cfr. per es. D. Hilbert und W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, Springer, Berlin 1928, p. 23.

(24) Atti 3° Congresso Un. Mat. It. (Pisa, settem. 1948), Cremonese, Roma 1951, pp. 27-40.

(25) Per più ampie notizie sull'argomento cfr. A. Pastore, *La Logica del potenziamento*, Rondinella, Napoli 1936, articolo: *Novità sulla logica di* Descartes, pp. 205-219.

(26) L. Brunschvicg, *Les étapes de la philosophie mathématique*, Alcan, Paris 1912, p. 123. Di parere contrario a quello del Bruschvicg è J. Laporte, nell'opera *Le rationalisme de* Descartes, Presses univ. de France, Paris 1945, pp. 126-128.

relazioni geometriche svincola la Matematica dell'osservazione degli oggetti sensibili e dall'immaginazione delle figure; per lui la nozione di quantità non è più astratta mediante l'uso dei sensi, ma è divenuta di carattere puramente intellettuale. Esiste un «Calcul de M. DESCARTES» rimasto incompleto che mira a costruire un'algebra astratta senza ricorrere a rappresentazioni geometriche.

Veramente però DESCARTES non ha eliminato completamente l'immaginazione dalla sua *Geometrie*, mettendo in luce la corrispondenza tra le quantità x, x^2, x^3 e determinati segmenti (non più segmenti, superficie solidi come per gli antichi); ma il passo decisivo per il quale la Geometria cartesiana non è più semplicemente applicazione dell'algebra alla geometria, ma vera e propria riduzione della geometria all'algebra, verrà fatto, secondo il BRUNSCHVICG, da MALEBRANCHE [27].

Contro questa concezione muove la critica di LEIBNIZ, il quale nota che le equazioni non hanno di per sè significato geometrico: occorre una traduzione per applicarle alle relazioni spaziali, per esempio dicendo che $x^2+y^2=a^2$ è l'equazione di un cerchio, occorre spiegare il significato di x e y nella figura, etc. [28].

La conclusione di LEIBNIZ sarà che «la synthese des Geometres n'a pu estre changé encor en analyse.... On s'etonnera peut-être de ce que je dis icy, mais il faut savoir que [l'algebre], l'analyse de VIETE et DESCARTES est plus tost l'analyse des nombres que des lignes, quoy qu'on y reduise la geometrie indirectement, en tant que toutes les grandeurs peuvent estre exprimees par nombres» [29].

La difficoltà inerente nel problema della pensabilità dell'estensione nella filosofia cartesiana si collega con la misteriosa relazione fra anima e corpo [30]. Su questo terreno è stato tentato un superamento della difficoltà: l'anima a contatto con il corpo ricaverebbe direttamente da questo la nozione di estensione [31]. Questa unione sostanziale dell'anima con il corpo rappresenta nella filosofia di DESCARTES un elemento irrazionale riconosciuto dallo stesso filosofo [32].

([27]) L. BRUNSCHVICG, loc. cit. in ([26]), p. 132. È di parere diverso J. LAPORTE, loc. cit. in ([26]), cfr. p. 127.

([28]) Lettre à HUYGENS, Gerhardt, Math. Schr. II, 30. *Briefwechsel*, ed. Gerhardt, I, 580; L. BRUNSCHVICG, loc. cit. in ([26]), p. 133.

([29]) *Opusc. et fragm. inédites* de LEIBNIZ, édit. Louis Couturat, Alcan, Paris 1903, p. 181.

([30]) Cfr. L. BRUNSCHVIGG, loc. cit. in ([26]) (pp. 128-129).

([31]) Cfr. J. LAPORTE, *La connaissance de l'étendue chez* DESCARTES in CH. ADAM, ..., J. WAHL, *Descartes*, Paris, 1937, pp. 257-289.

([32]) Cfr. A.T. III, 693; cfr. J. LAPORTE, loc. cit. in ([31]).

Tuttavia sul terreno logico matematico guidati dal pensiero cartesiano si giunge al risultato seguente: le relazioni logiche della geometria si traducono in relazioni analitiche: per es. l'appartenenza di un punto ad una retta si traduce nella condizione che due numeri (coordinate del punto) soddisfino ad un'equazione, di primo grado in due variabili e così via.

Pertanto quando, in seguito, lo sviluppo del pensiero matematico moderno giunse alla concezione di una teoria matematica come sistema ipotetico deduttivo basato su postulati arbitrari dal punto di vista strettamente logico, e si pose quindi il problema della non contradittorietà dei postulati di una geometria, per esempio l'euclidea, la geometria analitica fondata da DESCARTES ci permetterà di ricondurre la non contradittorietà di detta geometria a quella dell'analisi [33].

È questo uno dei più importanti risultati di cui siamo debitori all'indirizzo cartesiano del pensiero matematico.

Il primo passo da compiere sulla via della costruzione della « Mathesis universalis » secondo i criteri sopra esposti, consisteva nella riforma del simbolismo algebrico per renderlo chiaro, ed espressivo.

DESCARTES critica nel *Discours de la methode* il simbolismo algebrico in uso prima di lui: « on s'est tellement assuieti... à certaines reigles et a certains chiffres, qu'on en a fait un art confus et obscur, qui embarasse l'esprit, au lieu d'une science qui le cultive » [34].

Per esempio, l'incognita (radice), il suo quadrato e il suo cubo vengono rappresentati rispettivamente così

$$R, \quad Q, \quad C$$

oppure con i caratteri cossici avremo rispettivamente

$$\mathcal{R}, \quad \mathfrak{Z}, \quad \mathcal{C}$$

di cui si serviva ancora DESCARTES nel 1619.

Questi caratteri non esprimevano chiaramente le operazioni eseguite sull'incognita per ottenere il quadrato e il cubo, nè si prestavano per eseguire facilmente i calcoli algebrici.

DESCARTES sostituisce i numeri con le lettere, allo scopo di rendere chiare le operazioni eseguite su queste ultime (a, b, c per le quantità note, A, B, C per le incognite, più tardi sostituite dallo stesso DESCARTES con x, y, z). Le

---

[33] Cfr. per es. E. CARRUCCIO, *Recenti sviluppi della logica matematica*... (Atti del Convegno di Pisa 23-27 settembre 1948, a cura del Ministero della P. I., Città di Castello 1949), specialmente n. 5.

[34] Cfr. A.T. VI, 18.

successive potenze di una data quantità x vengono rappresentate mediante detta quantità presa come base e i relativi esponenti, secondo l'uso attuale

$$x\,, \quad x^2\,, \quad x^3\,, \dots .$$

Quindi il polinomio in caratteri cossici

$$\mathcal{P}1\mathcal{N}\,.\,\mathcal{P}4\mathcal{Z}\,.\,\mathcal{M}7\mathcal{C}$$

diventa secondo il simbolismo di Descartes (che è anche il nostro):

$$x + 4x^2 - 7x^3 \quad (^{35}).$$

Ma Descartes nel campo dell'algebra non si è limitato a darci un simbolismo adeguato, lucido, maneggevole e potente, ma ci ha anche lasciato importanti risultati sulle radici delle equazioni algebriche, raccolti specialmente nel libro III della sua *Geometrie*: ricordiamo, in particolare, il metodo per abbassare il grado di un'equazione di cui si conosce una radice, il modo di far sparire il termine di grado $n-1$ in un'equazione di grado n, e sopratutto il celebre teorema di Cartesio sul segno delle radici di un'equazione algebrica di grado n, con coefficienti e radici reali. Dice Descartes [36]:

« On connoit aussy, de cecy, combien il peut y avoir de vrayes racines, et combien de fausses, en chasque Equation. A sçavoir: il y en peut avoir autant de vrayes que les signes + et — s'y trouvent de fois estre changés; et autant de fausses qu'il s'y trouve de fois deux signes +, ou deux signes —, qui s'entresuivent ».

Un altro passo essenziale sulla via della costruzione della geometria analitica è costituita dalla rappresentazione di una qualsiasi proporzione mediante una proporzione fra segmenti espressi mediante simboli « chiffres ». Questo concetto che verrà applicato sistematicamente nella *Geometrie* viene già espresso nel *Discours de la methode* dove a proposito delle proporzioni si dice [37]: « Puis, ayant pris garde que, pour les connoistre, i'aurais quelque fois besoin de les considerer chascune en particulier, et quelque fois seulement de les retenir, ou de les comprendre plusieurs ensemble, ie pensay que, pour les considerer mieux en particulier, ie les devois supposer en des lignes, a cause que ie ne trouvois rien de plus simples, ny que ie pûsse plus distinctement representer a mon imagination et a mes sens; mais que, pour les retenir, ou les comprendre plusieurs ensemble, il fallait que ie les expliquasse par quelques chiffres, les plus courts qu'il serait possible; et que, par ce moyen, i'emprenterois tout le

---

[35] Cfr. C. Adam, *Vie et Oeuvres de Descartes*, A.T. XII, 53.
[36] A.T. VI, 446.
[37] A.T. VI, 20.

meilleur de l'Analyse geometrique et de l'Algebre, et corrigerois tous les defaus de l'une par l'autre ».

Nella *Geometrie*, introducendo il segmento unità di misura, come era stato già fatto da LEONARDO PISANO (38) e da RAFAEL BOMBELLI (39), troviamo le costruzioni geometriche delle espressioni algebriche interpretate come relazioni tra segmenti. Cioè, essendo ad esempio a la misura di un segmento, a^2 e a^3 venivano rappresentati non come aree o volumi secondo l'uso degli antichi, ma ancora come segmenti (40).

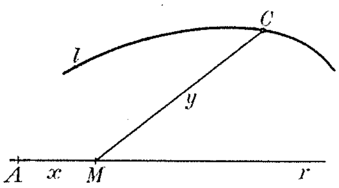

Fig. 1.

Notiamo che la rappresentazione di tutte le espressioni algebriche mediante linee era necessaria a DESCARTES in quanto egli non possedeva ancora il principio di continuità, senza il quale l'esistenza di una grandezza doveva essere garantita da una costruzione, mentre per noi l'esistenza matematica di una grandezza può essere assicurata da una veduta di continuità (41): si pensi ad esempio alla terza parte di un angolo, di cui ammettiamo l'esistenza, anche a prescindere dalla sua effettiva costruzione.

Su queste basi DESCARTES costruisce il suo mondo geometrico. Per rappresentare mediante un'equazione le proprietà che caratterizzano una determinata curva piana l (v. fig. 1), egli considera una retta r sulla quale si prende un punto A come origine delle lunghezze misurate sulla retta stessa. Conduciamo per un punto generico C della curva l una retta secondo una direzione fissa; questa incontrerà la retta r in un punto M, se indichiamo la misura di AM con x e la misura di MC con y, la curva sarà caratterizzata da un'equazione nelle variabili x ed y.

Nella *Geometrie* non si studia sistematicamente l'equazione della retta, ma quando s'incontra un'equazione di primo grado in x ed y si riconosce che si tratta dell'equazione di una retta.

La retta AM che funziona da asse delle ascisse, in genere viene scelta in base a considerazioni intrinseche alla curva da rappresentare.

Dopo di aver considerato le rette e le coniche rappresentate rispettivamente dalle equazioni di 1° e di 2° grado, DESCARTES prosegue definendo le curve di ordine superiore, classificandole a partire dal grado della loro equa-

(38) Cfr. LEONARDO PISANO, *Practica Geometriae* (scritta nel 1220), edita a cura di B. BONCOMPAGNI, Roma 1862, pp. 153-155.

(39) L'*Algebra*, opera di RAFAEL BOMBELLI, pubblicata a cura di E. BORTOLOTTI, Bologna 1929, p. 19. Ivi si mostra che anche nelle operazioni sui segmenti BOMBELLI precorre CARTESIO.

(40) A.T. VI, 369-371, 442-444.

(41) Cfr. MILHAUD, loc. cit. in (4), pp. 7-8.

zione. Sorge così un mondo geometrico illimitato in virtù della semplice applicazione del meccanismo algebrico; la geometria si presenta in base al metodo considerato non più come una realtà da contemplare quale era per gli antichi, ma come un mondo da costruire con l'attività dello Spirito a partire da elementi più semplici; lo scienziato ha di mira non tanto una raccolta di risultati quanto la costituzione di un metodo ([42]).

DESCARTES accetta la costruzione delle curve mediante determinati strumenti meccanici, osservando tra l'altro che anche la retta e la circonferenza vengono descritte mediante strumenti, la riga e il compasso, pertanto non vi è motivo di respingere l'uso di strumenti atti a descrivere curve d'ordine superiore ([43]).

Tuttavia DESCARTES non spinge al di là di ogni limite la sua generalizzaeione, in quanto esclude dal suo mondo geometrico certe curve come le spirali, la quadratrice d'IPPIA e simili ([44]) « à cause qu'on les imagine descrites par deux mouvemens separés et qui n'ont entre eux aucun rapport qu'on puisse mesurer exactement ». Le curve sopra indicate, che DESCARTES non accetta nella sua geometria, sono trascendenti. Così le funzioni trascendenti: trigonometriche, esponenziali, logaritmiche, ecc., non vengono accolte nell'analisi di DESCARTES, ciò che contribuisce a trattenere il nostro matematico sulla soglia del calcolo infinitesimale ([45]).

Nel libro III della *Geometrie* vengono risolte mediante intersezioni di curve le equazioni di 3º, 4º, 5º, 6º grado e si trattano i problemi classici della duplicazione del cubo e della trisezione dell'angolo, ai quali si possono ricondurre tutti i problemi di 3º grado ([46]).

DESCARTES ha intuito l'impossibilità di risolvere mediante la riga e il compasso i problemi che conducono ad un'equazione di 3º grado irriducibile nel campo di razionalità dei coefficienti, insieme con altre impossibilità dello stesso genere: i risultati sull'argomento verranno poi dimostrati nello spirito della geometria cartesiana ([47]).

Nella sua *Geometrie* DESCARTES affronta con successo un problema che era stato posto ma non risolto in generale dagli antichi. Si tratta del cosidetto problema di PAPPO, che si può enunciare nel modo seguente:

([42]) *Geometrie*, Lib. II (A.T. VI, specialmente pp. 392-393); P. BOUTROUX, loc. cit. in ([16]), cfr. pp. 104-109; E. BOMPIANI, *Che cosa contiene la « Géométrie » di* CARTESIO. Period. Mat. (4) 1, 313-325 (1921).

([43]) A.T. VI, 389-390.

([44]) A.T. VI, 390.

([45]) Cfr. G. VACCA, *Descartes* (parte matematica), art. dell'Enciclopedia Italiana Treccani.

([46]) A.T. VI, 469-473. Cfr. anche A. CONTI, *Problemi di terzo grado* (F. ENRIQUES, *Questioni*... op. cit. in ([3]), parte II, Bologna 1926, pp. 335-336 e 385-386).

([47]) A.T., VI, 475-476; cfr. E. BOMPIANI, op. cit. in ([42]).

Siano date in un piano $2n$ rette (v. fig. 2). Conduciamo per un punto P altre $2n$ rette che formino angoli assegnati uguali fra loro con le rette date. Siano $H_1, H_2, ..., H_{2n}$ i vertici di detti angoli. Si deve trovare il luogo geometrico del punto P scelto in modo che si abbia, tra prodotti di misure di segmenti, l'uguaglianza

$$PH_1 \dots PH_n = PH_{n+1} \dots PH_{2n} .$$

Nel caso in cui le rette date sono in numero dispari $2n-1$ si sostituisce uno dei segmenti $PH_1, ..., PH_{2n}$ con un segmento dato.

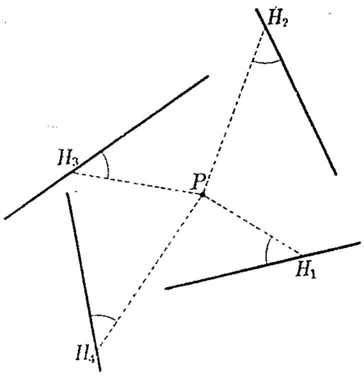

Fig. 2.

Il problema nel caso di 3 oppure 4 rette, che presumibilmente è stato posto e risolto in parte da ARISTEO, secondo la testimonianza di APOLLONIO e di PAPPO, è stato trattato da EUCLIDE ed in modo più completo da APOLLONIO. Ma il problema considerato non era stato risolto in generale dagli antichi.

DESCARTES dà prova della potenza del suo metodo dando la soluzione generale del problema, riconoscendo la natura algebrica della curva luogo geometrico del punto P, stabilendo il grado della relativa equazione, grado definito però in modo diverso da quello usato attualmente (48).

Esaminiamo ora il contributo recato da DESCARTES allo sviluppo del calcolo infinitesimale: troviamo nella *Geometrie* un cenno sulla possibilità di determinare l'area racchiusa da una curva di data equazione (49), mentre invece viene ivi erroneamente dichiarata impossibile la rettificazione di una curva (50). Il primo successo in questo campo è dovuto ad EVANGELISTA TORRICELLI che rettificò l'arco di spirale logaritmica con un'operazione eseguibile con riga e compasso (51).

Affrontando la questione dell'angolo di due curve piane, DESCARTES passa

---

(48) A.T. VI, 377-387 e 396-411. Cfr. anche Nota di P. TANNERY, A.T. VI, 721-725. DESCARTES chiama di ordine n quelle curve che noi chiamiamo d'ordine $2n$ oppure $2n-1$.

(49) A.T. VI, 413.

(50) A.T. VI, 412.

(51) Cfr. E. TORRICELLI, *Opere*, Faenza 1919, vol. I, parte 2ª, pp. 349-376; A. AGOSTINI, *La memoria di* EVANGELISTA TORRICELLI *sopra la spirale logaritmica riordinata e completata*, (Pubblicazioni scientifiche a cura dell'Accademia Navale, Livorno, settembre 1949).

a considerare le loro tangenti e quindi le normali ad esse, concentrando quindi la sua attenzione su questo problema, a proposito del quale si esprime così [52]: « i'ose dire que c'est ceci le plus utile et le plus generale, non seulement que ie sçache, mais mesme que i'aye iamais desiré de sçavoir en Geometrie ».

DESCARTES risolve completamente per le curve algebriche il problema della costruzione della normale, dalla soluzione del quale deriva in modo immediato la costruzione della tangente. Il procedimento cartesiano dal punto di vista geometrico è il seguente:

Consideriamo (v. fig. 3) una data curva, di cui C è un punto generico. Ci proponiamo di trovare sull'asse delle ascisse il punto P, tale che la retta CP sia normale alla curva data. Ciò si verifica quando il cerchio di centro P e raggio CP presenta con la curva due intersezioni riunite in C. Il problema si risolve analiticamente a partire dalla equazione (1) $f(x, y) = 0$ della curva data [53]. Siano x_0 e y_0 le coordinate di C. Essendo O l'origine, poniamo $OP = v$, $CP = s$. Avremo

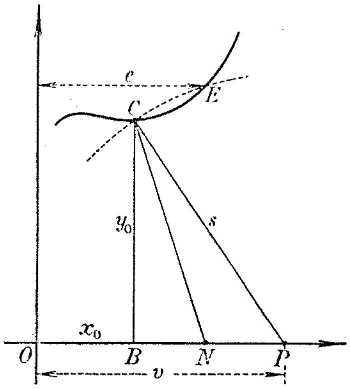

Fig. 3.

$$(2) \qquad (x - v)^2 + y^2 = s^2 .$$

Nell'equazione (1) si separano i termini di grado pari in y da quelli di grado dispari, trasportandoli nei due diversi membri dell'equazione, poi si elevano a quadrato i due membri dell'equazione ottenuta, e si ottiene un'equazione che diremo (3). Poi si elimina la y tra la (2) e la (3), sostituendo nella (3) ad y^2 il suo valore ricavato dalla (2). Si ottiene così un'equazione (4) $F_{2n}(x)=0$ (al più di grado $2n$). Sia E un ulteriore punto in cui il cerchio di centro P e raggio CP incontra la curva data, e sia e l'ascissa di E. Se CP è normale alla curva in C, dovrà coincidere E con C, cioè $F_{2n}(x)$ dovrà essere divisibile per $(x - e)^2$, si dovrà quindi avere

$$(5) \qquad (x - e)^2 F_{2n-2}(x) = 0 .$$

Dopo di avere sviluppato e ordinato la (5), si uguagliano i coefficienti così ottenuti a quelli rispettivamente di pari grado della (4). Si ottengono così equazioni che determinano s e v, quindi la normale CP.

DESCARTES applica il suo metodo alla determinazione delle tangenti alla

---

(52) A.T., VI, 413.
(53) Cfr. E. BOMPIANI, loc. cit. in (42).

parabola, alle curve del terzo ordine, alle sue ovali [54] che hanno considerevole importanza nelle ricerche cartesiane sulle lenti. A questo proposito DESCARTES risolve uno di quei problemi in cui si tratta di determinare una curva, date le proprietà delle sue tangenti, problemi che conducono ad un'equazione differenziale. Già NEPERO per scoprire i logaritmi e GALILEO per trovare la legge della caduta dei gravi avevano risolto problemi di tale natura, ma la questione trattata da DESCARTES è più difficile delle precedenti ed apre la via ai risultati di FLORIMOND DE BEAUNE [55].

Il procedimento indicato per la costruzione della normale ad una curva conduce alla risoluzione del problema della determinazione delle tangenti ad una curva algebrica in un suo punto, ma non si applica alle curve trascendenti. P. FERMAT, contemporaneo di DESCARTES, ideò un metodo diverso per determinare le tangenti alle curve, che sostanzialmente consiste nella determinazione del coefficiente angolare della tangente alla curva $y = f(x)$ come derivata della funzione $f(x)$ calcolata nel punto di tangenza [56]. Sorse una polemica fra i due matematici ciascuno dei quali sosteneva che il proprio metodo era il migliore. La polemica non fu sterile perchè condusse ad applicazioni dei metodi rivali, che contribuirono al progresso delle ricerche orientate verso la costruzione del calcolo infinitesimale.

È singolare la circostanza che DESCARTES risolva genialmente un problema di carattere tipicamente infinitesimale come quello della normale ad una curva, senza ricorrere ad infinitesimi potenziali od attuali, o ad un passaggio al limite vero e proprio, ma con un procedimento puramente algebrico.

Questo suo indirizzo mentale si può porre in relazione con le idee da lui espresse sull'infinito matematico.

Dei diversi passi di DESCARTES sull'argomento, scelgo il seguente dei *Principia Philosophiae* che esprime molto chiaramente l'atteggiamento del filosofo nei riguardi dell'infinito fisico e matematico.

« Così — traduco dal latino di DESCARTES [57] — mai ci affaticheremo in discussioni intorno all'infinito. Infatti veramente, dato che siamo finiti, sarebbe assurdo che noi stabilissimo alcunchè su tale argomento e tentassimo in tal modo quasi di renderlo finito e impadronircene. Non ci cureremo dunque di rispondere a coloro che domandano se, dandosi una linea infinita, la sua metà sarebbe anche infinita, oppure se il numero infinito è pari o dispari, o pon-

---

[54] L'ovale di CARTESIO è il luogo geometrico dei punti P, tali che essendo F ed F' due punti fissi, $\mu FP + \mu' PF' = \text{cost}$; si tratta quindi di una generalizzazione dell'ellisse. Altra curva ideata dal nostro Matematico è il *folium* di equazione $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

[55] Cfr. G. VACCA, loc. cit. in [45].

[56] G. CASTELNUOVO, *Le origini del calcolo infinitesimale nell'era moderna*, Zanichelli, Bologna 1938, pp. 56-60.

[57] Pars I, art. XXVI e art. XXVII (A.T. VIII, 14-15).

gono altre questioni del genere: poichè intorno a tali argomenti, sembra che debbano riflettere soltanto quelli che ritengono la propria mente infinita. Noi invece non affermeremo, invero, che sono infinite tutte quelle cose di cui sotto qualche aspetto non potremo trovare una fine, ma le riguarderemo come indefinite. Così, poichè non possiamo immaginare un'estensione tanto grande da non comprendere che ve ne può essere una ancora maggiore, diremo che la grandezza delle cose possibili è indefinita. E poichè non si può immaginare un così grande numero di stelle da non credere che Dio ne abbia potuto creare di più, supponiamo anche indefinito il numero di quelle; e così negli altri casi analoghi.

E diremo indefinite queste cose piuttosto che infinite, sia per riservare il titolo di infinito a Dio solo, poichè in Lui soltanto da ogni parte, non solo non conosciamo limiti, ma anche positivamente comprendiamo che non ve ne sono; sia anche perchè non comprendiamo positivamente nello stesso modo che le altre cose da qualche parte mancano di limiti, ma negativamente soltanto dichiariamo che i loro limiti, se ne hanno, non possono venir trovati da noi ».

La posizione speculativa di Descartes decisamente agnostica nei riguardi dell'infinito fisico e matematico, espressa nel passo ora letto, ci spiega l'atteggiamento negativo del Filosofo di fronte alle geniali considerazioni di Galileo sull'infinito e sull'infinitesimo matematico attuale, come pure sulla Geometria degli indivisibili di Bonaventura Cavalieri.

Nei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, Galileo traendo spunto dal suo tentativo di spiegare con ardite immagini la possibilità d'infiniti vuoti infinitamente piccoli nei corpi, passa a suggestive considerazioni sugli insiemi infiniti. Egli osserva che gli elementi dell'insieme dei numeri interi possono venir posti in corrispondenza biunivoca con gli elementi dell'insieme dei quadrati perfetti, e quindi, in un certo senso, il tutto può essere uguale ad una sua parte. Galileo non si sgomenta per questi paradossi, attribuendoli non ad una contradittorietà intrinseca nel concetto d'infinito matematico, ma alla diversità tra la proprietà del finito e quelle dell'infinito, affermando nettamente la possibilità logica dell'infinito matematico attuale, precorrendo l'atteggiamento di Giorgio Cantor, il fondatore della moderna teoria degli insiemi ([58]).

Descartes non apprezza questo ardito tentativo di « navigare (uso le parole di Cavalieri) l'immenso oceano degli indivisibili, dei vacui, degli infiniti », e in una lettera al P. Mersenne dell'11 ottobre 1638, critica aspramente quest'indirizzo del pensiero galileiano.

([58]) Cfr. E. Carruccio, *Galileo precursore della teoria degli insiemi*, Boll. Un. Mat. Ital. (2) 2, 175-187 (1942).

« Il manque en tout ce qu'il dit de l'infini, en ce que nonobstant qu'il confesse que l'esprit humain estant finit, n'est pas capable de le comprendre il ne laisse pas d'en discourir tout de mesme que s'il le comprenoit » (59).

Veramente GALILEO non esclude la possibilità per la mente umana di ragionare dell'infinito, ma dice che nascono difficoltà (altrove usa il termine paradossi) quando vogliamo attribuire all'infinito concetti propri del finito (60), anzi ritiene essenziali i ragionamenti sugli infiniti e sugli infinitesimali per chi vuole indagare sui fenomeni naturali.

Per motivi di brevità non entro nei dettagli della questione, ma noto soltanto che, come riconoscono gli stessi ADAM e TANNERY, editori delle opere di DESCARTES, dal punto di vista matematico il linguaggio di GALILEO, trattato da DESCARTES come sofistico, è almeno tanto rigoroso come quello dei fondatori del calcolo.

Anche la Geometria degli indivisibili di B. CAVALIERI non ha miglior fortuna presso DESCARTES, il quale in una lettera a MERSENNE del 20 aprile 1646, non risparmiando frecciate anche contro ROBERVAL con il quale era stato in polemica, scrive quanto segue (61):

« I'ay veu le BONAVENTURE CAV(ALIERI) estant dernierement à Leide, mais ie n'ay fait qu'en parcourir les propositions, pendant un quart d'heure, pource que le ieune Schooten que vous avez veu à Paris, et qui est maintenent Professeur à Leyde en la place de son Pere, m'assuroit que ce CAVALIERI ne fait autre chose que demonstrer par un nouveau moyen, des choses qui ont desia esté demontrées par d'autres, et que ce nouveau moyen n'est autre que l'un de ceux dont ie me suis servy pour demonstrer la roulette (62) en supposant que deux triangles curvilignes differens estoient egaux, pource que toutes les lignes droites, tirées en mesme sens en l'un qu'en l'autre, estoient égales. Ci cela est la clef qui a commencé d'ouvrir l'ésprit du ROBERVAL, comme vous m'avez mandé en quelques lettres, il doit estre encore fermé a beaucoup de ressorts. Car i'en sçay mille qui sont plus importantes, et il y en a plusieurs en ma Geometrie; mais il ne les y trouvera pas aisément, puisque, si chacune n'est expliquée par un gros livre, tel que celuy du CAVALIERI, il ne les aperçoit pas ».

Notiamo che il frettoloso giudizio secondo il quale nella Geometria degli

---

(59) A.T. II, 383.

(60) Ediz. Naz., Vol. VIII, pp. 76-79.

(61) A.T. IV, 394-395.

(62) A.T. II, 257 e segg. Inoltre in una lettera a MERSENNE del 13 novembre 1629 DESCARTES applica un procedimento analogo al metodo degli indivisibili per trovare la legge della caduta dei gravi, ma cade in errore (A.T. I, 75).

indivisibili non vi sarebbero risultati originali non è giustificato [63], inoltre DESCARTES non si rende conto dell'influenza notevolissima esercitata dall'opera di CAVALIERI sullo sviluppo del calcolo infinitesimale.

Ma non voglio chiudere con questi rilievi negativi il nostro rapido esame delle idee e degli atteggiamenti di DESCARTES riguardanti l'infinito matematico. In una lettera del 26 aprile 1643 a MERSENNE, DESCARTES considera le infinite grandezze inesprimibili, riprendendo in termini più chiari una questione che già si era presentata alle menti degli antichi matematici, sgomenti di fronte alla scoperta delle grandezze incommensurabili nelle quali avevano riconosciuto un elemento inesprimibile.

Il cenno cartesiano sull'argomento fa pensare ad un suggestivo risultato di G. CANTOR chiarito da RICHARD e da BOREL: esistono nel continuo geometrico (se non è un abuso usare qui il verbo «esistere») degli elementi che non possono essere definiti [64]. Nel passo di DESCARTES in questione troviamo anche affermata l'esistenza dei numeri trascendenti e quasi indicata la via della dimostrazione secondo CANTOR di detta esistenza. Leggiamo [65]:

«Je ne sçay pas ce que me demande M. DE VITRY LA VILLE, touchant les grandeurs inexplicables; car il est certain que toutes celles qui sont comprises dans les equations, s'expliquent par quelques signes, puisque l'equation mesme qui les contient est une façon de les exprimer. Mais, outre celles la, il y en a une infinité d'autres qui ne peuvent pas mesme estre comprises en aucune equation».

Finora abbiamo considerato la geometria cartesiana del piano, ma esiste un cenno di DESCARTES anche al metodo per trattare analiticamente i problemi della geometria dello spazio [66].

DESCARTES proietta ortogonalmente una curva sghemba descritta da un punto mobile nello spazio, sopra due piani di riferimento perpendicolari fra loro. La curva sghemba viene così rappresentata mediante due linee piane che si possono studiare con i metodi già indicati. Troviamo, qui il concetto fondamentale del metodo delle proiezioni ortogonali in geometria descrittiva, detta di MONGE. Sulla base di questo cenno cartesiano CLAIRAUT edificherà la costruzione della geometria analitica dello spazio.

---

[63] Cfr. per es. E. BORTOLOTTI, *La scoperta e le successive generalizzazioni di un teorema fondamentale di calcolo integrale*, Archivio Storia Scienza, **5**, 205-227 (1924).

[64] Cfr. per es. L. GEYMONAT, *Storia e filosofia dell'analisi infinitesimale*, Levrotto & Bella, Torino 1947, pp. 292-294.

[65] A.T. III, 658.

[66] Cfr. A.T. VI, 440-441, verso la fine del II libro della *Geometrie*. Sulle curve sghembe DESCARTES tenta di risolvere un solo problema, quello della normale in un punto assegnato della curva. Disgraziatamente nella soluzione di questo problema DESCARTES cade in errore; v. nota a p. 441 del Volume citato.

DESCARTES con la sua *Geometrie* aveva assolto il compito che si era prefisso secondo la concezione della Matematica che aveva guidato il suo cammino, unificando con il suo metodo un vasto dominio del mondo del pensiero:

« pour la methode dont ie me sers tout ce qui tombe sous la consideration des Geometres se reduit à un mesme genre de problemes, qui est de chercher la valeur des racines de quelque equation (67) ».

Nella visione del mondo matematico che riteneva di poter almeno in modo potenziale dominare interamente, DESCARTES, soddisfatto come un'equazione dalle sue radici, concludeva così la sua Geometria (68):

« Et i'espere que nos neveux me sçauront gré, non seulement des choses que i'ay icy expliquées, mais aussy de celles que i'ay omises volontairement affin de leur laisser le plaisir de les inventer ».

DESCARTES si è effettivamente meritata la gratitudine dei suoi nipoti matematici ai quali ha offerto un linguaggio lucido e potente per esprimere i ragionamenti algebrici ed ha aperto ampi orizzonti alle loro ricerche e vasti campi al loro spirito costruttivo.

Tuttavia dallo studio del mondo del pensiero come pure del mondo fisico, dallo studio di quel mondo enigmatico espresso mediante una scrittura cifrata di cui, secondo DESCARTES, la Matematica ci dà la cifra (69) le menti dei nipoti del sommo Matematico furono spinte ad oltrepassare in diverse direzioni le frontiere da lui tracciate.

Innanzi tutto il calcolo infinitesimale di cui DESCARTES, come abbiamo visto era rimasto sulla soglia, si sviluppò in un senso che direi non cartesiano, specialmente per quanto concerne la teoria degli insiemi infiniti.

Ma il lucido simbolismo del calcolo infinitesimale ideato da LEIBNIZ era destinato ad armonizzare perfettamente con il simbolismo algebrico di DESCARTES in una costruzione mirabilmente unitaria; mentre il simbolismo del calcolo infinitesimale doveva far parte secondo LEIBNIZ di una scienza più generale « la characteristica universalis », cui anche DESCARTES sembrava talora avere aspirato, quando aveva detto che il suo metodo doveva contenere ed esprimere « prima rationis humanae rudimenta »... « ad veritates ex quovis subjecto eliciendas » (70).

Esiste tuttavia una differenza essenziale fra la veduta di DESCARTES e quella di LEIBNIZ intorno alla logistica (71). Per DESCARTES la necessità delle

---

(67) A.T. VI, 475.

(68) A.T. VI, 485.

(69) Cfr. A.T. VIII, 327-328; A.T. IX, 2a parte, 323-327: art. CCV.

(70) Ed anche « hanc [methodum] omni alia nobis humanitus tradita cognitione potiorem, utpote aliarum omnium fontem esse » (cfr. A.T. XI, 374).

(71) Cfr. su questo argomento: P. SCHRECKER, *La méthode cartésienne* (loc. cit. in (31), cfr. pp. 336-367).

verità fondamentali dipende dalla volontà di DIO che le ha stabilite da tutta l'eternità ([72]). La coerenza di un sistema non basterebbe quindi per garantire la sua verità, il formalismo operatorio non potrebbe garantire la verità di una scienza. Invece, secondo LEIBNIZ le verità necessarie sussistono per loro natura, non per una scelta di DIO. Partendo da queste verità che sarebbero identiche, si costruirebbe un sistema di cui la coerenza garantirebbe la verità. In ogni caso tanto per DESCARTES come per LEIBNIZ la metodologia si basa su ipotesi metafisiche: mentre per il primo la realtà della scienza si basa sul « cogito », per il secondo la positività dei risultati di una scienza simbolica poggia sulla concezione della razionalità del reale.

Anche in altre direzioni non cartesiane doveva avanzare il pensiero matematico: come abbiamo detto, la Matematica di DESCARTES è essenzialmente scienza dei rapporti fra grandezze, metrica. Ebbene, come è noto nella Matematica moderna esistono rami ai quali i concetti metrici sono estranei. In quest'ordine d'idee incontriamo innanzi tutto la geometria proiettiva che studia non le proprietà metriche delle figure ma le proprietà grafiche, invarianti per proiezioni e sezioni, nello spirito del *Brouillon project* di DESARGUES, al quale DESCARTES seguendo il suo ideale metrico, consigliava invano di servirsi dell'aiuto dell'algebra per rendere più semplici le sue dimostrazioni.

Ma mentre da un lato venne costruita con intenti puristici la geometria proiettiva esente da nozioni metriche, d'altra parte le relazioni fra geometria analitica e proiettiva furono vaste e feconde contribuendo efficacemente al progresso di questi due rami della Matematica.

Ancor più lontano dalle nozioni metriche è un altro ramo della geometria moderna: l'*analysis situs*, secondo il termine introdotto da LEIBNIZ, o topologia, la quale concerne le proprietà che le figure conservano mentre vengono deformate con continuità senza duplicazioni o lacerazioni.

Ma esiste un importante risultato di DESCARTES dal quale si può dedurre la relazione così detta di EULERO che lega i numeri delle faccie f, dei vertici v, degli spigoli s di un poliedro ([73]):

$$f + v = s + 2 .$$

Di questa relazione si riconobbe il significato topologico che trascendeva la teoria dei poliedri.

([72]) A.T. IX, 236, ed anche il passo seguente: « Les verités mathematiques, lesquelles vous nommés eternelles, ont esté establies de DIEU et en dependent entierement, aussy bien que tout le reste des creatures. C'est en effait parler de DIEU comme d'un Juppiter ou Saturne, et l'assuietir au Stix et aus destinees, que de dire que ces verités sont independantes de luy » (lettera al P. MERSENNE del 15 aprile 1630, A.T. I, 145).

([73]) Cfr. A.T. X, 257-276 e seguente tavola; in particolare p. 258; A. NATUCCI, *Teorema di* DESCARTES *sui poliedri*, Archimede **1**, 287-288 (1949).

Più lontane ancora delle teorie sopra ricordate, dal mondo matematico di DESCARTES, dovevano svilupparsi le geometrie non-euclidee. Eppure la prima dimostrazione della loro legittimità doveva sorgere dalla loro interpretazione analitica secondo lo spirito della geometria cartesiana.

A questo proposito LOBACEFSKI si esprime in questo modo nella sua *Pangeometria* (74): « Un semplice colpo d'occhio sulle equazioni (4) che esprimono la dipendenza esistente tra i lati e gli angoli dei triangoli rettilinei, è sufficiente per dimostrare che a partire di là, la pangeometria diviene un metodo analitico che rimpiazza e generalizza i metodi della geometria ordinaria ».

Abbiamo così visto come anche in quei rami della Matematica moderna che teoricamente sono fuori dei confini della Matematica cartesiana, esistono vitali addentellati con l'opera di DESCARTES, che resta un elemento essenziale del pensiero matematico del nostro tempo, nell'aspirazione alle idee chiare e distinte, nel simbolismo e nel linguaggio dell'algebra, nella sintesi di questa con la geometria, nella costante ricerca e nell'applicazione di metodi generali e nella riflessione su di essi: la metodologia.

Le verità matematiche che avevano sorretto AGOSTINO nel superamento del dubbio ed avevano fornito a DESCARTES per la loro certezza, l'ideale di una scienza universale (75), si trasfiguravano alla luce dei supremi principii della filosofia cartesiana, trovando la radice della loro certezza nella veracità di DIO (76) ordinate e stabilite nella sua mente da tutta l'eternità.

Matematica e Filosofia ci appaiono inscindibilmente legate nella mente di DESCARTES, e il suo pensiero per questa ragione si rende più vivo ed operante per noi.

---

(74) Cfr. R. BONOLA, *La geometria non-euclidea*, Zanichelli, Bologna 1906, p. 83.
(75) A.T. VIII, 328-329; e *Discours de la methode*, A.T. VI, 19.
(76) A.T. VIII, 328-329.