ENRIQUE LINÉS ESCARDÓ (*)

Sobre los productos funcionales relativisticamente invariantes. (**)

En primer lugar se expone una aplicación de la propiedad de invariancia de la « traza proyectiva » respecto de las substituciones lineales y homogeneas, al cálculo de la traza de una función que depende de una forma bilineal respecto de las variables. Se dá tambien una regla operatoria que permite reducir el cálculo de varias trazas proyectivas respecto a distintos sistemas de variables, a una sola traza respecto a todas las variables.

Aplicando estas dos reglas se obtienen con facilidad y en forma simple las indicatrices proyectivas de los distintos productos funcionales relativisticamente invariantes, introducidos por L. FANTAPPIÈ (1) con el nombre de productos lorentzianos.

1. – Traza proyectiva de una función que depende de una forma bilineal en las variables.

I. – La propiedad de invariancia de la traza proyectiva de una función $q(t_1, ..., t_n, t^1, ..., t^n)$ expresa, que si se efectua sobre las variables $t_1, ..., t_n$ una transformación lineal y homogenea definida por la matriz A, y simultaneamente se efectua sobre las variables $t^1, ..., t^n$ la transformación dual, es decir, la definida por la matriz $(A^{-1})^T$ (transpuesta de la inversa de A), el valor de la traza proyectiva permanece invariable (2). Escritas las transformaciones en

(*) Dirección: Calle de Laforja 77, 5º, 2ª; Barcelona, España.

(**) Trabajo realizado con subvencion del Patronato JUAN DE LA CIERVA. Recibido el día 20-III-1951.

(1) L. FANTAPPIÈ, *Costruzione effettiva di prodotti funzionali relativisticamente invarianti*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **29**, 43-69 (1949).

(2) L. FANTAPPIÈ, *L'indicatrice proiettiva dei funzionali lineari e i prodotti funzionali proiettivi*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **22**, 181-289 (1943); cfr. pág. 224.

forma matricial, se tiene:

$$(1.1)\qquad \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \cdot \\ t_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \bar{t}_1 \\ \bar{t}_2 \\ \cdot \\ \bar{t}_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} t^1 \\ t^2 \\ \cdot \\ t^n \end{pmatrix} = (A^{-1})^T \begin{pmatrix} \bar{t}^1 \\ \bar{t}^2 \\ \cdot \\ \bar{t}^n \end{pmatrix}$$

y entonces es:

$$(1.2)\qquad \overset{\triangle}{T}_{t_i t^i}\, q(t_1, \dots, t_n, t^1, \dots, t^n) = \overset{\triangle}{T}_{\bar{t}_i \bar{t}^i}\, q(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n, \bar{t}^1, \dots, \bar{t}^n)\,.$$

Esta propiedad es muy util en el cálculo de algunas trazas proyectivas, ya que permite reducirlas a otras mas simples. Tal es el caso del cálculo de la traza proyectiva siguiente:

$$(1.3)\qquad \overset{\triangle}{T}_{t_i t^i} \frac{1}{1 + \sum\limits_{i,j=1}^{n} \alpha_j^i t_i t^j}\,,$$

en la cual se reducirá la forma bilineal del denominador a otra mas simple escogiendo una transformación lineal y homogenea conveniente, para las variables $t_1, \dots, t_n$. Naturalmente, para que la traza (1.3) exista, es suficiente que la función dada sea regular en dos n-cilindros asociados, definidos por las desigualdades

$$(1.4)\qquad |t_i| \leqslant \varrho_i \quad \text{y} \quad |t^i| \leqslant \frac{1}{\varrho_i}\,, \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

donde los números ϱ_i son fijos. Para que así ocurra, bastará suponer inicialmente que los coeficientes α_j^i son de módulo suficientemente pequeño; por ejemplo, basta tomar como cota de los módulos $a = \frac{1}{n^2}$: es decir:

$$(1.5)\qquad |\alpha_j^i| < \frac{1}{n^2}\,,$$

para que se verifiquen las condiciones (1.4), ya que para $\varrho_i = 1$ sería $|\sum\limits_{i,j=1}^{n} \alpha_j^i t_i t^j| < 1$, y la función dada será desarrollable en serie absolutamente convergente.

La forma bilineal del denominador expresada como producto de matrices, es:

$$(1.6)\qquad \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_j^i t_i t^j = (t^1, t^2, \dots, t^n)\, \mathcal{A} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \cdot \\ t_n \end{pmatrix},$$

donde se ha representado por $\mathfrak{A}$ la matriz

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^n \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_n^1 & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^n \end{pmatrix}.$$

Si en (1.6) sometemos a las variables $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ y a las $(t^1, t^2, \dots, t^n)$ a sendas transformaciones lineales de la forma (1.1), se tendrá:

$$(1.7) \qquad \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_j^i t_i t^j = (\bar t^1, \bar t^2, \dots, \bar t^n)\, A^{-1} \mathfrak{A} A \begin{pmatrix} \bar t_1 \\ \bar t_2 \\ \cdot \\ \bar t_n \end{pmatrix}.$$

Vemos pues, que la matriz de la nueva forma bilineal es $A^{-1}\mathfrak{A}A$, que es la matriz transformada de la $\mathfrak{A}$ por la A (³).

Escojamos ahora la transformación A de manera que la matriz $A^{-1}\mathfrak{A}A$ tenga la forma mas sencilla posible, es decir, aquella transformación que reduce a $\mathfrak{A}$ a la forma canónica (⁴). Para ello, consideremos la ecuación caracteristica de la matriz $\mathfrak{A}$:

$$(1.8) \qquad \begin{vmatrix} \lambda - \alpha_1^1 & -\alpha_1^2 & \dots & -\alpha_1^n \\ -\alpha_2^1 & \lambda - \alpha_2^2 & \dots & -\alpha_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\alpha_n^1 & -\alpha_n^2 & \dots & \lambda - \alpha_n^n \end{vmatrix} = 0,$$

y supongamos que todas sus raices sean distintas; entonces se puede encontrar una transformación A de manera que la matriz $A^{-1}\mathfrak{A}A$ tenga la forma diagonal (⁵)

$$(1.9) \qquad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

y la forma bilineal transformada será:

$$(1.10) \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar t_i \bar t^i,$$

(³) G. Julia, *Introduction mathématique aux théories quantiques*, Première partie, Gauthier-Villars, Paris 1936, cfr. pág. 73; o bien B. L. van der Waerden, *Moderne Algebra*, Zweiter Teil, J. Springer, Berlin 1940, cfr. pág. 121.

(⁴) G. Julia, Lug. cit., pág. 76; o bien B. L. van der Waerden, Lug. cit., pág. 127.

(⁵) G. Julia, Lug. cit., pág. 78.

y el cálculo de la traza proyectiva (1.3) se reducirá al de

$$\overset{\triangle}{T}_{\bar{t}_i \bar{t}^i} \frac{1}{1 + \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{t}_i \bar{t}^i} . \tag{1.11}$$

La manera mas breve de calcular esta traza es por desarrollo en serie, y aplicación directa de la definición de traza (6). El desarrollo en serie de la (1.11) nos dá:

$$\overset{\triangle}{T}_{\bar{t}_i \bar{t}^i} \frac{1}{1 + \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{t}_i \bar{t}^i} = \overset{\triangle}{T}_{\bar{t}_i \bar{t}^i} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (\lambda_1 \bar{t}_1 \bar{t}^1 + \lambda_2 \bar{t}_2 \bar{t}^2 + \ldots + \lambda_n \bar{t}_n \bar{t}^n)^m . \tag{1.12}$$

Observese, que la serie del segundo miembro es convergente, ya que las raices de la ecuación caracteristica (1.8) están acotadas, pues la aplicación del teorema de A. HIRSCH (7) nos dice, que si a es una cota de los elementos de la matriz $\mathscr{A}$, toda raiz de la ecuación caracteristica es tal que $|\lambda_i| < an$; y por lo tanto, aplicado a nuestro caso en que $a = \frac{1}{n^2}$ se tendrá $|\lambda_i| < \frac{1}{n}$, y en consecuencia

$$|\lambda_1 \bar{t}_1 \bar{t}^1 + \lambda_2 \bar{t}_2 \bar{t}^2 + \ldots + \lambda_n \bar{t}_n \bar{t}^n| < 1$$

para los valores de $\bar{t}_i$ y $\bar{t}^i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ pertenecientes a dos n-cilindros asociados cualesquiera, y en particular para los antes considerados.

En la formula (1.12) se podrá, por lo tanto, calcular la traza proyectiva término a término, y así obtenemos que la traza proyectiva del termino n-esimo

$$\overset{\triangle}{T}_{\bar{t}_i \bar{t}^i} (-1)^m \sum_{r_1, \ldots, r_n} \frac{m!}{r_1! \, r_2! \ldots r_n!} \lambda_1^{r_1} (\bar{t}_1 \bar{t}^1)^{r_1} \lambda_2^{r_2} (\bar{t}_2 \bar{t}^2)^{r_2} \ldots \lambda_n^{r_n} (\bar{t}_n \bar{t}^n)^{r_n} , \tag{1.13}$$

$$(m = r_1 + r_2 + \ldots + r_n)$$

deducida de la misma definición, es:

$$\overset{\triangle}{T}_{\bar{t}_i \bar{t}^i} (-1)^m \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{t}_i \bar{t}^i \right)^m = \sum_{r_1 \ldots r_n} \lambda_1^{r_1} \lambda_2^{r_2} \ldots \lambda_n^{r_n} . \tag{1.14}$$

Tenemos pues que la traza buscada (1.12), vendrá dada por medio de la

(6) L. FANTAPPIÈ, Lug cit. en (2), pág. 207.

(7) C. C. MAC DUFFEE, *The theory of matrices*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd. II, J. Springer, Berlin 1933; cfr. págs. 25 y 26.

serie convergente

$$(1.15)\qquad \overset{\triangle}{T}_{\bar{t}_i \bar{t}^i} \frac{1}{1+\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{t}_i \bar{t}^i} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{r_1+\ldots+r_n=m} \lambda_1^{r_1} \lambda_2^{r_2} \ldots \lambda_n^{r_n} .$$

Ahora bien, se observa que la suma de esta serie es precisamente

$$(1.16)\qquad \frac{1}{1-\lambda_1} \frac{1}{1-\lambda_2} \cdots \frac{1}{1-\lambda_n} = \left[\frac{1}{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n)}\right]_{\lambda=1},$$

en donde el denominador de la última fracción es la descomposición factorial del primer miembro de la ecuación caracteristica:

$$[(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n)]_{\lambda=1} = \left|\begin{matrix} \lambda-\alpha_1^1 & -\alpha_1^2 & \ldots & -\alpha_1^n \\ -\alpha_2^1 & \lambda-\alpha_2^2 & \ldots & -\alpha_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\alpha_n^1 & -\alpha_n^2 & \ldots & \lambda-\alpha_n^n \end{matrix}\right|_{\lambda=1},$$

lo que nos dá la siguiente forma simple de la traza (1.3) buscada:

$$(1.17)\qquad \overset{\triangle}{T}_{\bar{t}_i \bar{t}^i} \frac{1}{1+\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_j^i t_i t^j} = \left|\begin{matrix} 1-\alpha_1^1 & -\alpha_1^2 & \ldots & -\alpha_1^n \\ -\alpha_2^1 & 1-\alpha_2^2 & \ldots & -\alpha_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\alpha_n^1 & -\alpha_n^2 & \ldots & 1-\alpha_n^n \end{matrix}\right|^{-1}.$$

Esta formula, cuya validez se ha establecido para valores de $|\alpha_i^j|$ suficientemente pequeños (1.5), se amplia para aquellos valores de α_i^j alcanzables por prolongación analítica en los cuales el segundo miembro sea regular. Adviertase, además, que el resultado final es independiente del orden de multiplicidad de las raices de la ecuación caracteristica.

II. – Supongamos finalmente que se trata de hallar la traza proyectiva de una función $f(z)$ que depende de la forma bilineal $z = \sum_{i,j}^{1-n} \alpha_j^i t_i t^j$.

Expresemos la función $f(z)$ por medio de un producto simétrico de la manera siguiente ([8]):

$$(1.18)\qquad f\left(\sum_{i,j}^{1-n} \alpha_j^i t_i t^j\right) = \frac{1}{1-z\sum_{i,j}^{1-n} \alpha_j^i t_i t^j} \underset{z}{\circ} f(z) ,$$

([8]) Escribimos el producto simétrico de dos funciones, colocando el simbolo ordinario del circulito, entre las dos funciones, y cuando pueda haber confusión se indicará debajo del mismo la letra o letras a las que se refiere el producto simétrico. Esta notación es cómoda cuando las funciones de que se trate tengan una expresión complicada.

para lo cual se habrá de suponer que los coeficientes α_j^i de la forma, son suficientemente pequeños para que la primera función del producto anterior sea regular para los valores de z interiores a un circuito asociado a aquel en que lo es $f(z)$, y que esto suceda para los valores de la $t_i t^j$ pertenecientes a dos cilindros asociados en los cuales tenga sentido la traza proyectiva respecto de estas variables del primer factor.

El cálculo de la traza proyectiva de la función f respecto de las variables $t_i t^j$ se reduce, por consiguiente al ya calculado en (1.17), y se tiene:

$$\text{(1.19)} \qquad \overset{\triangle}{T}_{t_i t^i} f\left(\sum_{i,j}^{1-n} \alpha_j^i t_i t^j\right) =$$

$$= \left(\overset{\triangle}{T}_{t_i t^i} \frac{1}{1 - z \sum\limits_{i,j}^{1-n} \alpha_j^i t_i t^j}\right) \underset{z}{\circ} f(z) = \begin{vmatrix} 1 + z\alpha_1^1 & z\alpha_1^2 & \dots & z\alpha_1^n \\ z\alpha_2^1 & 1 + z\alpha_2^2 & \dots & z\alpha_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z\alpha_n^1 & z\alpha_n^2 & \dots & 1 + z\alpha_n^n \end{vmatrix}^{-1} \underset{z}{\circ} f(z) .$$

2. – Reducción del cálculo de varias trazas proyectivas respecto a distintos sistemas de variables, a una sola traza proyectiva respecto a todas las variables.

Consideraremos, para simplificar, el caso de dos trazas proyectivas sucesivas.

Sea la función $f(t_1, t^1; t_2, t^2; t_3, t^3; \tau_1, \tau^1; \tau_2, \tau^2)$ que es regular cuando las variables t_i, t^i y las τ_i, τ^i varian respectivamente en los cilindros asociados siguientes:

$$\text{(2.1)} \quad |t_i| \leqslant \varrho_i \quad \text{y} \quad |t^i| \leqslant \frac{1}{\varrho_i} \quad (i = 1, 2, 3) \; ; \quad |\tau_i| \leqslant \varrho_i' \quad \text{y} \quad |\tau^i| \leqslant \frac{1}{\varrho_i'} \quad (i = 1, 2)$$

(hemos supuesto tres pares de variables t_i, t^i y dos pares τ_i, τ^i, pero el razonamiento es general); se trata de calcular las dos trazas sucesivas de la función f respecto de las variables t_i, t^i y τ_i, τ^i.

La función f desarrollada en serie tendrá la forma:

$$\text{(2.2)} \qquad f = \sum_{r,r',s,s'}^{\infty} a_{r_1 r_2 r_3 s_1 s_2}^{r_1' r_2' r_3' s_1' s_2'} t_1^{r_1} (t^1)^{r_1'} t_2^{r_2} (t^2)^{r_2'} t_3^{r_3} (t^3)^{r_3'} \tau_1^{s_1} (\tau^1)^{s_1'} \tau_2^{s_2} (\tau^2)^{s_2'} .$$

Considerando las τ_i, τ^i fijas, calculemos la traza respecto de las variables t_i, t^i, y resulta la serie

$$\text{(2.3)} \qquad \overset{\triangle}{T}_t f = \sum_{r,s,s'}^{\infty} (-1)^{r_1 + r_2 + r_3} \frac{r_1!\, r_2!\, r_3!}{(r_1 + r_2 + r_3)!} a_{r_1 r_2 r_3 s_1 s_2}^{r_1 r_2 r_3 s_1' s_2'} \tau_1^{s_1} (\tau^1)^{s_1'} \tau_2^{s_2} (\tau^2)^{s_2'} ,$$

que es una función regular para los valores $|\tau_i| \leqslant \varrho_i$ y $|\tau^i| \leqslant \frac{1}{\varrho_i'}$ $(i = 1, 2)$, ya que la serie

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{r,s,s'}(-1)^{r_1+r_2+r_3} \frac{r_1!\, r_2!\, r_3!}{(r_1+r_2+r_3)!}\, a^{r_1r_2r_3s_1's_2'}_{r_1r_2r_3s_1s_2}\, t_1^{r_1}(t^1)^{r_1}\, t_2^{r_2}(t^2)^{r_2}\, t_3^{r_3}(t^3)^{r_3} \tau_1^{s_1}(\tau^1)^{s_1'} \tau_2^{s_2}(\tau^2)^{s_2'}$$

converge absolutamente para todos los valores (2.1) y en particular al hacer $t_i = \varrho_i$ y $t^i = \dfrac{1}{\varrho_i}$, $(i = 1, 2, 3)$.

Calculemos en (2.3) la traza respecto de las variables τ_i, τ^i y se tiene:

$$(2.4) \qquad \overset{\triangle}{\underset{t}{T}}\, \overset{\triangle}{\underset{\tau}{T}}\, f = \sum_{0}^{\infty}{}_{r,s}(-1)^{r_1+r_2+r_3+s_1+s_2} \frac{r_1!\, r_2!\, r_3!}{(r_1+r_2+r_3)!} \frac{s_1!\, s_2!}{(s_1+s_2)!}\, a^{r_1r_2r_3s_1s_2}_{r_1r_2r_3s_1s_2},$$

que es una serie numérica convergente.

Por ser la función f regular para todos los valores de las variables indicados en (2.1), existirá la traza única respecto de todas estas variables, que representaremos per $\overset{\triangle}{\underset{(t\tau)}{T}}$, y es:

$$(2.5) \qquad \overset{\triangle}{\underset{(t\tau)}{T}}\, f = \sum_{0}^{\infty}{}_{r}(-1)^{r_1+r_2+r_3+s_1+s_2} \frac{r_1!\, r_2!\, r_3!\, s_1!\, s_2!}{(r_1+r_2+r_3+s_1+s_2)!}\, a^{r_1r_2r_3s_1s_2}_{r_1r_2r_3s_1s_2},$$

que es una serie numérica convergente.

Escribamos la doble traza (2.4) en la forma

$$(2.6) \qquad \overset{\triangle}{\underset{t}{T}}\, \overset{\triangle}{\underset{\tau}{T}}\, f = \sum_{0}^{\infty}{}_{r,s}(-1)^{r} \frac{r!}{(r_1+r_2+r_3)!\,(s_1+s_2)!} \frac{r_1!\, r_2!\, r_3!\, s_1!\, s_2!}{r!}\, a^{r_1r_2r_3s_1s_2}_{r_1r_2r_3s_1s_2},$$

donde se ha puesto $r = r_1 + r_2 + r_3 + s_1 + s_2$. Esta expresión se puede considerar como el producto *simétrico* de las dos funciones

$$(2.7) \quad \sum_{0}^{\infty}{}_{l,m} \frac{r!}{l!\, m!} x^l y^m, \quad (l+m=r), \quad \sum_{0}^{\infty}{}_{r,s}(-1)^r \frac{r_1!\, r_2!\, r_3!\, s_1!\, s_2!}{r!}\, a^{r_1r_2r_3s_1s_2}_{r_1r_2r_3s_1s_2}\, x^{r_1}x^{r_2}x^{r_3}y^{s_1}y^{s_2}.$$

La primera función es igual a:

$$(2.8) \qquad \sum_{r=0}^{\infty} (x+y)^r = \frac{1}{1-x-y},$$

y la segunda es la traza proyectiva única respecto de las variables t_i, t^i y τ_i, τ^i, de la función

$$f(xt_1, t^1;\, xt_2, t^2;\, xt_3, t^3;\, y\tau_1, \tau^1;\, y\tau_2, \tau^2).$$

La funcion (2.8) es convergente para todos los valores $|x+y| < 1$ y en cuanto a la segunda función se puede, sin duda, asegurar la convergencia para los valores $|x| < 1$, $|y| < 1$. Para que el producto simétrico esté definido basta que los campos de regularidad de una y otra función sean dos cilindros asociados, cosa que de momento no se puede asegurar. La función (2.8) es regular para todo par de valores $|x| < \frac{1}{2}$, $|y| < \frac{1}{2}$; si se pudiera asegurar la regularidad de la función (2.7) para todo par de valores $|x| \leqslant 2$, $|y| \leqslant 2$, entonces se podría, sin mas, escribir la igualdad:

$$(2.9) \qquad \underset{t}{\overset{\triangle}{T}}\,\underset{\tau}{\overset{\triangle}{T}}\, f = \left\{ \frac{1}{1-x-y} \right\} \circ \left\{ \underset{(t\tau)}{\overset{\triangle}{T}} f(xt_1, t^1; xt_2, t^2; xt_3, t^3; y\tau_1, \tau^1; y\tau_2, \tau^2) \right\}.$$

Ahora bien, tambien se puede dar a esta formula un sentido que la haga válida en todo caso, cuando la función f dada sea regular en los dos cilindros asociados (2.1). Consideremos la función $f\left(\frac{x}{a} t_1, t^1; \frac{x}{a} t_2, t^2; \frac{x}{a} t_3, t^3; \frac{y}{a} \tau_1, \tau^1; \frac{y}{a} \tau_2, \tau^2\right)$, para todo valor $|a| > 2$ tiene sentido la formula (2.9), ya que

$$(2.10) \qquad \underset{(t\tau)}{\overset{\triangle}{T}} f\left(\frac{x}{a} t_1, t^1; \ldots; \frac{y}{a} \tau_2, \tau^2\right) =$$

$$= \sum_{0}^{\infty}{}_{r,s} (-1)^r \frac{r_1!\, r_2!\, r_3!\, s_1!\, s_2!}{r!}\, a^{r_1 r_2 r_3 s_1 s_1}_{r_1 r_2 r_3 s_1 s_2} \left(\frac{x}{a}\right)^{r_1} \left(\frac{x}{a}\right)^{r_2} \left(\frac{x}{a}\right)^{r_3} \left(\frac{y}{a}\right)^{s_1} \left(\frac{y}{a}\right)^{s_2}$$

es una serie convergente para todo par de valores de x e y tales que $|x| \leqslant 2$, $|y| \leqslant 2$, y por lo tanto se tiene

$$(2.11) \qquad \underset{t}{\overset{\triangle}{T}}\,\underset{\tau}{\overset{\triangle}{T}}\, f\left(\frac{x}{a} t_1, t^1; \ldots; \frac{y}{a} \tau_2, \tau^2\right) = \left\{ \frac{1}{1-x-y} \right\} \circ \left\{ \underset{(t\tau)}{\overset{\triangle}{T}} f\left(\frac{x}{a} t_1, t^1; \ldots; \frac{y}{a} \tau_2, \tau^2\right) \right\}.$$

El segundo miembro de esta igualdad está definido para todos los valores de $|a| \geqslant 1$, en virtud de la convergencia de la serie (2.6); y siendo la traza un funcional analítico, si hacemos tender a hacia 1, tendremos que el primer miembro se reducirá a la doble traza considerada de la función f primitiva, y en cuanto al segundo nos dará el valor del producto simétrico (2.9) generalizado en el sentido que acabamos de indicar.

3. – Aplicación de la regla de reducción de varias trazas proyectivas a una traza única.

I. – Se trata de calcular la doble traza proyectiva de la función

$$(3.1) \qquad f(t_i, t^j) = \frac{1}{1 + \sum\limits_{i,j}^{1-4} \alpha^i_j t_i t^j}$$

donde una de las trazas se refiere a las variables t_1, t_2, t^1, t^2 y la otra a las t_3, t_4, t^3, t^4. Supondremos que los coeficientes α_j^i son de módulos suficientemente pequeños de manera que la función f sea regular para los valores de las variables correspondientes a dos cilindros asociados. La aplicación de la formula (2.9) nos dá:

$$\text{(3.2)} \qquad \overset{\triangle}{T}_{12}\overset{\triangle}{T}_{34} \frac{1}{1+\sum\limits_{i,j}^{1-4} \alpha_j^i t_i t^j} = \frac{1}{1-x_1-x_2} \underset{x}{\bigcirc} \left\{ \overset{\triangle}{T}_t \frac{1}{1+\sum\limits_{\substack{i=1,2\\ j=1-4}} \alpha_j^i t_i t^j x_1 + \sum\limits_{\substack{i=3,4\\ j=1-4}} \alpha_j^i t_i t^j x_2} \right\}$$

y como en el denominador de la expresión anterior se presenta una forma bilineal en las variables $t_i t^j$, se podrá aplicar el resultado (1.17), y se obtiene:

$$\text{(3.3)} \qquad \overset{\triangle}{T}_{12}\overset{\triangle}{T}_{34} f(t_i, t^j) = \frac{1}{1-x_1-x_2} \underset{x}{\bigcirc} \begin{vmatrix} \alpha_1^1 x_1 - 1 & \alpha_1^2 x_1 & \alpha_1^3 x_2 & \alpha_1^4 x_2 \\ \alpha_2^1 x_1 & \alpha_2^2 x_1 - 1 & \alpha_2^3 x_2 & \alpha_2^4 x_2 \\ \alpha_3^1 x_1 & \alpha_3^2 x_1 & \alpha_3^3 x_2 - 1 & \alpha_3^4 x_2 \\ \alpha_4^1 x_1 & \alpha_4^2 x_1 & \alpha_4^3 x_2 & \alpha_4^4 x_2 - 1 \end{vmatrix}^{-1} .$$

Se ve inmediatamente que en vez de multiplicar por x_1 las α de la primera y segunda columna, se pueden realizar los productos análogos en las filas obteniendose el mismo resultado.

El producto simétrico (3.3) se puede expresar por medio de dos residuos, ya que designando por $\Delta(x_1 x_2)$ el determinante que aparece en la formula, se tiene

$$\text{(3.4)} \qquad \frac{1}{1-x_1-x_2} \underset{x}{\bigcirc} \Delta^{-1}(x_1 x_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{C_1} \mathrm{d}x_1 \int\limits_{C_2} \mathrm{d}x_2 \frac{1}{x_1 x_2 - x_1 - x_2} \Delta(x_1 x_2)^{-1} ,$$

donde los circulos C_1 y C_2 tienen el centro en el origen y sus radios son mayores que 2. En el conjunto cerrado $|x_1| \leqslant 2$, $|x_2| \leqslant 2$, la función $\Delta^{-1}(x_1 x_2)$ se puede considerar siempre regular, ya que basta considerar los coeficientes α_i^j de módulo suficientemente pequeño.

Calculando el primer residuo en la formula (3.4) resulta:

$$\text{(3.5)} \qquad \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_1} (x_1 - 1) \begin{vmatrix} \alpha_1^1 x_1 - 1 & \alpha_1^2 x_1 & \alpha_1^3 x_1 & \alpha_1^4 x_1 \\ \alpha_2^1 x_1 & \alpha_2^2 x_1 - 1 & \alpha_2^3 x_1 & \alpha_2^4 x_1 \\ \alpha_3^1 x_1 & \alpha_3^2 x_1 & (\alpha_3^3 - 1) x_1 + 1 & \alpha_3^4 x_1 \\ \alpha_4^1 x_1 & \alpha_4^2 x_1 & \alpha_4^3 x_1 & (\alpha_4^4 - 1) x_1 + 1 \end{vmatrix}^{-1} \mathrm{d}x_1 .$$

El determinante es un polinomio de cuarto grado, en el que se observa que para valores muy pequeños de α_i^j dos de las raices tienden hacia infinito, mientras que las otras dos tienden hacia 1. El ciclo C_1 contendrá por lo tanto estas dos raices y excluirá las otras dos.

II. – Un caso interesante en que la doble traza proyectiva calculada se presenta en forma de *expresión racional* en los coeficientes, es cuando son nulos todos los coeficientes α_i^j donde $j = 1, 2$ e $i = 3, 4$ y a la vez $j = 3, 4$ e $i = 1, 2$, es decir, cuando la función f tiene la forma siguiente:

$$f_1(t_i t^j) = \frac{1}{1 + \sum_{i,j}^{1-2} \alpha_i^j t_j t^i + \sum_{i,j}^{3-4} \alpha_i^j t_j t^i}. \tag{3.6}$$

En este caso el determinante de la formula (3.5) se reduce a un producto de dos factores:

$$\overset{\triangle}{T}_{12}\overset{\triangle}{T}_{34} f_1(t_i t^j) = \tag{3.7}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} (x_1 - 1)\begin{vmatrix} \alpha_1^1 x_1 - 1 & \alpha_1^2 x_1 \\ \alpha_2^1 x_1 & \alpha_2^2 x_1 - 1 \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} (\alpha_3^3 - 1)x_1 + 1 & \alpha_3^4 x_1 \\ \alpha_4^3 x_1 & (\alpha_4^4 - 1)x_1 + 1 \end{vmatrix}^{-1} dx_1,$$

donde el ciclo C_1 contiene en su interior las raices que provienen de la anulación del segundo factor del denominador. El cálculo del residuo nos dá:

$$\overset{\triangle}{T}_{12}\overset{\triangle}{T}_{34} f_1(t_i t^j) = \frac{\delta\delta' - I_1 I_2'}{\delta^2 + \delta'^2 + (\delta + \delta')I_1 I_1' - 2(I_1 + I_2)(I_1' + I_2') + 3 I_1 I_1' - 1}, \tag{3.8}$$

donde

$$\delta = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 - 1 & \alpha_1^2 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 - 1 \end{vmatrix}, \quad I_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 \end{vmatrix}, \quad I_1 = \alpha_1^1 + \alpha_2^2$$

y analogamente

$$\delta' = \begin{vmatrix} \alpha_3^3 - 1 & \alpha_3^4 \\ \alpha_4^3 & \alpha_4^4 - 1 \end{vmatrix}, \quad I_2' = \begin{vmatrix} \alpha_3^3 & \alpha_3^4 \\ \alpha_4^3 & \alpha_4^4 \end{vmatrix}, \quad I_1 = \alpha_3^3 + \alpha_4^4 .$$

Adviertase que el resultado (3.8) es simétrico respecto de los coeficientes de las dos formas bilineales del denominador de $f_1(t_i, t^j)$, y además es una *función racional* de los invariantes de ambas formas.

4. – Productos funcionales lorentzianos según Fantappiè [9].

Dadas dos funciones $f(x, y, z, t)$ y $g(x, y, z, t)$ de punto en el cronotopo, demos a las variables x, y, z, t los incrementos respectivos $\xi_x, \xi_y, \xi_z, \xi_t$, y considerando fijos los valores de x, y, z, t, tendremos dos funciones de estos incre-

(9) L. FANTAPPIÈ, Lug. cit. en (1).

mentos que representaremos con la mismas letras:

$$f(\xi_x, \xi_y, \xi_z, \xi_t) , \qquad g(\xi_x, \xi_y, \xi_z, \xi_t) . \tag{4.1}$$

FANTAPPIÈ define los productos lorentzianos de los distintos ordenes de la siguiente manera:

1°. – En la función $g(\xi_x, \xi_y, \xi_z, \xi_t)$ se substituyen las variables cronotópicas $\xi_x, \xi_y, \xi_z, \xi_t$ por las variables espinoriales, mediante las formulas siguientes:

$$\left\{\begin{array}{l} \xi_x = \frac{1}{2}(\vartheta_1^{\dot 1} - \vartheta_2^{\dot 2}) \\ \xi_y = \frac{i}{2}(\vartheta_1^{\dot 1} + \vartheta_2^{\dot 2}), \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \xi_z = -\frac{1}{2}(\vartheta_2^{\dot 1} + \vartheta_1^{\dot 2}) \\ \xi_t = \frac{1}{2c}(\vartheta_2^{\dot 1} - \vartheta_1^{\dot 2}) , \end{array}\right. \tag{4.2}$$

resultando una función que designaremos por $g_1(\vartheta_r^{\dot s})$.

2°. – En la función $f(\xi_x, \xi_y, \xi_z, \xi_t)$ se substituyen las variables cronotópicas $\xi_x, \xi_y, \xi_z, \xi_t$, por las variables espinoriales mediante las formulas siguientes:

$$\left\{\begin{array}{l} \xi_x = \frac{1}{2}(\omega_{\dot 1}^{1} - \omega_{\dot 2}^{2}) \\ \xi_y = \frac{1}{2i}(\omega_{\dot 1}^{1} + \omega_{\dot 2}^{2}) , \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \xi_z = -\frac{1}{2}(\omega_{\dot 2}^{1} + \omega_{\dot 1}^{2}) \\ \xi_t = \frac{1}{2c}(\omega_{\dot 2}^{1} - \omega_{\dot 1}^{2}) , \end{array}\right. \tag{4.3}$$

resultando una función que designaremos por $f_1(\omega_{\dot s}^{r})$.

3°. – Se consideran m espinores covariantes

$$\underset{k}{\tau}_r , \qquad (k = 1, 2, ..., m; \ r = 1, 2)$$

y m espinores contravariantes

$$\underset{j}{\tau}^{\dot s} , \qquad (j = 1, 2, ..., m; \ s = 1, 2)$$

y a partir de los mismos se forman los productos externos de los mismos

$$\underset{k}{\tau}_r \underset{j}{\tau}^{\dot s} , \qquad (k, j = 1, 2, ..., m)$$

que dan lugar a m^2 espinores con dos indices.

Tomada una matriz de m^2 constantes

$$\| \overset{kj}{h} \| ,$$

se iguala cada una de las variables $\vartheta_r^{\dot s}$ de la función g, a la combinación lineal siguiente:

$$\vartheta_r^{\dot s} = \sum_{1}^{m}{}_{kj} \overset{kj}{h} \underset{k}{\tau}_r \underset{j}{\tau}^{\dot s} , \qquad (r, s = 1, 2). \tag{4.4}$$

4º. – Se consideran los m espinores contravariantes

$$\underset{k}{\tau}^{r}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, m;\ r = 1, 2)$$

y los m espinores covariantes

$$\underset{j}{\tau}_{\dot{s}}, \qquad (j = 1, 2, \ldots, m;\ s = 1, 2)$$

a partir de los cuales se forman los productos externos de los mismos

$$\underset{k}{\tau}^{r}\underset{j}{\tau}_{\dot{s}}, \qquad (k, j = 1, 2, \ldots, m)$$

que dan lugar a m^2 espinores con dos indices.

Tomada una matriz de m^2 constantes

$$\| \underset{kj}{h} \|,$$

se iguala cada una de las variables $\omega^{r}_{\dot{s}}$ de la función f, a la combinación lineal siguiente:

$$\omega^{r}_{\dot{s}} = \sum_{1}^{m}{}_{kj} \underset{kj}{h}\, \underset{k}{\tau}^{r}\underset{j}{\tau}_{\dot{s}}, \qquad (r, s = 1, 2). \tag{4.5}$$

5º. – El producto lorentziano de orden m de las dos funciones f y g (de las variables ξ), en este orden, que se indica escribiendo $[f, g]_m$ es:

$$\overset{\triangle}{\underset{1}{T}}_{\tau}\overset{\triangle}{\underset{2}{T}}_{\tau} \ldots \overset{\triangle}{\underset{n}{T}}_{\tau}\overset{\triangle}{\underset{1}{T}}_{\dot{\tau}}\overset{\triangle}{\underset{2}{T}}_{\dot{\tau}} \ldots \overset{\triangle}{\underset{m}{T}}_{\dot{\tau}}\ f_1(\sum_{kj} \underset{kj}{h}\underset{k}{\tau}^{r}\underset{j}{\tau}_{\dot{s}})\, g_1(\sum \overset{kj}{h}\underset{k}{\tau}_{r}\underset{j}{\tau}^{\dot{s}}), \tag{4.6}$$

obtenido, como se ve, aplicando $2m$ trazas proyectivas al producto de las dos funciones f_1 y g_1 después de haber introducido en vez de las variables espinoriales las combinaciones lineales (4.5) y (4.4) respectivamente, y aplicando cada una de las trazas $\overset{\triangle}{\underset{k}{T}}_{\tau}$ a las variables

$$\underset{k}{\tau}_1, \quad \underset{k}{\tau}_2, \quad \underset{k}{\tau}^1, \quad \underset{k}{\tau}^2,$$

y cada una de las trazas $\overset{\triangle}{\underset{j}{T}}_{\dot{\tau}}$ a las variables

$$\underset{j}{\tau}_{\dot{1}}, \quad \underset{j}{\tau}_{\dot{2}}, \quad \underset{j}{\tau}^{\dot{1}}, \quad \underset{j}{\tau}^{\dot{2}}.$$

Los productos funcionales lorentzianos son invariantes respecto a las transformaciones de LORENTZ.

5. - Cálculo de la indicatriz proyectiva del producto lorentziano de primer orden.

De acuerdo con la definición dada en el parrafo anterior, el producto lorentziano de primer orden de dos funciones f y g, es

$$[f, g]_1 = \overset{\triangle}{T}_\tau \overset{\triangle}{T}_{\dot{\tau}} f_1(h\tau^r\tau_{\dot{s}})g_1(h'\tau_r\tau^{\dot{s}}) , \tag{5.1}$$

donde la primera traza se refiere a las variables

$$\tau_1 , \quad \tau_2 , \quad \tau^1 , \quad \tau^2 ,$$

y la segunda a las otras variables

$$\tau_{\dot{1}} , \quad \tau_{\dot{2}} , \quad \tau^{\dot{1}} , \quad \tau^{\dot{2}} .$$

Siendo el producto lorentziano un funcional analítico bilineal, se obtendrá su indicatriz proyectiva aplicando la definición de producto a dos funciones tales que después de haber pasado a las variables espinoriales (1º y 2º apartados del parrafo anterior) tengan la forma

$$f_1(\omega^r_{\dot{s}}) = \frac{1}{1 + \sum_{rs}^{2} \alpha^{\dot{s}}_r \omega^r_{\dot{s}}} , \qquad g_1(\vartheta^{\dot{s}}_r) = \frac{1}{1 + \sum_{rs}^{2} \beta^r_{\dot{s}} \vartheta^{\dot{s}}_r} , \tag{5.2}$$

donde $\alpha^{\dot{s}}_r$ y $\beta^r_{\dot{s}}$ designan constantes, que las supondremos de módulo suficientemente pequeño, de manera que la convergencia de las series que aparecen en los desarrollos posteriores quede asegurada.

La indicatriz proyectiva bilineal será por consiguiente:

$$p_1(\alpha, \beta) = \overset{\triangle}{T}_\tau \overset{\triangle}{T}_{\dot{\tau}} f_1(h\tau^r\tau_{\dot{s}})g_1(h'\tau_r\tau_{\dot{s}}) = \tag{5.3}$$

$$= \overset{\triangle}{T}_\tau \overset{\triangle}{T}_{\dot{\tau}} \frac{1}{1+h(\alpha^{\dot{1}}_1\tau^1\tau_{\dot{1}}+\alpha^{\dot{2}}_1\tau^1\tau_{\dot{2}}+\alpha^{\dot{1}}_2\tau^2\tau_{\dot{1}}+\alpha^{\dot{2}}_2\tau^2\tau_{\dot{2}})} \frac{1}{1+h'(\beta^1_{\dot{1}}\tau_1\tau^{\dot{1}}+\beta^2_{\dot{1}}\tau_2\tau^{\dot{1}}+\beta^1_{\dot{2}}\tau_1\tau^{\dot{2}}+\beta^2_{\dot{2}}\tau_2\tau^{\dot{2}})} .$$

Calculemos efectivamente la función $p_1(\alpha, \beta)$ ya que su conocimiento nos dará la estructura del funcional bilineal introducido.

La traza respecto de las variables $\dot{\tau}$ resulta inmediatamente, ya que la función $p_1(\alpha, \beta)$ se puede escribir en la forma

$$p_1(\alpha,\beta) = T_\tau T_{\dot{\tau}} \frac{1}{1 + a_1\tau_{\dot{1}} + a_2\tau_{\dot{2}}} \frac{1}{1 + b_1\tau^{\dot{1}} + b_2\tau^{\dot{2}}} , \tag{5.4}$$

donde se ha puesto:

$$(5.5) \qquad \begin{cases} a_1 = h(\alpha_1^{\dot{1}}\tau^1 + \alpha_2^{\dot{1}}\tau^2) \\ a_2 = h(\alpha_1^{\dot{2}}\tau^1 + \alpha_2^{\dot{2}}\tau^2), \end{cases} \qquad \begin{cases} b_1 = h'(\beta_{\dot{1}}^1\tau_1 + \beta_{\dot{1}}^2\tau_2) \\ b_2 = h'(\beta_{\dot{2}}^1\tau_1 + \beta_{\dot{2}}^2\tau_2), \end{cases}$$

y como la traza respecto de las variables $\dot{\tau}$ es la de un producto de dos funciones, una que contiene las variables con los indices inferiores, y la otra las variables de los indices superiores, se reduce al producto proyectivo de dos funciones, que en virtud de las propiedades de la indicatriz proyectiva es:

$$(5.6) \qquad \overset{\triangle}{T}_{\dot{\tau}} \frac{1}{1 + a_1\tau_{\dot{1}} + a_2\tau_{\dot{2}}} \cdot \frac{1}{1 + b_1\tau^{\dot{1}} + b_2\tau^{\dot{2}}} = \frac{1}{1 + a_1b_1 + a_2b_2} \cdot$$

La expresión $a_1b_1 + a_2b_2$ desarrollada es:

$$a_1b_1 + a_2b_2 = hh'(\gamma_1^1\tau^1\tau_1 + \gamma_1^2\tau^1\tau_2 + \gamma_2^1\tau^2\tau_1 + \gamma_2^2\tau^2\tau_2)$$

donde se ha puesto

$$(5.7) \qquad \gamma_r^s = \alpha_r^{\dot{1}}\beta_{\dot{1}}^s + \alpha_r^{\dot{2}}\beta_{\dot{2}}^s\,, \qquad (r, s = 1, 2).$$

La indicatriz $p_1(\alpha, \beta)$ vendrá dada, por consiguiente, por medio de la traza única respecto de las variables τ:

$$(5.8) \qquad p_1(\alpha, \beta) = \overset{\triangle}{T}_{\tau} \frac{1}{1 + hh'(\gamma_1^1\tau^1\tau_1 + \gamma_1^2\tau^1\tau_2 + \gamma_2^1\tau^2\tau_1 + \gamma_2^2\tau^2\tau_2)} \cdot$$

Ahora bien, la traza indicada respecto de las variables τ, es del tipo estudiado en § 1, y aplicando el resultado obtenido en (1.17) queda finalmente [10]

$$(5.9) \qquad p_1(\alpha, \beta) = \begin{vmatrix} hh'\gamma_1^1 - 1 & hh'\gamma_1^2 \\ hh'\gamma_2^1 & hh'\gamma_2^2 - 1 \end{vmatrix}^{-1}$$

o bien

$$(5.10) \qquad p_1(\alpha, \beta) = \frac{1}{1 - hh'I_1 + h^2h'^2I_2}\,,$$

donde I_1 y I_2 son los dos invariantes de la matriz $\| \gamma_s^r \|$:

$$(5.11) \qquad I_1 = \alpha_1^{\dot{1}}\beta_{\dot{1}}^1 + \alpha_1^{\dot{2}}\beta_{\dot{2}}^1 + \alpha_2^{\dot{1}}\beta_{\dot{1}}^2 + \alpha_2^{\dot{2}}\beta_{\dot{2}}^2$$

y

$$(5.12) \qquad I_2 = \begin{vmatrix} \gamma_1^1 & \gamma_1^2 \\ \gamma_2^1 & \gamma_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1^{\dot{1}} & \alpha_1^{\dot{2}} \\ \alpha_2^{\dot{1}} & \alpha_2^{\dot{2}} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_{\dot{1}}^1 & \beta_{\dot{1}}^2 \\ \beta_{\dot{2}}^1 & \beta_{\dot{2}}^2 \end{vmatrix} \cdot$$

---

(10) Cfr. L. FANTAPPIÈ, Lug. cit. en (1), pág. 69.

6. - Cálculo de la indicatriz proyectiva del producto lorentziano de segundo orden.

Según la definición dada en § 4, el producto lorentziano de segundo orden de dos funciones f y g es:

$$[f, g]_2 = \underset{1}{\overset{\triangle}{T}}_\tau \underset{2}{\overset{\triangle}{T}}_\tau \underset{1}{\overset{\triangle}{T}}_{\dot\tau} \underset{2}{\overset{\triangle}{T}}_{\dot\tau} f_1\Big(\sum_{kj}^{2} \underset{kj}{h} \underset{k}{\tau^r} \underset{j}{\tau_{\dot s}}\Big)\, g_1\Big(\sum_{kj}^{2} \overset{kj}{h} \underset{k}{\tau_r} \underset{j}{\tau^{\dot s}}\Big), \tag{6.1}$$

donde las dos primeras trazas se refieren a las variables

$$\underset{1}{\tau_1},\ \underset{1}{\tau_2},\ \underset{1}{\tau^1},\ \underset{1}{\tau^2} \quad \text{y} \quad \underset{2}{\tau_1},\ \underset{2}{\tau_2},\ \underset{2}{\tau^1},\ \underset{2}{\tau^2}, \tag{6.2}$$

y las dos últimas trazas se refieren a las otras variables

$$\underset{1}{\tau_{\dot 1}},\ \underset{1}{\tau_{\dot 2}},\ \underset{1}{\tau^{\dot 1}},\ \underset{1}{\tau^{\dot 2}} \quad \text{y} \quad \underset{2}{\tau_{\dot 1}},\ \underset{2}{\tau_{\dot 2}},\ \underset{2}{\tau^{\dot 1}},\ \underset{2}{\tau^{\dot 2}}. \tag{6.3}$$

Para calcular la indicatriz de este funcional bilineal, se habrá de calcular el producto lorentziano de segundo orden de dos funciones f y g, tales que después de haber pasado de las variables espinoriales, tengan la forma (5.2). La indicatriz proyectiva buscada del producto lorentziano de segundo orden, será por consiguiente:

$$p_2(\alpha, \beta) = \underset{1}{\overset{\triangle}{T}}_\tau \underset{2}{\overset{\triangle}{T}}_\tau \underset{1}{\overset{\triangle}{T}}_{\dot\tau} \underset{2}{\overset{\triangle}{T}}_{\dot\tau} \frac{1}{1 + \sum\limits_{r,s}^{1-2} \alpha_r^{\dot s} \sum\limits_{k,j}^{1-2} \underset{kj}{h} \underset{k}{\tau^r} \underset{j}{\tau_{\dot s}}} \cdot \frac{1}{1 + \sum\limits_{r,s}^{1-2} \beta_{\dot s}^{r} \sum\limits_{k,j}^{1-2} \overset{kj}{h} \underset{k}{\tau_r} \underset{j}{\tau^{\dot s}}}. \tag{6.4}$$

El cálculo de las dos trazas $\underset{1}{\overset{\triangle}{T}}_{\dot\tau}$ y $\underset{2}{\overset{\triangle}{T}}_{\dot\tau}$ lo realizaremos aplicando la regla (2.9), por la cual se reduce al cálculo de una traza única seguida de un producto simétrico respecto de dos variables.

Ordenando los denominadores de la funciones f_1 y g_1 según las variables (6.3), se tiene:

$$\underset{1}{\overset{\triangle}{T}}_{\dot\tau} \underset{2}{\overset{\triangle}{T}}_{\dot\tau} f_1 g_1 = \underset{1}{\overset{\triangle}{T}}_{\dot\tau} \underset{2}{\overset{\triangle}{T}}_{\dot\tau} \frac{1}{1 + A_1 \underset{1}{\tau_{\dot 1}} + A_2 \underset{1}{\tau_{\dot 2}} + A_3 \underset{2}{\tau_{\dot 1}} + A_4 \underset{2}{\tau_{\dot 2}}} \cdot \frac{1}{1 + B_1 \underset{1}{\tau^{\dot 1}} + B_2 \underset{1}{\tau^{\dot 2}} + B_3 \underset{2}{\tau^{\dot 1}} + B_4 \underset{2}{\tau^{\dot 2}}}, \tag{6.5}$$

donde

$$\left\{ \begin{aligned} A_1 &= \sum_{k,r}^{1-2} \alpha_r^{\dot 1} \underset{k1}{h} \underset{k}{\tau^r}, \quad A_2 = \sum_{k,r}^{1-2} \alpha_r^{\dot 2} \underset{k1}{h} \underset{k}{\tau^r}, \quad A_3 = \sum_{k,r}^{1-2} \alpha_r^{\dot 1} \underset{k2}{h} \underset{k}{\tau^r}, \quad A_4 = \sum_{k,r}^{1-2} \alpha_r^{\dot 2} \underset{k2}{h} \underset{k}{\tau^r}, \\ B_1 &= \sum_{k,r}^{1-2} \beta_{\dot 1}^{r} \overset{k1}{h} \underset{k}{\tau_r}, \quad B_2 = \sum_{k,r}^{1-2} \beta_{\dot 2}^{r} \overset{k1}{h} \underset{k}{\tau_r}, \quad B_3 = \sum_{k,r}^{1-2} \beta_{\dot 1}^{r} \overset{k2}{h} \underset{k}{\tau_r}, \quad B_4 = \sum_{k,r}^{1-2} \beta_{\dot 2}^{r} \overset{k2}{h} \underset{k}{\tau_r}, \end{aligned} \right. \tag{6.6}$$

y representando por $\overset{\triangle}{T}_{\tau}$ la traza respecto de todas las variables (6.3) es:

$$\underset{1}{\overset{\triangle}{T}}_{\tau}\underset{2}{\overset{\triangle}{T}}_{\tau}\, f_1 g_1 = \left\{ \frac{1}{1 - x_1 - x_2} \right\} \underset{x}{\bigcirc} \left\{ \overset{\triangle}{T}_{\tau} \frac{1}{1 + A_1 x_1 \underset{1}{\tau_1} + A_2 x_1 \underset{1}{\tau_2} + A_3 x_2 \underset{2}{\tau_1} + A_4 x_2 \underset{2}{\tau_1}} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{1}{1 + B_1 \underset{1}{\tau^1} + B_2 \underset{1}{\tau^2} + B_3 \underset{2}{\tau^1} + B_4 \underset{2}{\tau^2}} \right\},$$

que en virtud de las propiedades de la indicatriz proyectiva se reduce a

$$\underset{1}{\overset{\triangle}{T}}_{\tau}\underset{2}{\overset{\triangle}{T}}_{\tau}\, f_1 g_1 = \frac{1}{1 - x_1 - x_2} \underset{x}{\bigcirc} \frac{1}{1 + A_1 B_1 x_1 + A_2 B_2 x_2 + A_3 B_3 x_3 + A_4 B_4 x_4}. \tag{6.7}$$

Se puede calcular con facilidad este producto simétrico por medio de dos residuos, pero conviene dejar la expresión en la forma anterior, ya que el denominador presenta gran simetría, por ser $A_1 B_1 x_1 + A_2 B_2 x_1 + A_3 B_3 x_2 + A_4 B_4 x_2$ una forma bilineal en las variables (6.2), que escrita en forma matricial es

$$(\underset{1}{\tau^1}\underset{1}{\tau^2}\underset{2}{\tau^1}\underset{2}{\tau^2}) \begin{vmatrix} \gamma_1^1 H_1^1 & \gamma_1^2 H_1^1 & \gamma_1^1 H_1^2 & \gamma_1^2 H_1^2 \\ \gamma_2^1 H_1^1 & \gamma_2^2 H_1^1 & \gamma_2^1 H_1^2 & \gamma_2^2 H_1^2 \\ \gamma_1^1 H_2^1 & \gamma_1^2 H_2^1 & \gamma_1^1 H_2^2 & \gamma_1^2 H_2^2 \\ \gamma_2^1 H_2^1 & \gamma_2^2 H_2^1 & \gamma_2^1 H_2^2 & \gamma_2^2 H_2^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \underset{1}{\tau_1} \\ \underset{1}{\tau_2} \\ \underset{2}{\tau_1} \\ \underset{2}{\tau_2} \end{vmatrix} \tag{6.8}$$

donde se ha puesto

$$\gamma_s^r = \alpha_s^1 \beta_1^r + \alpha_s^2 \beta_2^r, \qquad (r, s = 1, 2) \tag{6.9}$$

y

$$H_p^q = \overset{q1}{\underset{p1}{hh}} x_1 + \overset{q2}{\underset{p2}{hh}} x_2, \qquad (q, p = 1, 2). \tag{6.10}$$

El cálculo de las dos trazas $\underset{1}{\overset{\triangle}{T}}_{\tau}$ y $\underset{2}{\overset{\triangle}{T}}_{\tau}$ aplicadas a la función

$$\frac{1}{1 + \sum\limits_{p,q,r,s}^{1-2} \gamma_s^r H_p^q \underset{p}{\tau^s} \underset{q}{\tau_r}}$$

lo realizaremos aplicando la misma regla (2.9), y así se tiene:

$$\underset{1}{\overset{\triangle}{T}}_{\tau}\underset{2}{\overset{\triangle}{T}}_{\tau} \frac{1}{1 + \sum\limits_{p,q,r,s}^{1-2} \gamma_s^r H_p^q \underset{p}{\tau^s} \underset{q}{\tau_r}} = \frac{1}{1 - y_1 - y_2} \underset{y}{\bigcirc} \left\{ \overset{\triangle}{T}_{\tau} \frac{1}{1 + \sum\limits_{pqrs}^{1-2} \gamma_s^r H_p^q y_q \underset{p}{\tau^s} \underset{q}{\tau_r}} \right\} = \tag{6.11}$$

$$= \frac{1}{1 - y_1 - y_2} \underset{y}{\bigcirc} \begin{vmatrix} \gamma_1^1 H_1^1 y_1 - 1 & \gamma_1^2 H_1^1 y_1 & \gamma_1^1 H_1^2 y_1 & \gamma_1^2 H_1^2 y_1 \\ \gamma_2^1 H_1^1 y_1 & \gamma_2^2 H_1^1 y_1 - 1 & \gamma_2^1 H_1^2 y_1 & \gamma_2^2 H_1^2 y_1 \\ \gamma_1^1 H_2^1 y_2 & \gamma_1^2 H_2^1 y_2 & \gamma_1^1 H_2^2 y_2 - 1 & \gamma_1^2 H_2^2 y_1 \\ \gamma_2^1 H_2^1 y_2 & \gamma_2^2 H_2^1 y_2 & \gamma_2^1 H_2^2 y_2 & \gamma_2^2 H_2^2 y_2 - 1 \end{vmatrix}^{-1}.$$

A este último determinante se le puede dar la siguiente forma mas sencilla y expresiva, utilizando la notación matricial:

$$(6.12)\qquad \begin{vmatrix} \Gamma H_1^1 y_1 - E & \Gamma H_1^2 y_1 \\ \Gamma H_2^1 y_2 & \Gamma H_2^2 y_2 - E \end{vmatrix},$$

donde Γ es la matriz de (γ_s^r) y E la matriz unidad. Adviertase que el determinante (6.12) puede considerarse como la generalización de la ecuación caracteristica de una matriz.

Resumiendo, la indicatriz proyectiva del producto lorentziano de segundo orden es:

$$(6.13)\qquad p_2(\alpha, \beta) = \frac{1}{1 - x_1 - x_2} \; \frac{1}{1 - y_1 - y_2} \underset{x\,y}{\bigcirc\!\bigcirc} \begin{vmatrix} \Gamma H_1^1 y_1 - E & \Gamma H_1^2 y_1 \\ \Gamma H_2^1 y_2 & \Gamma H_2^2 y_2 - E \end{vmatrix}^{-1},$$

donde dos de los residuos que aparecen en el cálculo del doble producto simetrico anterior se calculan inmediatamente, aunque la expresión anterior tiene la ventaja de su gran simetría.

Aun se puede simplificar el valor de $p_2(\alpha, \beta)$ hallado en (6.13). Como el determinante (6.12) es una función de x_1, x_2, y_1, y_2, que depende de estas variables por medio de los productos x_1y_1, x_1y_2, x_2y_1, x_2y_2, resulta que el desarrollo de su inverso en serie de potencias, será una serie cuyos terminos tendrán la forma

$$(6.14)\qquad k(x_1y_1)^r(x_1y_2)^s(x_2y_1)^t(x_2y_2)^u,$$

en cuyo termino, el grado respecto de x es $r + s + t + u$ que es precisamente el mismo que tiene respecto de y.

Por otra parte, considerando los desarrollos en serie de las dos primeras funciones del doble producto simétrico (6.13) se tiene

$$(6.15)\ \text{y}\ (6.16)\qquad \frac{1}{1 - x_1 - x_2} = \sum_{n=0}^{\infty} (x_1 + x_2)^n \quad \text{y} \quad \frac{1}{1 - y_1 - y_2} = \sum_{n=0}^{\infty} (y_1 + y_2)^n,$$

y como el producto simétrico se obtiene como suma de los productos de los coeficientes de terminos semejantes, al formar el producto simétrico de (6.14) por (6.15) los únicos de este desarrollo que intervendrán serán los de $(x_1 + x_2)^n$ cuando $n = r + s + t + u$, y analogamente los únicos del desarrollo (6.16) que intervendrán en el producto simétrico de (6.14) por (6.16) serán los de $(y_1 + y_2)^n$ donde n tiene el mismo valor anterior, es decir, si $r + s + t + u = n$.

Se tiene en consecuencia:

$$\frac{1}{1-x_1-x_2}\,\frac{1}{1-y_1-y_2}\,\underset{x}{\bigcirc}\underset{y}{\bigcirc}\,k(x_1y_1)^r(x_1y_2)^s(x_2y_1)^t(x_2y_2)^u =$$

$$= (x_1+x_2)^n(y_1+y_2)^n\,\underset{x}{\bigcirc}\underset{y}{\bigcirc}\,k(x_1y_1)^r(x_1y_2)^s(x_2y_1)^t(x_2y_2)^u =$$

$$= \frac{1}{1-(x_1+x_2)(x_3+x_4)}\,\underset{x}{\bigcirc}\,k(x_1x_3)^r(x_1x_4)^s(x_2x_3)^t(x_2x_4)^u,$$

quedando reducido el doble producto simétrico a uno solo respecto de las variables x_1, x_2, x_3, x_4.

Obtenemos, pues, finalmente como valor de la indicatriz del producto lorentziano de segundo orden la siguiente:

$$(6.17)\qquad p_2(\alpha,\beta) = \frac{1}{1-(x_1+x_2)(x_2+x_4)}\,\underset{x}{\bigcirc}\begin{vmatrix} \Gamma H_1^1x_3 - E & \Gamma H_1^2x_3 \\ \Gamma H_2^1x_4 & \Gamma H_2^2x_4 - E\end{vmatrix}^{-1},$$

o bien

$$(6.18)\quad p_2(\alpha\beta) = \frac{1}{1-y_1-y_2-y_3-y_4}\,\underset{y}{\bigcirc}\begin{vmatrix} \Gamma(\overset{11}{\underset{11}{h}}\overset{}{h}y_1 + \overset{12}{\underset{12}{h}}hy_2) - E & \Gamma(\overset{21}{\underset{11}{h}}hy_1 + \overset{22}{\underset{12}{h}}hy_2) \\ \Gamma(\overset{11}{\underset{21}{h}}hy_3 + \overset{12}{\underset{22}{h}}hy_4) & \Gamma(\overset{21}{\underset{21}{h}}hy_3 + \overset{22}{\underset{22}{h}}hy_4) - E\end{vmatrix}^{-1},$$

obtenida haciendo en la formula anterior $x_1x_3 = y_1$, $x_2x_3 = y_2$, $x_1x_4 = y_3$, $x_2x_4 = y_4$.

7. - La indicatriz proyectiva del producto lorentziano de orden m.

La definición de producto lorentziano de orden m (§ 4) aplicada a dos funciones f y g que después de haber pasado a las variables espinoriales tengan la forma f_1 y g_1 (5.2) nos dará la indicatriz proyectiva del funcional bilineal que define dicho producto lorentziano. Llamando $p_m(\alpha\beta)$ a la indicatriz proyectiva se tiene:

$$(7.1)\qquad p_m(\alpha\beta) = \prod_{h=1}^{m}\prod_{i=1}^{m}\underset{h}{\overset{\triangle}{T}}{}_r\,\underset{i}{\overset{\triangle}{T}}{}^{\dot{}}_{r}\;\frac{1}{1+\sum\limits_{r,s}^{1-2}\alpha_r^{\dot s}\sum\limits_{j,k}^{1-m}\underset{jk}{h}\,\underset{j}{\tau^r}\underset{k}{\tau_{\dot s}}}\;\frac{1}{1+\sum\limits_{r,s}^{1-2}\beta_{\dot s}^{r}\sum\limits_{j,k}^{1-m}\overset{jk}{h}\,\underset{j}{\tau_r}\underset{k}{\tau^{\dot s}}}\,.$$

Ordenemos los sumatorios de los denominadores de la siguiente forma:

$$\sum_k^{1-m}\left[\left(\sum_r^{1-2}\sum_j^{1-m}\underset{jk}{h}\,\underset{j}{\tau^r}\alpha_r^{\dot 1}\right)\underset{k}{\tau_{\dot 1}} + \left(\sum_r^{1-2}\sum_j^{1-m}\underset{jk}{h}\,\underset{j}{\tau^r}\alpha_r^{\dot 2}\right)\underset{k}{\tau_{\dot 2}}\right]$$

y

$$\sum_k^{1-m}\left[\left(\sum_r^{1-2}\sum_j^{1-m}\overset{jk}{h}\,\underset{j}{\tau_r}\beta_{\dot 1}^{r}\right)\underset{k}{\tau^{\dot 1}} + \left(\sum_r^{1-2}\sum_j^{1-m}\overset{jk}{h}\,\underset{j}{\tau_r}\beta_{\dot 2}^{r}\right)\underset{k}{\tau^{\dot 2}}\right].$$

El cálculo de las trazas respecto de las variables $\underset{\cdot}{\tau}$ se realiza como en el caso del producto lorentziano de segundo orden, y asi resulta:

$$(7.2) \qquad \prod_{i=1}^{m} \overset{\triangle}{\underset{i}{T}}_{\underset{\cdot}{\tau}} \, f_1 g_1 =$$

$$= \frac{1}{1-\sum\limits_{k}^{1-m} x_k} \underset{x}{\bigcirc} \frac{1}{1+\sum\limits_{k}^{1-m}\left[\left(\sum\limits_{r}^{1-2}\sum\limits_{j}^{1-m} \underset{jk}{h}\, \underset{j}{\tau}^r \alpha_r^{\dot{1}}\right)\left(\sum\limits_{r}^{1-2}\sum\limits_{j}^{1-m} \overset{jk}{h} \underset{j}{\tau}_r \beta_{\dot{1}}^r\right)+\left(\sum\limits_{r}^{1-2}\sum\limits_{j}^{1-m} \underset{jk}{h}\, \underset{j}{\tau}^r \alpha_r^{\dot{2}}\right)\left(\sum\limits_{r}^{1-2}\sum\limits_{j}^{1-m} \overset{jk}{h} \underset{j}{\tau}_r \beta_{\dot{2}}^r\right)\right] x_k}$$

y realizadas las operaciones en el denominador resulta una forma bilineal en las variables

$$\underset{j}{\tau}^1 \underset{j}{\tau}^2 , \qquad \underset{l}{\tau}_1 \underset{l}{\tau}_2 \qquad\qquad (j, l = 1, \ldots, m)$$

en la cual el coeficiente de $\underset{j}{\tau}^r \underset{l}{\tau}_t$ es

$$\sum_{k}^{1-m} x_k \left[\underset{ik}{h} \overset{lk}{h} \alpha_r^{\dot{1}} \beta_{\dot{1}}^t + \underset{jk}{h} \overset{lk}{h} \alpha_r^{\dot{2}} \beta_{\dot{2}}^t \right] = H_j^l \gamma_r^t$$

donde se ha puesto

$$(7.3) \qquad H_j^l = \sum_{k}^{1-m} \underset{jk}{h} \overset{lk}{h} x_k , \qquad\qquad (j, l = 1, \ldots, m)$$

y como en los parrafos anteriores

$$(7.4) \qquad \gamma_r^t = \alpha_r^{\dot{1}} \beta_{\dot{1}}^t + \alpha_r^{\dot{2}} \beta_{\dot{2}}^t , \qquad\qquad (r, t = 1, 2).$$

El cálculo de las trazas respecto de las variables τ aplicadas al segundo factor del producto simétrico (7.2), se realiza aplicando la regla (2.9):

$$(7.5) \qquad \prod_{h=1}^{m} \overset{\triangle}{\underset{h}{T}}_{\tau} = \frac{1}{1+\sum\limits_{r,t}^{1-2}\sum\limits_{j,l}^{1-m} H_j^l \gamma_r^t \underset{j}{\tau}^r \underset{l}{\tau}_t} =$$

$$= \frac{1}{1-\sum\limits_{k}^{1-m} y_k} \underset{y}{\bigcirc} \begin{vmatrix} \Gamma H_1^1 y_1 - E & \Gamma H_1^2 y_1 & \ldots & \Gamma H_1^m y_1 \\ \Gamma H_2^1 y_2 & \Gamma H_2^2 y_2 - E & \ldots & \Gamma H_2^m y_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Gamma H_m^1 y_m & \Gamma H_m^2 y_m & \ldots & \Gamma H_m^m y_m - E \end{vmatrix}^{-1} ,$$

o bien en forma mas breve

$$\frac{1}{1-\sum\limits_{k}^{1-m} y_k} \underset{y}{\bigcirc} \left| \Gamma H_j^l y_j - E \right|^{-1} ,$$

donde Γ es la matriz (γ_s^r) y E la matriz unidad; y advirtiendo que en la matriz $\| \Gamma H_j^l \|$, cada uno de sus elementos es a su vez una matriz de segundo orden.

Resumiendo los cálculos anteriores, obtenemos como valor final para la indicatriz proyectiva $p_m(\alpha\beta)$ la siguiente:

$$p_m(\alpha\beta) = \frac{1}{1 - \sum\limits_k^{1-m} x_k} \frac{1}{1 - \sum\limits_k^{1-m} y_k} \underset{x\ y}{\bigcirc\!\bigcirc} \left| \Gamma H_j^l y_j - E \right|^{-1}, \tag{7.6}$$

formula en la cual quedan por calcular $2m$ residuos de los cuales dos son inmediatos.