SALVATORE CHERUBINO (*)

Sui periodi degli integrali multipli delle varietà algebriche. (**)

Introduzione.

Per una varietà algebrica V_r, di dimensione $r > 1$, i periodi degli integrali k-pli, $1 < k \leqslant r$, di prima specie godono proprietà (¹) analoghe a quelle dei periodi delle funzioni abeliane, ma costituiscono matrici più generali di quelle formate da questi ultimi, cioè delle *matrici di* RIEMANN.

Volendo mettere in evidenza l'utilità di uno studio sistematico di simili matrici (²), abbiamo fatto vedere come partendo da relazioni analoghe a quelle di HURWITZ, che da G. ALBANESE (³) furono portate, per gl'integrali semplici, dalle curve alle superficie e alle varietà, relazioni che rappresentano, almeno in questo caso, classi di corrispondenze algebriche, si riesce, mercè un ragionamento quasi identico a quello che abbiamo sviluppato altrove per le curve (⁴), a dedurre alcune notevoli proprietà per i periodi e per gli integrali k-pli di prima specie su V_r. Nel caso delle curve e, almeno per $k = 1$, sulle varietà di dimensione superiore, queste proprietà hanno già ricevuto importanti interpretazioni geometriche (⁵) sicchè è da aspettarsi che possano ricevere interpretazioni di rilevante interesse anche nel caso $k > 1$ (⁶).

(*) Professore o. della Università di Pisa. Indirizzo: Via S. Lorenzo, 22; Pisa (Italia).

(**) Lavoro ricevuto il 15-III-1951.

(¹) Per queste proprietà vedasi: F. SEVERI, *Relazioni tra i periodi degli integrali multipli d'una varietà algebrica*, Mem. Accad. Italia **9**, 121-146 (1938). I simboli ϱ_k, R_k hanno qui gli stessi significati del n. 6 della Memoria citata.

(²) MICHELE SCE, con lavori in corso di stampa negli « Ann. Scuola Norm. Super. Pisa », studia matrici più generali di quelle di cui sopra, ed anche di quelle studiate dal WEIL e dall'ALBERT.

(³) G. ALBANESE, *Corrispondenze algebriche tra i punti di due superficie algebriche* (Memoria seconda), Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) **3**, 149-182 (1934).

(⁴) S. CHERUBINO: a) *Sul criterio di equivalenza*, Rend. Circ. Mat. Palermo **62**, 369-376 (1938-39); b) *Sugli invarianti aritmetici delle serie algebriche semplicemente infinite*, Rend. Circ. Mat. Palermo **63**, 275-284 (1940-41).

(⁵) Cfr. le mie due Note citate in (⁴) e la Memoria di G. ALBANESE citata in (³).

(⁶) Le proprietà aritmetiche esposte in queste pagine suggeriscono l'opportunità di introdurre il concetto di prodotto di un ciclo per un numero reale; il che non sarebbe

§ 1. – La tabella dei periodi degli integrali multipli.

1. – Sia V_r una varietà algebrica di dimensione $r \geqslant k$, R_k il suo ordine di connessione k-dimensionale,

$$\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{R_k}) \tag{1.1}$$

un sistema di k-cicli indipendenti su essa,

$$U = (u_1, u_2, \ldots, u_{p_k}) \tag{1.2}$$

un sistema di p_k integrali k-pli indipendenti di prima specie dai quali dipende linearmente ogni altro integrale k-plo di prima specie di V_r,

$$\omega = \|\omega_{hr}\|, \qquad h = 1, 2, \ldots, p_k, \quad r = 1, 2, \ldots, R_k \tag{1.3}$$

la tabella dei periodi degli integrali u_h sui cicli Γ_s. Sappiamo che esiste (almeno) una matrice razionale, anzi intera, A di ordine R_k, non degenere, per la quale si ha

$$\omega A \omega_{-1} = 0 \,. \tag{I}$$

Questa A è simmetrica ($A = A_{-1}$) se k è pari, emisimmetrica ossia alternata ($A = -A_{-1}$) se k è dispari e può supporsi *primitiva*, cioè ad elementi interi primi tra loro. Inoltre A è tale che la matrice [7]

$$\mathscr{A} = \omega A \bar{\omega}_{-1} \,, \tag{II}$$

oppure questa moltiplicata per l'unità immaginaria i, secondo che k sia pari o dispari, è una matrice antisimmetrica che può prendersi come matrice discriminante di una forma hermitiana definita. Il segno di questa forma può fissarsi ad arbitrio, scegliendo opportunamente quello di A: quando occorra fissarlo lo supporremo negativo.

---

una novità: si confronti ad es. P. ALEXANDROFF und H. HOPF, *Topologie* (Springer, Berlin 1935), cap. IV, § 9, e cap. V. La definizione di integrale algebrico multiplo, che sembra abbia bisogno ancora di migliore elaborazione, consentirà di affermare o definire il valore di un integrale esteso al ciclo $\alpha\Gamma$, con α reale, quale prodotto di α per il valore dell'integrale esteso a Γ; in mancanza di meglio, la definizione di integrale algebrico multiplo potrà intendersi in senso un po' più ristretto di quello desiderabile. Dopo di ciò, le proprietà ed il significato delle matrici di RIEMANN ordinarie varranno anche per le matrici aventi una matrice principale non degenere irrazionale, come quelle dei periodi degli integrali algebrici multipli che qui abbiamo incontrati. E se ne potrà tentare la interpretazione geometrica nella teoria delle corrispondenze algebriche considerate dal punto di vista trascendente o topologico-trascendente.

(7) La sopralineatura indica il passaggio al numero complesso coniugato, l'indice -1 il passaggio alla matrice trasposta.

Allora $\mathcal{H}$ è necessariamente di caratteristica massima, cioè p_k e, per un noto teorema, anche ω ha caratteristica p_k. Poichè, a causa della (I), si ha:

$$\text{(I')} \qquad \left(\frac{\omega}{\overline{\omega}}\right) A \left(\frac{\omega}{\overline{\omega}}\right)_{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \omega A \overline{\omega}_{-1} \\ \hline \overline{\omega} A \omega_{-1} & 0 \end{array}\right),$$

questa matrice è di caratteristica $2p_k$, e segue che:

a) *la matrice* $\left(\frac{\omega}{\overline{\omega}}\right)$ *è di caratteristica eguale al numero* $2p_k$ *delle sue righe e la caratteristica di* A *è non inferiore a* $2p_k$*; quindi*

$$\text{(III)} \qquad R_k \geqslant 2p_k .$$

Segue anche che:

b) *un integrale k-plo di prima specie di* V_r *non può avere i periodi tutti reali senza averli addirittura tutti zero e quindi ridursi a una costante.*

Infatti, avendosi necessariamente

$$v = xu_{-1}$$

con x un p_k-complesso orizzontale opportuno, i periodi di v sui cicli Γ sono dati dall'R_k-complesso $x\omega$, onde, se fossero tutti reali, si avrebbe

$$\text{(1.4)} \qquad x\omega = \overline{x}\overline{\omega}$$

ossia

$$(x \mid -\overline{x})\left(\frac{\omega}{\overline{\omega}}\right) = 0 ,$$

il che, essendo il secondo fattore a righe indipendenti, è impossibile se non è

$$(x \mid -\overline{x}) = 0 ,$$

quindi $x = 0$ e v costante.

2. – Su V_r vi sono $R_k - \varrho_k \geqslant 1$ cicli indipendenti e non più sui quali gli integrali k-pli di prima specie hanno periodi tutti zero. Essendo essi omologhi o pseudoomologhi a combinazioni lineari a coefficienti interi dei cicli Γ, tra i periodi ω hanno luogo ϱ_k relazioni lineari omogenee indipendenti a coefficienti interi, cioè vi è una matrice intera a, con $R_k - \varrho_k$ righe, R_k colonne e caratteristica massima, per la quale si ha:

$$\text{(IV)} \qquad \omega a_{-1} = 0 .$$

Ordinando opportunamente i cicli Γ_s e quindi le colonne di ω ed allo stesso modo quelle di a, si potrà scrivere

$$\text{(1.5)} \qquad a_{-1} = \left(\frac{c}{d}\right),$$

con d matrice non degenere di ordine $R_k - \varrho_k$ e indicando con τ la matrice delle prime ϱ_k colonne di ω, si avrà

$$\omega = (\tau \mid \tau \cdot \lambda) \tag{1.6}$$

con

$$\lambda = -cd^{-1}\,. \tag{1.7}$$

Dopo di che, trasformando mediante la sostituzione di matrice

$$H = \left(\begin{array}{c|c} I_1 & 0 \\ \hline -\lambda_{-1} & I_2 \end{array}\right), \tag{1.8}$$

ove I_1, I_2 sono due matrici identiche di ordini rispettivi ϱ_k ed $R_k - \varrho_k$, la matrice dei periodi degli integrali U diventa

$$\omega H_{-1} = (\tau \mid 0)\,, \tag{1.9}$$

cioè il sistema Γ di k-cicli vien sostituito dal sistema ΓH_{-1} sempre di R_k cicli indipendenti nel quale figurano, agli ultimi $R_k - \varrho_k$ posti, altrettanti cicli a periodo tutti nulli ([8]). Poichè solo $R_k - \varrho_k$ cicli indipendenti sono a periodi tutti nulli, la matrice τ non potrà soddisfare a nessuna relazione del tipo della (IV) con a razionale, non nulla.

La relazione (II) ci dà allora:

$$\tau B \tau_{-1} = 0 \tag{1.10}$$

ove, avendo posto

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right), \tag{1.11}$$

con A_4, A_1 matrici intere degli ordini rispettivi ϱ_k, $R_k - \varrho_k$, risulta:

$$B = A_1 + \lambda A_3 + A_2 \lambda_{-1} + \lambda A_4 \lambda_{-1}\,. \tag{1.12}$$

Basta infatti osservare che la (II) può scriversi

$$(\tau \mid 0) H_{-1}^{-1} A H^{-1} (\tau \mid 0)_{-1} = 0$$

e che si ha:

$$H_{-1}^{-1} A H^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} B & A_2 + \lambda A_4 \\ \hline A_3 + A_4 \lambda_{-1} & A_4 \end{array}\right), \tag{1.13}$$

([8]) Il fatto che H è razionale, anzichè intera, non impedisce di considerare come cicli nel senso ordinario il sistema ΓH_{-1}, tutt'al più moltiplicando H per un fattore scalare intero.

con B razionale e simmetrica o antisimmetrica insieme ad A.

Quindi è

$$\omega A \omega_{-1} = \tau B \tau_{-1} = 0 . \tag{1.14}$$

Analogamente si trova che

$$\omega A \bar{\omega}_{-1} = \tau B \bar{\tau}_{-1} \tag{1.15}$$

e che perciò anche il secondo membro di questa (1.15), moltiplicato per i se k è dispari, è matrice discriminante di una forma hermitiana definita.

Se dunque è $\varrho_k = 2p_k$, τ è una matrice di RIEMANN propriamente detta. Rileviamo subito che poichè, come sarà osservato al n. 4, le ultime $R_k - 2p_k$ righe e colonne di A sono arbitrarie e possono quindi scegliersi nulle, si può supporre senz'altro $B = A_1$.

Si ha in ogni caso:

$$\varrho_k \geqq 2p_k , \tag{1.16}$$

onde, se vale il segno $>$, non si tratta proprio di una matrice di RIEMANN: la diremo allora *matrice di* RIEMANN *allungata*.

Per accertarsi della (1.16) basta osservare che

$$\left(\frac{\tau}{\bar{\tau}}\right) B \left(\frac{\tau}{\bar{\tau}}\right)_{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \tau B \bar{\tau}_{-1} \\ \hline \bar{\tau} B \tau_{-1} & 0 \end{array}\right), \tag{1.17}$$

è di caratteristica $2p_k$, analogamente alla (I'), quindi la caratteristica di B è necessariamente non minore di $2p_k$.

Ne segue, come per la b) del n. 1, che:

gli integrali k-pli di prima specie di V_r aventi periodi reali sui primi ϱ_k cicli Γ_s (hanno periodi reali su tutti i cicli Γ_s, quindi) sono costanti.

Da ora in poi, quando non sia necessario od opportuno, l'indice k verrà omesso.

3. – Poichè $\left(\frac{\omega}{\bar{\omega}}\right)$ è di caratteristica $2p$ eguale al numero delle sue righe, solo $2p$ colonne sono indipendenti cioè, ordinando queste opportunamente, ossia ordinando i cicli Γ_s, si può porre:

$$\left(\frac{\omega}{\bar{\omega}}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \sigma & \sigma\mu \\ \hline \bar{\sigma} & \bar{\sigma}\bar{\mu} \end{array}\right), \tag{1.18}$$

con μ matrice a $2p$ righe ed $R - 2p$ colonne e $\left(\frac{\sigma}{\bar{\sigma}}\right)$ matrice non degenere, di ordine $2p$.

Poichè $\overline{\omega} = (\overline{\sigma} \mid \overline{\sigma}\overline{\mu})$, è ovviamente

$$\overline{\sigma}\mu = \overline{\sigma}\overline{\mu}$$

e si ha:

$$\overline{\sigma}(\mu - \overline{\mu}) = 0\ ,$$

quindi anche

$$\sigma(\mu - \overline{\mu}) = 0\ ,$$

onde:

$$\left(\frac{\sigma}{\overline{\sigma}}\right)(\mu - \overline{\mu}) = 0\ ,$$

e perciò $\mu - \overline{\mu} = 0$, ossia μ è reale. Si ha dunque che:

a) $R_k - 2p_k$ *periodi degli integrali* u_h *e non più sono combinazioni lineari a coefficienti reali dei rimanenti* $2p_k$. Cioè (9):

b) *fra i periodi dei* p_k *integrali k-pli di prima specie di* V_r, $k \leqslant r$, *sussistono* $R_k - 2p_k$ *relazioni lineari reali indipendenti e non più*. Fra esse sono manifestamente comprese quelle a coefficienti razionali dovute agli $R_k - \varrho_k$ cicli a periodi tutti zero, il che ci dà nuovamente $\varrho_k \geqslant 2p_k$. Il ragionamento fatto ci dice anche in che modo queste relazioni si ottengono, data che sia la matrice ω dei periodi.

Se $\varrho_k > 2p_k$ si ha che: $\varrho_k - 2p_k$ *delle relazioni lineari reali indipendenti di cui sopra sono a coefficienti almeno in parte irrazionali* precisamente solo $\varrho_k - 2p_k$ colonne di μ sono a elementi tutti razionali. Ordinando i cicli Γ supporremo che queste colonne siano le ultime sicchè esse costituiscono la matrice λ di cui al n. prec.: adottando una notazione del SEVERI (10), diremo che le rimanenti colonne di μ sono *totalmente irrazionali*.

Ponendo

$$K = \left(\begin{array}{c|c} I_1' & 0 \\ \hline -\mu_{-1} & I_2' \end{array}\right), \tag{1.19}$$

quindi $\omega K_{-1} = (\sigma \mid 0)$ ed

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1' & A_2' \\ \hline A_3' & A_4' \end{array}\right),$$

con A_1', A_4' matrici degli ordini $2p$, $R - 2p$, si ottiene

$$\omega A \omega_{-1} = \sigma C \sigma_{-1} = 0\ , \tag{1.20}$$

(9) F. SEVERI, loc. cit. in (1), cfr. n. 6.

(10) Loc. cit. in (1), cfr. n. 3.

ove

$$C = A'_1 + \mu A'_3 + A'_2\mu_{-1} + \mu A'_4\mu_{-1}\,, \tag{1.21}$$

ed inoltre

$$\omega A\omega_{-1} = \sigma C\sigma_{-1}\,. \tag{1.22}$$

Poichè, come si vedrà qui appresso, $A'_2 = (A'_3)_{-1}$ ed A'_4 sono arbitrarie, scegliendole nulle si ha $C = A'_1$, perciò C è intera e σ è quindi una matrice di RIEMANN propriamente detta.

Se in A le matrici $A_2 = (A_3)_{-1}$ ed A_4 non si annullassero, C risulterebbe irrazionale, come μ, e allora converrebbe dire che σ è una *matrice di* RIEMANN *irrazionale*.

È poi ovvio che vale una proposizione del tutto analoga a quella che chiude il n. 2, cioè che:

c) *gli integrali k-pli di prima specie di V_r che hanno periodi reali sui primi $2p_k$ cicli Γ sono costanti.*

4. – Se $\varrho_k > 2p_k$ la relazione (IV) dà luogo ad infinite relazioni come la (I). Infatti, qualunque sia la matrice intera b a $2p$ righe ed R colonne, si ha da detta relazione:

$$\omega a_{-1}b = 0 \tag{1.23}$$

e quindi, posto

$$b_{-1}a = M \tag{1.24}$$

matrice intera di ordine R, risulta

$$\omega M_{-1}\omega_{-1} = 0\,. \tag{1.25}$$

Ordinati i cicli Γ in modo che a abbia la forma (1.5) con d non degenere, si ha

$$M_{-1} = \left(\frac{c}{d}\right)(b' \mid b'') = \left(\begin{array}{c|c} cb' & cb'' \\ \hline db' & db'' \end{array}\right),$$

e si potrà avere che

$$db = d(b' \mid b'')$$

sia una matrice intera fissata ad arbitrio, di tipo $(R - \varrho,\ R)$.

Si può scegliere b in modo che M risulti simmetrica. Basterà prendere b tale che sia simmetrica db'', cioè

$$db'' = b''_{-1}d_{-1}\,,$$

quindi

$$b'' = d^{-1} b''_{-1} d_{-1} \,, \tag{1.26}$$

e poi prendere b' in modo che

$$db' = (cb'')_{-1}$$

ossia

$$b' = d^{-1} b''_{-1} c_{-1} \,. \tag{1.27}$$

Dopo di che si ha:

$$cb' = cd^{-1} b''_{-1} c_{-1} \tag{1.28}$$

la quale, poichè dalla (1.26) segue che

$$b'' d_{-1}^{-1} = d^{-1} b''_{-1} \,,$$

assicura che

$$cb' = (cb')_{-1} \,.$$

Analogamente se si vuole che M sia emisimmetrica.

Sommando la (I) con la (1.25) si ha

$$\omega(A + M_{-1})\omega_{-1} = 0 \tag{I''}$$

la quale, stante l'arbitrarietà di cui si è ora discorso, ci dice che:

a) *nella* (I) *la matrice intera* A *può sempre sostituirsi con un'altra, anch'essa simmetrica o emisimmetrica ed intera nella quale* $R_k - \varrho_k$ *righe opportune* (*e quindi le colonne corrispondenti*) *sono arbitrarie.*

Questo fatto può, in certo senso, generalizzarsi osservando che dalla (1.28), cioè sempre con opportuno ordinamento dei cicli Γ, e considerando la matrice ad R righe ed $R - 2p$ colonne:

$$\varkappa_{-1} = \left(\frac{-\mu}{I'_2} \right) \,,$$

con I'_2 matrice identica di ordine $R - 2p$, si ha:

$$\omega \varkappa_{-1} \beta = 0 \tag{1.29}$$

qualunque sia la matrice β, di tipo $(R - 2p, R)$. Perciò, ragionando come poco fa, si può affermare che:

b) *nella* (I) *la matrice* A *può sempre sostituirsi con un'altra anch'essa simmetrica od emisimmetrica, non però necessariamente intera, ma reale, nella quale* $R_k - 2p_k$ *righe opportune* (*e quindi le colonne corrispondenti*) *sono arbitrarie.*

Altrettanto potrà dirsi anche se nella (I) la A non fosse simmetrica o alternata.

Adottando il linguaggio in uso per le matrici di RIEMANN impiegato dallo SCORZA, una relazione come la (I) la diremo *forma riemanniana di* ω e, se alternata o simmetrica e tale che la (II) sia definita, la diremo *forma riemanniana principale di* ω. Quel che precede ci permette allora di affermare che:

c) *ad ogni forma riemanniana di* ω *ne corrisponde una per* τ *e una per* σ *e viceversa. In questa corrispondenza biunivoca a forme principali corrispondono forme principali, a forme simmetriche o alternate corrispondono forme anch'esse simmetriche o alternate.*

Per la biunivocità della corrispondenza, si osservi che essa va intesa a meno dei quadranti che restano arbitrari, perchè effettivamente ha luogo solo tra le forme riemanniane delle matrici ω, $(\tau \mid 0)$ e $(\sigma \mid 0)$, che sono tra loro isomorfe [11].

§ 2. – Relazioni di HURWITZ.

5. – Sia V_r^* una seconda varietà algebrica di dimensione r; U^*, Γ^*, ω^*, p_k^*, R_k^*, ϱ_k^* siano, per V_r^*, gli enti che per V_r sono stati indicati con queste stesse lettere senz'asterisco. Quando non vi sia luogo a confusione, sopprimeremo l'indice k scrivendo p^*, R^*, ϱ^*. E sia A^* una forma riemanniana principale per ω^*, cioè una matrice intera simmetrica o alternata secondo che k sia pari o dispari, per la quale si ha

$$\omega^* A^* \omega^*_{-1} = 0$$

e $\omega^* A^* \overline{\omega}^*_{-1}$ sia matrice discriminante (dopo esser stata moltiplicata per i se k è dispari) di una forma hermitiana definita. Con τ^*, σ^*, B^*, C^* indicheremo le matrici analoghe a quelle che nel § precedente abbiamo indicato con τ, σ, B e C.

Supponiamo che tra ω ed ω^* abbiano luogo le due relazioni

$$\pi\omega = \omega^* T_{-1}\,, \tag{2.1}$$

$$\pi^*\omega^* = \omega T^*_{-1}\,, \tag{2.1*}$$

nelle quali π e π^* sono matrici complesse rispettivamente di tipo (p^*, p) e (p, p^*) mentre T e T^* sono matrici intere di tipo rispettivo (R, R^*) ed $R^*, R)$. E supponiamo ancora che queste due relazioni istituiscano lo stesso legame bilineare fra ω ed ω^*, cioè diano luogo a una stessa relazione $\omega M \omega^*_{-1} = 0$.

---

(11) Per $(\tau \mid 0)$ e $(\sigma \mid 0)$ tre quadranti delle forme riemanniane sono arbitrari.

Nel caso in cui ω ed ω^* siano le matrici dei periodi di un sistema di integrali semplici di prima specie di V_r, V_r^* calcolati su due sistemi completi e primitivi di cicli lineari rispettivamente su V_r e V_r^*, le relazioni (2.1) e (2.1*) rappresentano ([12]) una classe di corrispondenze algebriche tra le due varietà, che nel verso da V_r a V_r^* indicheremo con $\mathcal{C}$ e nel verso opposto indicheremo con $\mathcal{C}^{-1}$. Benchè, nel caso di integrali k-pli, $k > 1$, e di cicli k-dimensionali, non si possa senz'altro affermare che dette relazioni sono legate a una classe di corrispondenze algebriche, pure noi diremo, per brevità di locuzione, che esse rappresentano ancora una classe di corrispondenze algebriche, $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}^{-1}$ esistente tra V_r e V_r^*. Con ciò vogliamo soltanto intendere che esse esprimono un legame fra le due varietà, per ora non meglio precisabile, che equivale a una relazione bilineare tra ω ed ω^*.

Adoperando la matrice H data dalla (1.8) e la sua analoga

$$H^* = \left(\begin{array}{c|c} I_1^* & 0 \\ \hline -\lambda_{-1}^* & I_2^* \end{array}\right), \tag{2.2}$$

dalle (2.1) e (2.1*) si ottiene

$$\pi(\tau \mid 0) \quad = (\tau^* \mid 0)(HTH^{*-1})_{-1}, \tag{2.3}$$

$$\pi^*(\tau^* \mid 0) = (\tau \mid 0)(H^*T^*H^{-1})_{-1}. \tag{2.3*}$$

Posto:

$$HTH^{*-1} = \left(\begin{array}{c|c} T_1 & T_2 \\ \hline T_3 & T_4 \end{array}\right), \tag{2.4}$$

$$H^*T^*H^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} T_1^* & T_2^* \\ \hline T_3^* & T_4^* \end{array}\right), \tag{2.4*}$$

con T_1, T_1^* matrici di tipo rispettivo, (ϱ, ϱ^*) e (ϱ^*, ϱ), si ha:

$$\tau^*(T_3)_{-1} = 0, \qquad \tau(T_3^*)_{-1} = 0,$$

le quali, poichè le colonne di τ e τ^* non possono essere legate da una stessa relazione lineare a coefficienti razionali, ci dicono che è necessariamente

$$T_3 = 0, \qquad T_3^* = 0. \tag{2.5}$$

Ne segue che le (2.3), (2.3*) si riducono alle

$$\pi\tau \quad = \tau^*(T_1)_{-1}, \tag{2.6}$$

$$\pi^*\tau^* = \tau(T_1^*)_{-1}, \tag{2.6*}$$

ove T_1 e T_1^* sono razionali.

([12]) Nel caso delle curve si tratta delle ben note relazioni di Hurwitz, che qui scriviamo senza far riferimento a integrali e cicli normali. Nel caso delle superficie queste relazioni, sempre con riferimento a integrali e cicli normali, sono state ritrovate in modo perfettamente analogo, da G. Albanese, loc. cit. in ([3]), cfr. § 3.

Analogamente, posto $\omega^* = (\sigma^* \mid \sigma^* \mu^*)$ e

$$K^* = \left(\begin{array}{c|c} I_1^{*\prime} & 0 \\ \hline -\mu_{-1}^* & I_2^{*\prime} \end{array}\right), \tag{2.7}$$

$$KTK^{*-1} = \left(\begin{array}{c|c} T_1' & T_2' \\ \hline T_3' & T_4' \end{array}\right), \tag{2.8}$$

$$K^*T^*K^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} T_1^{*\prime} & T_2^{*\prime} \\ \hline T_3^{*\prime} & T_4^{*\prime} \end{array}\right), \tag{2.8*}$$

si ha:

$$\sigma(T_3')_{-1} = 0\,, \qquad \sigma^*(T_3^{*\prime})_{-1} = 0\,,$$

quindi anche, essendo μ e μ^* matrici reali,

$$\bar{\sigma}(T_3')_{-1} = 0\,, \qquad \bar{\sigma}^*(T_3^{*\prime})_{-1} = 0\,,$$

onde, poichè $\left(\frac{\sigma}{\bar{\sigma}}\right)$ e $\left(\frac{\sigma^*}{\bar{\sigma}^*}\right)$ sono non degeneri, segue che:

$$T_3' = 0\,, \qquad T_3^{*\prime} = 0 \tag{2.9}$$

e perciò:

$$\pi\sigma \;\; = \sigma^*(T_1')_{-1}\,, \tag{2.10}$$

$$\pi^*\sigma^* = \sigma(T_1^{*\prime})_{-1}\,. \tag{2.10*}$$

Però le matrici T_1', $T_1^{*\prime}$, insieme agli altri quadranti non nulli ai secondi membri delle (2.8) e (2.8*) non sono necessariamente razionali, bensì soltanto reali (irrazionali).

6. – La relazione (1.23) e l'analoga per ω^* possono scriversi:

$$0\omega \;\; = \omega^* M_{-1}^*\,, \qquad M^* = b_{-1}^* a^*\,, \tag{2.11}$$

$$0\omega^* = \omega M_{-1}\,, \qquad M \; = b_{-1} a\,, \tag{2.11*}$$

da cui, sommando ordinatamente con (2.1) e (2.1*), si ottiene

$$\pi\omega \;\; = \omega^*(T + M^*)_{-1}\,, \tag{2.1'}$$

$$\pi^*\omega^* = \omega(T^* + M)_{-1}\,, \tag{2.1*'}$$

le quali ci permettono di affermare che:

a) *nelle matrici intere T, T^* vi sono sempre $R_k - \varrho_k$, rispettivamente $R_k' - \varrho_k'$, colonne opportune* (le ultime col nostro ordinamento di cicli) *i cui elementi sono arbitrari.*

Osserviamo che può porsi:

$$HM^*H^{*-1} = \left(\frac{M_1^* + M_2^*\lambda_{-1}^*}{N^*}\left|\frac{M_2^*}{M_4^* - \lambda_{-1}M_2^*}\right.\right) = M^{*\prime}, \tag{2.12}$$

con

$$N^* = (M_3^* + M_4^*\lambda_{-1}^*) - \lambda_{-1}(M_1^* + M_2\lambda_{-1}^*), \tag{2.13}$$

dove M_1^*, M_2^*, M_3^*, M_4^* sono quadranti di M^*, di cui il secondo e il quarto arbitrari.

Da (2.11) segue ovviamente

$$0(\tau \mid 0) = (\tau^* \mid 0)M_{-1}^{*\prime} \tag{2.11'}$$

e analogamente

$$0(\tau^* \mid 0) = (\tau \mid 0)M'_{-1}, \tag{2.11*'}$$

ove

$$M' = H^*MH^{-1} = \left(\frac{M_1 + M_2\lambda_{-1}}{N}\left|\frac{M_2}{M_4 - \lambda_{-1}^*M_2}\right.\right), \tag{2.12*}$$

con

$$N = (M_3 + M_4\lambda_{-1}) - \lambda_{-1}^*(M_1 + M_2\lambda_{-1}). \tag{2.13*}$$

Dalle (2.11') e (2.11*'), per l'indipendenza lineare razionale delle colonne di τ, τ^*, si ottiene che:

$$N = 0, \qquad N^* = 0, \tag{2.14}$$

e poichè M_2, M_4, M_2^*, M_4^* sono matrici intere arbitrarie, le (2.1'), (2.1*') ci permettono di affermare che:

b) *nelle matrici razionali* (2.4) e (2.4*) *vi sono* $R_k - \varrho_k$, *rispettivamente* $R_k^* - \varrho_k^*$, *colonne ad elementi arbitrari. Coll'ordinamento di cicli di cui avanti queste colonne sono le ultime e inoltre si ha*: $T_3 = 0$, $T_3^* = 0$.

Per l'indipendenza lineare reale delle colonne di σ, σ^*, e ripetendo un ragionamento analogo al precedente che può farsi partendo dalle (1.29), si ha che:

c) *anche nelle matrici reali* (2.8) e (2.8*) *vi sono* $R_k - 2p_k$, *rispettivamente* $R_k^* - 2p_k^*$, *colonne arbitrarie. Queste, con il supposto ordinamento di cicli, sono le ultime e inoltre si ha* $T_3' = 0$, $T_3^{*\prime} = 0$.

7. – Dalle (2.11') e (2.11*'), sempre per l'indipendenza lineare razionale delle colonne di τ, τ^*, oltre alle (2.14), si ha pure

$$M_1 + M_2\lambda_{-1} = 0, \qquad M_1^* + M_2^*\lambda_{-1}^* = 0 \tag{2.15}$$

sicchè, sostituendo nelle (2.13) e (2.13*), segue che:

$$M_3 + M_4\lambda_{-1} = 0\,, \qquad M_3^* + M_4^*\lambda_{-1}^* = 0\,, \tag{2.16}$$

e perciò che

$$M = \left(\frac{-M_2\lambda_{-1}}{-M_4\lambda_{-1}}\middle|\frac{M_2}{M_4}\right), \quad M^* = \left(\frac{-M_2^*\lambda_{-1}^*}{-M_4^*\lambda_{-1}}\middle|\frac{M_2^*}{M_4^*}\right), \tag{2.17}$$

nelle quali i quadranti M_2 ed M_4 sono arbitrari. Tenendo presenti le (2.15) si conclude col seguente risultato:

la classe di corrispondenze $\mathcal{C}$ è caratterizzata della coppia di matrici razionali T_1, T_1^* che figurano nelle (2.6) e (2.6*) *e analogamente dalla coppia di matrici reali T_1', $T_1^{*\prime}$ che figurano nelle* (2.10) e (2.10*). Queste due coppie di matrici sono determinate da $\mathcal{C}$ a meno di un fattore scalare appartenente per la prima al campo razionale, per la seconda al campo reale: moltiplicando π e π^* pel m. c. d. dei termini di T_1, T_1^* questa coppia diventa di matrici intere e primitive e riesce perfettamente determinata da $\mathcal{C}$.

8. – Dalla (2.6) e (2.6*) si deducono le due relazioni

$$\pi^*\pi\tau = \tau(T_1T_1^*)_{-1}\,, \tag{2.18}$$

$$\pi\pi^*\tau^* = \tau^*(T_1^*T_1)_{-1}\,, \tag{2.18*}$$

che caratterizzano le classi di corrispondenze $\mathcal{C}\mathcal{C}^{-1}$ e $\mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}$ rispettivamente su V_r e V_r^*.

Dalle stesse (2.6) e (2.6*) tenendo presente la (1.14) e l'analoga relazione cui soddisfa τ^*, si ha

$$\tau^*(T_1)_{-1}B\tau_{-1} = 0\,, \tag{2.19}$$

$$\tau(T_1^*)_{-1}B^*\tau_{-1}^* = 0\,, \tag{2.19*}$$

le quali, essendo per ipotesi conseguenza della stessa relazione bilineare tra τ e τ^*, ci assicurano che, dopo conveniente determinazione del fattore (intero) scalare a meno del quale sono date le matrici B e B^*, può porsi:

$$(T_1)_{-1}B = \pm B^*T_1^*\,. \tag{V}$$

Tenendo conto di questa (V), le stesse (2.6) e (2.6*) ci danno:

$$\pi\cdot\tau B\bar{\tau}_{-1} = \pm\,\tau^*B^*\bar{\tau}_{-1}^*\cdot\bar{\pi}_{-1}^* \tag{2.20}$$

la quale, poichè gli altri due fattori sono matrici non degeneri, ci assicura che:

a) *π e π^* hanno la stessa caratteristica.* E poichè si deduce anche che:

$$\pi^*\pi\cdot\tau B\bar{\tau}_{-1} = \pm\,\pi^*\tau^*B^*\bar{\tau}_{-1}^*\bar{\pi}_{-1}^* \tag{2.21}$$

e analogamente che:

$$\pi\pi^* \cdot \tau^* B^* \tau^*_{-1} = \pm \pi\tau B\bar{\tau}_{-1}\bar{\pi}_{-1} . \tag{2.21*}$$

Da cui, osservando che i secondi membri sono di caratteristiche eguali rispettivamente a quelle di π^* e di π, si ha che [13]:

b) *i prodotti* $\pi^*\pi$ *e* $\pi\pi^*$ *hanno la stessa caratteristica comune a* π *e* π^*.

Dalla (2.21) si ha, identicamente rispetto ad x,

$$(\pi^*\pi - xI)\tau B\bar{\tau}_{-1} = \pm \pi^*\tau^* B^* \bar{\tau}^*_{-1}\bar{\pi}^*_{-1} - x\tau B\bar{\tau}_{-1} \tag{2.22}$$

la quale, per una nota proprietà [14], ci assicura che:

c) *le radici caratteristiche diverse da zero di* $\pi^*\pi$ *e quindi anche quelle di* $\pi\pi^*$ *sono tutte reali e dello stesso segno.*

Dalle (2.18) si deduce immediatamente che:

$$\begin{pmatrix} \pi^*\pi & 0 \\ 0 & \bar{\pi}^*\bar{\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ \bar{\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau \\ \bar{\tau} \end{pmatrix} (T_1 T_1^*)_{-1} , \tag{2.23}$$

la quale, poichè le colonne di τ sono razionalmente indipendenti, ci assicura che:

d) *non può aversi* $\pi^*\pi = 0$ *senza avere anche* $T_1 T_1^* = 0$. *Così per* $\pi\pi^*$ *e* $T_1^* T_1$.

Ponendo, come si può (dopo aver moltiplicato per i se B è emisimmetrica),

$$\tau B\bar{\tau}_{-1} = m \cdot \bar{m}_{-1} ,$$

dal secondo membro della (2.21) si vede che le radici caratteristiche di $\pi^*\pi$ coincidono con quelle di

$$\pm\, m^{-1}\pi^*\tau^* B^* \bar{\tau}^*_{-1}\bar{\pi}^*_{-1}\bar{m}^{-1}_{-1} .$$

Questa (sempre dopo eventuale moltiplicazione per i) è una matrice antisimmetrica, perciò l'annullarsi di tutte le sue radici caratteristiche equivale all'annullarsi della matrice; ed essendo $\tau^* B^* \bar{\tau}^*_{-1}$ (a meno del fattore scalare i, se k è dispari) matrice discriminante di una forma hermitiana definita, questo annullamento si ha allora e solo che

$$m^{-1}\pi^* = 0 ,$$

ossia quando π^* è nulla. Perciò, riunendo con l'analogo risultato che si ha scambiando τ con τ^*, si deduce che:

---

[13] Basta osservare che per B antisimmetrica può porsi $\tau B\bar{\tau}_{-1} = m \cdot \bar{m}_{-1}$, con m matrice non degenere e che il prodotto di due matrici trasposte coniugate ha la caratteristica comune ai fattori.

[14] S. CHERUBINO, *Su certe equazioni fondamentali e sul simbolismo delle matrici.* Rend. Sem. Matem. Univ. Roma (4) 1, 96-109 (1936), n. 4.

e) *annullandosi il prodotto $\pi^*\pi$ si annulla anche quello $\pi\pi^*$ insieme a ciascun fattore, nonchè ciascuno dei prodotti $T_1T_1^*$ e $T_1^*T_1$ coi loro fattori.*

Quest'ultimo fatto segue dalle (2.6) e (2.6*) per l'indipendenza razionale delle colonne delle matrici τ e τ^*.

Infine, a causa della c), le radici in questione sono tutte zero allora e solo che lo è la loro somma, cioè la comune traccia di $\pi^*\pi$ e $\pi\pi^*$, quindi:

f) *se la traccia di $\pi^*\pi$ o quella di $\pi\pi^*$ è zero e solo allora tutte le matrici di cui alla proposizione* e) *si annullano contemporaneamente.*

Osserviamo infine che, poichè τ e τ^* sono a righe indipendenti, l'annullarsi del secondo membro delle relazioni (2.6) e (2.6*) dovuto all'annullarsi di T_1 o di T_1^* porta di necessità all'annullarsi di π e di π^*. Allo stesso modo, dalle (2.18) e (2.18*) si ha che non può annullarsi $T_1T_1^*$ o $T_1^*T_1$ senza che si annulli il prodotto $\pi^*\pi$ o quello $\pi\pi^*$, che è lo stesso. Possiamo dunque affermare che:

g) *se uno dei prodotti $T_1T_1^*$ o $T_1^*T_1$ si annulla, si annulla anche l'altro insieme ai loro fattori e alle matrici π e π^*.*

9. – Sostituendo τ e τ^* con σ e σ^*, quindi T_1 e T_1^* con T_1' e $T_1^{*\prime}$, ossia partendo dalle (2.10) e (2.10*), e perciò sostituendo B e B^* con C e C^*, tutte le proprietà di cui al n. prec. valgono inalterate. In più, poichè la (2.23) diventa

$$(2.24)\qquad \left(\begin{array}{c|c}\pi^*\pi & 0\\ \hline 0 & \bar{\pi}^*\bar{\pi}\end{array}\right)\begin{pmatrix}\sigma\\ \hline \bar{\sigma}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sigma\\ \hline \bar{\sigma}\end{pmatrix}(T_1'T_1^{*\prime})_{-1},$$

e poichè $\begin{pmatrix}\sigma\\ \hline \bar{\sigma}\end{pmatrix}$ è una matrice di ordine $2p$ non degenere, si ha che:

a) *la coppia di matrici*

$$\left(\begin{array}{c|c}\pi^*\pi & 0\\ \hline 0 & \bar{\pi}^*\bar{\pi}\end{array}\right),\qquad T_1'T_1^{*\prime},$$

e analogamente l'altra coppia

$$\left(\begin{array}{c|c}\pi\pi^* & 0\\ \hline 0 & \overline{\pi\pi^*}\end{array}\right),\qquad T_1^{*\prime}T_1',$$

è di matrici simili, quindi con le stesse radici caratteristiche, mentre le radici caratteristiche diverse da zero, necessariamente tutte dello stesso segno, sono comuni a tutte le matrici delle due coppie.

Ne segue in particolare che:

b) *la traccia comune dei prodotti $\pi^*\pi$ e $\pi\pi^*$ è metà di quella comune agli altri due prodotti $T_1'T_1^{*\prime}$, $T_1^{*\prime}T_1'$.*

Si può quindi, in definitiva, affermare che:

c) *affinchè una e quindi tutte le matrici*

$$\pi\,,\quad \pi^*\,,\quad T_1\,,\quad T_1^*\,,\quad T_1'\,,\quad T_1^{*\prime}$$

si annullino è necessario e sufficiente che sia zero la traccia di uno e quindi entrambi i prodotti $T_1'T_1^{*\prime}$, $T_1^{*\prime}T_1'$ *ovvero* $\pi\pi^*$, $\pi^*\pi$.

10. – La traccia del prodotto $T_1T_1^*$ (che è la stessa di $T_1^*T_1$) non gode la stessa proprietà, a meno che non sia $\varrho_k = 2p_k$ ovvero $\varrho_k^* = 2p_k$, nel qual caso si ha $\tau = \sigma$, ovvero $\tau^* = \sigma^*$. Infatti, se $\varrho_k > 2p_k$, si può porre, con conveniente ordinamento di cicli:

$$\tau = (\sigma \mid \sigma\nu)\,, \tag{2.25}$$

essendo ν una matrice di tipo $(2p,\ \varrho - 2p)$ che si prova esser reale imitando il ragionamento fatto per provare la realtà di μ.

Si possono quindi ripetere i ragionamenti fatti al n. 5 e si trova che, posto

$$L = \left(\begin{array}{c|c} I_3 & 0 \\ \hline -\nu_{-1} & I_4 \end{array}\right), \qquad L^* = \left(\begin{array}{c|c} I_3^* & 0 \\ \hline -\nu_{-1}^* & I_4^* \end{array}\right), \tag{2.26}$$

con I_3, I_4, I_3^*, I_4^* matrici identiche di ordini opportuni, si ha che $\tau L_{-1} = (\sigma \mid 0)$ e che:

$$LT_1L^{*-1} = \left(\begin{array}{c|c} T_4 & T_{12} \\ \hline 0 & T_{14} \end{array}\right), \tag{2.27}$$

in cui, per le osservazioni del n. 6, le ultime $\varrho_k^* - 2p_k^*$ colonne, cioè le matrici T_{12} e T_{14} possono fissarsi ad arbitrio. Analogamente per $L^*T_1^*L^{-1}$.

Quindi si avrà:

$$LT_1T_1^*L^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} T_{11}T_{11}^* & T_{12}' \\ \hline 0 & T_{14}T_{14}^* \end{array}\right), \tag{2.28}$$

ove il prodotto $T_{14}T_{14}^*$ potrà fissarsi a piacere come T_{12}'. La traccia di $T_1T_1^*$ è dunque variabile ad arbitrio e perciò nessuna conseguenza invariantiva può trarsi dal che essa sia o non sia zero.

Per la chiarezza, è bene rilevare che se uno dei due caratteri ϱ_k, ϱ_k^*, ad es. il primo, eguagliasse $2p_k$, la (2.27) diventerebbe

$$LT_1L^{*-1} = (T_{11} \mid T_{12})\,,$$

mentre si avrebbe

$$L^*T_1^*L^{-1} = \left(\frac{T_{11}^*}{0}\right),$$

e perciò risulterebbe, almeno agli effetti della traccia,

$$LT_1T_1^*L^{-1} = T_{11}T_{11}^*,$$

$$L^*T_1^*T_1L^{*-1} = T_{11}^*T_{11}.$$

Possiamo perciò affermare che:

solo se il numero dei k-cicli indipendenti a periodi non nulli eguaglia su una almeno delle varietà V_r, V_r^* il doppio dei corrispondenti integrali k-pli indipendenti, lo annullarsi della traccia di uno e quindi di entrambi i prodotti $T_1T_1^*$ o $T_1^*T_1$ equivale all'annullarsi delle quattro matrici T_1, T_1^*, π, π^*.

11. – Mostriamo infine come si stabilisce la relazione (V) con le altre analoghe.

Dalle relazioni

$$\sigma C\sigma_{-1} = 0, \tag{2.29}$$

$$\sigma^* M\sigma_{-1} = 0, \tag{2.30}$$

seguono le altre due:

$$\left(\frac{\sigma}{\bar\sigma}\right) C \left(\frac{\sigma}{\bar\sigma}\right)_{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \alpha \\ \hline \bar\alpha & 0 \end{array}\right), \qquad \alpha = \sigma C\bar\sigma_{-1}, \tag{2.31}$$

$$\left(\frac{\sigma^*}{\bar\sigma^*}\right) M \left(\frac{\sigma}{\bar\sigma}\right)_{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \beta \\ \hline \bar\beta & 0 \end{array}\right), \qquad \beta = \sigma^* M\bar\sigma_{-1}. \tag{2.32}$$

Moltiplicando a destra quest'ultima per la inversa della precedente, si ha:

$$\left(\frac{\sigma^*}{\bar\sigma^*}\right) \cdot MC^{-1} \cdot \left(\frac{\sigma}{\bar\sigma}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \pi & 0 \\ \hline 0 & \bar\pi \end{array}\right), \qquad \pi = \beta\alpha^{-1}, \tag{2.33}$$

cioè

$$\pi\sigma = \sigma^*(T_1')_{-1}, \tag{2.34}$$

ove

$$T_1' = C_{-1}^{-1}M_{-1} \tag{2.35}$$

e quindi

$$M_{-1} = C_{-1}T_1'. \tag{2.36}$$

Analogamente, partendo dalle relazioni

$$\sigma^*C^*\sigma_{-1}^* = 0, \qquad \sigma M_{-1}\sigma_{-1}^* = 0,$$

si ottiene

$$M_{-1} = (T_1^{*\prime})_{-1} C^* \tag{2.36*}$$

da cui, poichè supponiamo che M cioè la relazione tra σ e σ^* sia fissata, si ricava l'analoga delle (V), cioè la:

$$C_{-1} T_1' = (T_1^{*\prime})_{-1} C^* . \tag{VI}$$

Orbene, la (2.27), come è consentito dall'arbitrarietà di T_{12} e T_{14}, ci dà:

$$T_1 = L^{-1} \left(\begin{array}{c|c} T_1' & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) L^* . \tag{2.37}$$

e analogamente:

$$T_1^* = L^{*-1} \left(\begin{array}{c|c} T_1^{*\prime} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) L . \tag{2.37*}$$

Così pure, l'arbitrarietà delle ultime $\varrho - 2p$ righe (e colonne) di B, ci consente di porre:

$$B = L_{-1} \left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) L ,$$

e analogamente:

$$B^* = L_{-1}^* \left(\begin{array}{c|c} C^* & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) L^* ,$$

Dopo di che, la (VI) può scriversi:

$$\left(\begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)_{-1} \left(\begin{array}{c|c} T_1' & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} T_1^{*\prime} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)_{-1} \left(\begin{array}{c|c} C^* & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) ,$$

da cui, moltiplicando a sinistra per L e a destra per L^*, si ha:

$$B_{-1} T_1 = (T_1^*)_{-1} B^* . \tag{V'}$$

In modo del tutto analogo si ottiene che:

$$A_{-1} T = T_{-1}^* A^* . \tag{VII}$$

Il semplice calcolo qui effettuato ci ha fatto ottenere le (V'), (VI) e (VII) senza alcuna indeterminazione di segno e senza ricorso a nozioni complementari, mentre nella teoria classica delle curve algebriche e delle varietà abeliane si ricorre alle funzioni theta o a considerazioni topologiche.

§ 3. – Invarianti di COMESSATTI - CASTELNUOVO.

12. – Nel caso di due curve algebriche $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}^*$ le corrispondenze algebriche (α, β) danno luogo a due serie algebriche semplicemente infinite γ'_α, γ'_β di gruppi di punti le cui più importanti proprietà dipendono da certi invarianti aritmetici che furono considerati dal COMESSATTI ([15]) nel 1913 e ritrovati dal CASTELNUOVO ([16]) nel 1921. Detti invarianti si esprimono mediante gli elementi delle matrici $\pi^*\pi$ e $\pi\pi^*$ oppure $T'T^{*'}$, $T^{*'}T'$ che compaiono nelle relazioni di HURWITZ. Essi sono stati riottenuti nella mia Nota citata nella annotazione ([4]), *b*), nel modo che qui sotto riportiamo brevemente, riferendoci alle varietà V_r, V_r^* senza con ciò voler affermare che questi caratteri riflettono senz'altro proprietà di serie di gruppi di punti esistenti su esse, salvo nel caso ovvio di $k = 1$ [ALBANESE, loc. cit. in ([3])]. Detti caratteri sono i coefficienti dell'equazione caratteristica di $\pi^*\pi$:

$$(3.1) \qquad (\pi^*\pi - xI) = (-1)^p x^p + (-1)^{p-1} i_1 x^{p-1} + (-1)^{p-2} i_2 x^{p-1} + \ldots + i_k$$

ovvero quelli dell'equazione caratteristica di $\pi\pi^*$ che coincide con questa nei coefficienti diversi da zero.

Il numero delle radici di questa equazione che non sono eguali a zero coincide con la caratteristica comune di π e π^* e dei due prodotti $\pi^*\pi$ e $\pi\pi^*$. Poichè queste radici son tutte dello stesso segno, se h è il loro numero i coefficienti i_s con indice superiore ad h son tutti zero, mentre gli altri son tutti diversi da zero. Orbene, poichè il secondo membro della (2.21), moltiplicato per i se k è dispari, è una matrice antisimmetrica o antiemisimmetrica, la sua caratteristica coincide col numero delle radici caratteristiche che son diverse da zero e questo numero, come risulta dalla (2.22) e dal ragionamento che ci ha condotto alla proposizione e) del n. 8 è proprio lo stesso delle radici caratteristiche diverse da zero di $\pi^*\pi$. Ne viene senz'altro che:

a) *il numero delle radici caratteristiche di $\pi^*\pi$ e di $\pi\pi^*$ diverse da zero è eguale alla comune caratteristica delle matrici π, π^*, $\pi^*\pi$ e $\pi\pi^*$ e questa caratteristica è h allora e solo che è zero il coefficiente i_{h+1} della* (3.1) *e sono quindi zero tutti quelli di indice superiore.*

b) *se la comune caratteristica di π e π^* è h, su V_r e V_r^* vi sono rispettivamente $p_k - h$ e $p_k^* - h$ integrali k-pli di prima specie indipendenti che danno*

([15]) A. COMMESSATTI, *Sulle serie algebriche semplicemente infinite di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica*, Rend. Circ. Mat. Pal. **36**, 35-37 (1913).

([16]) G. CASTELNUOVO, *Sulle funzioni abeliane*. IV: *Applicazioni alle serie algebriche di gruppi sopra una curva*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (5) **30**, 355-359 (1921).

periodi zero sugli R_k ed R_k^* cicli di V_r, V_r^* ottenuti combinando linearmente quelli fondamentali con gli interi delle righe della matrice T^* o della matrice T.

Poichè la (VI) può scriversi:

$$(T_1')_{-1}C = C_{-1}^* T_1^{*\prime},$$

si ha

$$(T_1' T_1^{*\prime})_{-1} C = (T_1^{*\prime})_{-1} C_{-1}^* T_1^{*\prime}$$

la quale ci dice che:

c) *$(T_1' T_1^{*\prime})_{-1} C$ è una matrice simmetrica o emisimmetrica insieme a C^*. Così $C_{-1}^*(T_1^{*\prime} T_1')$ è simmetrica o emisimmetrica insieme a C.*

Quindi, tenendo presente la a) del n. 9:

d) *per k dispari*

$$[(T_1' T_1^{*\prime})_{-1} - x I_0] C, \qquad \text{con} \qquad I_0 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline -1 & 0 \end{array}\right), \tag{3.2}$$

è una matrice emisimmetrica qualunque sia l'indeterminata x reale. Il suo pfaffiano è:

$$|\pi^* \pi - x I'| \sqrt{|C|}. \tag{3.3}$$

Se $R_k = 2p_k$ (il che accade per $k = 1$) e k è dispari, C è una matrice emisimmetrica intera, quindi, per un'opportuna H unimodulare, si ha (FROBENIUS):

$$HCH_{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & e \\ \hline -e & 0 \end{array}\right),$$

dove e è la matrice diagonale di ordine p_k che ha per elementi principali i divisori elementari $e_1, e_2, \dots, e_p$ di C. Perciò il pfaffiano (3.3) diventa

$$|\pi^* \pi - x I| \cdot |e|, \tag{3.4}$$

mentre il determinante della (3.2) risulta

$$|(T_1' T_1^{*\prime})_{-1} - x I| \cdot |e|^2$$

Quindi, come segue dalle note proprietà dei pfaffiani, si ha che:

e) *i coefficienti del polinomio in x:*

$$|\pi^* \pi - x I|$$

moltiplicati per l'intero $|e|$ *sono numeri interi funzioni razionali intere degli elementi di $T_1' T_1^{*\prime}$.*