Carlo Birindelli (*)

Nuova trattazione di problemi al contorno di uno strato, per l'equazione di Poisson in tre variabili. (**)

Parte II.

Nella Parte I (¹), applicando il « metodo della trasformata di Laplace ad intervallo di integrazione finito » del Picone al problema al contorno di uno strato illimitato per cui l'incognita $u(x, y, z)$ verifichi l'equazione di Poisson $\Delta_2 u = f$ nello strato e soddisfi due assegnate combinazioni lineari a coefficienti costanti (diversi da zero) nelle u, $\frac{\partial u}{\partial z}$ lungo le due facce dello strato, siamo pervenuti al teorema di unicità per la soluzione nonchè alla espressione formale dell'unica eventuale possibile soluzione effettiva $u(x, y, z)$ del problema, dimostrando inoltre la convergenza puntuale di tale sviluppo formale in tutto lo strato in modo da esprimere una funzione continua in tutto lo strato e soddisfacente le condizioni del detto teorema di unicità. Tutto ciò sotto condizioni estremamente larghe per quel che ha riferimento con i dati al contorno.

In questa Parte II si mostra l'esistenza delle derivate $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ della u, precedentemente trovata, e la validità per essa delle equazioni al contorno.

1. – Dimostrazione della continuità delle $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ entro T. Verifica della continuità di $\frac{\partial u}{\partial z}$ in $T + FT$.

Continuiamo qui a seguire il simbolismo adottato nella precedente Parte I e a tale Parte vengono fatti i relativi richiami.

Per tutto ciò che riguarda l'esistenza e la continuità delle $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, osser-

---

(*) Indirizzo: Via Parenzo, 8; Roma (Italia).

(**) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo. Ricevuto il 7-VI-1950.

(¹) Riv. Mat. Univ. Parma 2, 77-102 (1951).

viamo che con una rotazione intorno all'asse z ci si può sempre ridurre al caso nel quale in $S_{(2)}$ la semiretta uscente da O e passante per (H, ϱ) sia l'asse x o l'asse y, dopo avere eseguita l'opportuna traslazione dell'asse z. In altre parole lo studio delle $\frac{\partial u(H, \varrho, z)}{\partial x}$, $\frac{\partial u(H, \varrho, z)}{\partial y}$ può pensarsi ridotto a quello di $\frac{\partial u(H, \varrho, z)}{\partial \varrho}$.

Derivando formalmente la (B) (v. Parte I, pag. 96) termine a termine rispetto a ϱ una volta, si perviene alla seguente espressione formale per $\frac{\partial u(H, \varrho, z)}{\partial \varrho}$:

$$(\mathrm{B}_\varrho)\qquad \frac{\partial u(H, \varrho, z)}{\partial \varrho} \backsim$$

$$\backsim -\sum_h^{0,\infty}\sqrt{\lambda_h}\,w_h(z)\left\{\frac{1}{2}K_0'(\varrho\sqrt{\lambda_h})\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\varrho}\xi I_0(\xi\sqrt{\lambda_h})\left[\int_0^{2\pi}\left\{-\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q, \xi) + \varrho_h'\gamma_a(Q, \xi)] + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_0^a f(Q, \xi, s)w_h(s)\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\xi + \sum_l^{1,\infty} K_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\varrho}\xi I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\,\cdot$$

$$\left.\cdot\left[\int_0^{2\pi}\left\{-\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q,\xi) + \varrho_h'\gamma_a(Q,\xi)] + \int_0^a f(Q, \xi, s)w_h(s)\,\mathrm{d}s\right\}\cos(l\cdot(t-\omega))\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\xi\right\} -$$

$$-\sum_h^{0,\infty}\sqrt{\lambda_h}\,w_h(z)\left\{\frac{1}{2}I_0'(\varrho\sqrt{\lambda_h})\frac{1}{\pi}\int_{\varrho}^{\infty}\xi K_0(\xi\sqrt{\lambda_h})\left[\int_0^{2\pi}\left\{-\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q, \xi) + \varrho_h'\gamma_a(Q, \xi)] + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_0^a f(Q, \xi, s)w_h(s)\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\xi + \sum_l^{1,\infty} I_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})\,\frac{1}{\pi}\int_{\varrho}^{\infty}\xi K_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\,\cdot$$

$$\left.\cdot\left[\int_0^{2\pi}\left\{-\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q, \xi) + \varrho_h'\gamma_a(Q, \xi)] + \int_0^a f(Q, \xi, s)w_h(s)\,\mathrm{d}s\right\}\cos(l\cdot(t-\omega))\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\xi\right\}.$$

Osservazione I. È noto che $K_l'(\sigma)$ ha valore sempre negativo per $\sigma > 0$. Essendo poi

$$K_l(\sigma) = I_l(\sigma)\int_{\sigma}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu[I_l(\mu)]^2}, \qquad \text{risulta} \qquad I_l'(\sigma)\int_{\sigma}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu[I_l(\mu)]^2} - \frac{1}{\sigma I_l(\sigma)} = K_l'(\sigma) < 0\,,$$

vale a dire, poichè $I_l(\sigma)$ e $I_l'(\sigma)$ sono positive per $\sigma > 0$,

$$\frac{1}{\sigma I_l(\sigma)} > \frac{1}{\sigma I_l(\sigma)} - I_l'(\sigma)\int_{\sigma}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu[I_l(\mu)]^2} = -K_l'(\sigma) = |\,K_l'(\sigma)\,| > 0\,,$$

sicchè si può dire che $-K_l'(\sigma)$ è sempre positivo e infinitesimo dell'ordine esponenziale quando $\sigma \to \infty$.

Ricordando che è inoltre

$$I_l(\sigma) = \sum_n^{0,\infty} \frac{(\sigma/2)^{l+2n}}{n!\,(l+n)!} = \left(\frac{\sigma}{2}\right)^l \sum_n^{0,\infty} \frac{(\sigma/2)^{2n}}{(l+n)!\,n!},$$

si trova, calcolando la $I_l'(\sigma)$, che è

$$I_l'(\sigma) = \frac{l}{\sigma}\, I_l(\sigma) + I_{l+1}(\sigma)\,.$$

Si rammenti a questo punto la Osservazione I del n. 7, Parte I, e si noti che, in forza di essa, l'espressione $I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})/I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})$ per grandi valori di l e per $h \to \infty$ si comporta come $\left(\dfrac{\xi}{\varrho}\right)^l e^{\sqrt{\lambda_h}(\xi-\varrho)}$.

Osservazione II. Ci riferiamo qui a quanto si è fatto al n. 9, Parte I. È facile dedurre che per grandi valori di l la $I_l(\sigma)$ tende ad avere il comportamento di $\dfrac{\sqrt{\pi}\sigma^l e^\sigma}{2l^{1/2}2^l\Gamma(l+1/2)\Gamma(1/2)}$ (come si vede tenendo pure presente la detta Osservazione I del n. 7, Parte I). Rammentando che $\sqrt{\lambda_h}$, crescente, diverge positivamente come $h\pi/a$ quando $h \to \infty$, si ha che l'espressione

$$K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})I_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) = \int_{\varrho\sqrt{\lambda_h}}^{\infty} \frac{I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})}{I_l(\mu)}\,\frac{I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})}{I_l(\mu)}\,\frac{1}{\mu}\,\mathrm{d}\mu\,,$$

sempre per grandi valori di l e per $h \to \infty$, ha il comportamento di

$$(\xi\varrho)^l\lambda_h^l e^{(\xi+\varrho)\sqrt{\lambda_h}} \int_{\varrho\sqrt{\lambda_h}}^{\infty} \frac{e^{-2\mu}\,\mathrm{d}\mu}{\mu^{2l+1}}\,.$$

Si noti d'altra parte che il rapporto di infinitesimi, quando $h \to \infty$,

$$\int_{\varrho\sqrt{\lambda_h}}^{\infty} \frac{e^{-2\mu}\,\mathrm{d}\mu}{\mu^{2l+1}} \Big/ (\varrho\sqrt{\lambda_h})^{-2l},$$

considerando come parametro divergente la $\sqrt{\lambda_h}$ e operando col teorema di l'Hospital, si comporta come $\dfrac{1}{2l}\,e^{-2\varrho\sqrt{\lambda_h}}$, sicchè l'integrale

$$\int_{\varrho\sqrt{\lambda_h}}^{\infty} \frac{e^{-2\mu}\,\mathrm{d}\mu}{\mu^{2l+1}}$$

si comporta come $e^{-2\varrho\sqrt{\lambda_h}}/(2l\varrho^{2l}\lambda_h^l)$ quando $h \to \infty$.

Se ne conclude che l'espressione $K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})$ (con $\xi < \varrho$) per grandi valori di l e per $h \to \infty$ si comporta come $\dfrac{(\xi/\varrho)^l}{2l}\, e^{\sqrt{\lambda_h}(\xi-\varrho)}$. Ne segue pure che l'altra (ove $\varrho < \xi$) $I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})K_l(\xi\sqrt{\lambda_h})$ per grandi valori di l e per $h \to \infty$ si comporta come $\dfrac{(\varrho/\xi)^l}{2l}\, e^{\sqrt{\lambda_h}(\varrho-\xi)}$.

Poichè le due espressioni (con $\sigma > 0$) $K_l(\sigma)I_l'(\sigma)$, $-I_l(\sigma)K_l'(\sigma)$ sono entrambe positive [per essere $K_l'(\sigma)$ sempre negativa per $\sigma > 0$] e la loro somma è $1/\sigma$, si vede anzitutto a mezzo delle solite relazioni che le due espressioni in parola si comportano egualmente quando $\sigma \to \infty$, vale a dire che per $\sigma \to \infty$ entrambe si comportano come $1/(2\sigma)$ e ciò uniformemente rispetto alla classe di tutti gli l.

Se ne ricava che le due espressioni $I_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})$, $K_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})$ quando $h \to \infty$ si comportano, rispettivamente, come $1/(2\varrho\sqrt{\lambda_h})$, $-1/(2\varrho\sqrt{\lambda_h})$ e ciò uniformemente rispetto alla classe di tutti gli l. Si ha così:

1°) Per $\xi < \varrho$ la

$$\sqrt{\lambda_h}K_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})I_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) = \sqrt{\lambda_h}K_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})\,\frac{I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})}{I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})},$$

per grandi valori di l e se $h \to \infty$ ha il comportamento di

$$-\sqrt{\lambda_h}\,\frac{1}{2\varrho\sqrt{\lambda_h}}\left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^l e^{\sqrt{\lambda_h}(\xi-\varrho)} = -\frac{1}{2\varrho}\left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^l e^{\sqrt{\lambda_h}(\xi-\varrho)}.$$

2°) Per $\varrho < \xi$ la

$$\sqrt{\lambda_h}I_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})K_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) = \sqrt{\lambda_h}I_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})\,\frac{K_l(\xi\sqrt{\lambda_h})}{K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})}$$

per grandi valori di l e se $h \to \infty$ ha il comportamento di

$$\sqrt{\lambda_h}\,\frac{1}{2\varrho\sqrt{\lambda_h}}\left(\frac{\varrho}{\xi}\right)^l e^{\sqrt{\lambda_h}(\varrho-\xi)} = \frac{1}{2\varrho}\left(\frac{\varrho}{\xi}\right)^l e^{\sqrt{\lambda_h}(\varrho-\xi)},$$

e ciò per il fatto che, procedendo al solito con il teorema di l'HOSPITAL considerando divergente il parametro $\sqrt{\lambda_h}$, per $h \to \infty$, si trova essere il comportamento di $K_l(\xi\sqrt{\lambda_h})/K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})$, per $h \to \infty$, eguale a quello di $I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})/I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})$.

Per il caso 1°) di tale Osservazione II si ha che, se $0 < \xi < \varrho$, la espressione negativa

$$\xi\sqrt{\lambda_h}I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})K_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h}) \tag{1}$$

per grandi valori di l e se $h \to \infty$ ha il comportamento di $-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^{l+1} e^{\sqrt{\lambda_h}(\xi-\varrho)}$ e costituisce una successione di h a variazione totale finita (²), ed è, come si è detto, infinitesima per $h \to \infty$.

Premesso ciò, si noti che nella serie primo addendo della (B_ϱ) il fattore che moltiplica la $w_h(z)$ non è altro che la seguente serie lineare:

$$(\Omega) \qquad -\sqrt{\lambda_h}\left\{\frac{1}{2} K_0'(\varrho\sqrt{\lambda_h}) \frac{1}{\pi}\int_0^\varrho \xi I_0(\xi\sqrt{\lambda_h})\left[\int_0^{2\pi}\left\{-\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q,\xi)+\varrho_h'\gamma_a(Q,\xi)]+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_0^a f(Q,\xi,s)w_h(s)\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\xi + \sum_l^{1,\infty} K_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})\frac{1}{\pi}\int_0^\varrho \xi I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\cdot$$

$$\left.\cdot\left[\int_0^{2\pi}\left\{-\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q,\xi)+\varrho_h'\gamma_a(Q,\xi)]+\int_0^a f(Q,\xi,s)w_h(s)\,\mathrm{d}s\right\}\cos(l\cdot(t-\omega))\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\xi\right\}.$$

Di questa serie lineare (Ω) consideriamo prima di tutto la parte a):

$$\text{a)} \qquad -\sqrt{\lambda_h}\cdot\left\{\frac{1}{2} K_0'(\varrho\sqrt{\lambda_h})\frac{1}{\pi}\int_0^\varrho \xi I_0(\xi\sqrt{\lambda_h})\left[\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a f(Q,\xi,s)w_h(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\xi+\right.$$

$$\left.+\sum_l^{1,\infty} K_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})\frac{1}{\pi}\int_0^\varrho \xi I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\left[\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a f(Q,\xi,s)w_h(s)\,\mathrm{d}s\right)\cos(l\cdot(t-\omega))\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\xi\right\},$$

e imponiamo alla $f(Q, \xi, s)$, oltre alle precedenti note condizioni, l'ulteriore restrizione d'essere a variazione limitata rispetto alla s, variabile da 0 ad a, cioè lungo i segmenti di T perpendicolari alle due facce piane $z = 0$, $z = a$, costituenti FT, e in modo tale che la relativa variazione totale $V(Q, \xi)$ [si rammenti che t è l'argomento del punto Q di $\omega(O)$ nel riferimento polare posto in $S_{(2)}$] soddisfi la relazione (11) del n. 6, della Parte I, relativa alla $f(Q, \xi, s)$. Il massimo modulo di $f(Q, \xi, s)$ lungo i detti segmenti soddisfa a priori tale relazione (11) per il fatto che per ipotesi questa relazione deve essere soddisfatta da $|f(Q, \xi, s)|$. Indicheremo per il seguito con la dicitura *condizione* D' *relativa ad* f la nuova condizione imposta ora alla $f(Q, \xi, s)$.

In forza di questa condizione nuova, le espressioni

$$\int_0^a f(Q,\xi,s)\,\mathrm{sen}\,\frac{h\pi s}{a}\,\mathrm{d}s\,, \qquad \int_0^a f(Q,\xi,s)\cos\frac{h\pi s}{a}\,\mathrm{d}s\,,$$

(²) Vedi M. PICONE, *Appunti di Analisi superiore*, Vol. I (2ª ediz.), Rondinella, Napoli 1946; cfr, pp. 196-204.

quando $h \geqslant 1$, sono infinitesime, almeno dell'ordine $1/h$, per $h \to \infty$, cioè come $1/\sqrt{\lambda_h}$ e quando ξ si fa divergere si comportano come $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_h}}\, e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\xi}$. Osservando che, per le argomentazioni svolte nella Osservazione II del n. 7, Parte I $\left[\text{sostituendo ivi alla } w_h(s) \text{ le espressioni sen } \dfrac{h\pi s}{a},\ \cos\dfrac{h\pi s}{a}\right]$, risulta anche essere

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^a f(Q,\xi,s)\begin{matrix}\cos\dfrac{h\pi s}{a}\\ \operatorname{sen}\dfrac{h\pi s}{a}\end{matrix}\,ds\right\}\begin{matrix}\cos(lt)\\ \operatorname{sen}(lt)\end{matrix}\,dt\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left|\int_0^a \begin{matrix}\cos\dfrac{h\pi s}{a}\\ \operatorname{sen}\dfrac{h\pi s}{a}\end{matrix}\left\{\int_0^{2\pi} f(Q,\xi,s)\begin{matrix}\cos(lt)\\ \operatorname{sen}(lt)\end{matrix}\,dt\right\}ds\right| < c\,e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\xi}\,\frac{1}{l^2},$$

per $l \geqslant 1$, possiamo concludere, tenendo conto dei due risultati, che per $l \geqslant 1$, $h \geqslant 1$, gli integrali

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^a f(Q,\xi,s)\begin{matrix}\cos\dfrac{h\pi s}{a}\\ \operatorname{sen}\dfrac{h\pi s}{a}\end{matrix}\,ds\right\}\cos\left(l\cdot(t-\omega)\right)dt, \tag{2}$$

si comportano come

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_h}\,l^2}\,e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\xi}, \qquad \text{per} \quad h \geqslant 1,\ l \geqslant 1\,. \tag{3}$$

In quel che ora segue noi ci serviremo di questa ultima risultanza nei casi $h \geqslant 1$, $l \geqslant 1$. Naturalmente va qui inteso che con la dicitura «si comportano come» si vuole intendere che le espressioni (2) in questione sono maggiorabili in modulo dal prodotto di una costante positiva abbastanza grande per l'espressione (3).

Ricordiamo ora le argomentazioni svolte in un precedente lavoro [vedasi Parte I, lavoro citato nell'annotazione (2), cfr. pag. 171 di tale lavoro], e notiamo che da queste risulta essere

$$w_h(s) = -\sqrt{\frac{2}{a}}\cos\frac{h\pi s}{a} + \sqrt{\frac{2}{a}}\operatorname{sen}(\varepsilon_h s)\cdot\operatorname{sen}\frac{h\pi s}{a} + \sqrt{\frac{2}{a}}\,\frac{a\alpha_0}{\beta_0 h\pi}\operatorname{sen}\frac{h\pi s}{a} + (\text{termini trigo-}$$

nometrici coi coefficienti definitivamente monotoni e infinitesimi d'ordine $\geqslant 1/h^2$), ove ε_h è infinitesimo monotono nel senso della decrescenza ($\varepsilon_h > 0$) come $1/h$.

Sostituendo allora in

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^a f(Q,\xi,s)w_h(s)\,\mathrm{d}s\right\}\cos(l\cdot(t-\omega))\,\mathrm{d}t\,,$$

al posto di $w_h(s)$, ciascuno dei termini nella cui somma è stata spezzata la $w_h(s)$, il primo integrale che se ne ricava si comporta come $\frac{1}{\sqrt{\lambda_h}\,l^2}e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\xi}$ (ricordare che $1/\sqrt{\lambda_h}$ si comporta come $1/h$), e gli altri, rispettivamente, come i prodotti dell'ultima espressione ora scritta per $1/h$, per $1/h$, per $1/h^2$; sicchè tra queste espressioni la prima su scritta costituisce quella esprimente l'infinitesimo di ordine minimo quando $h \to \infty$.

Allo scopo di giustificare rapidamente in modo completo le risultanze ora indicate, conviene osservare quanto segue:

1°) Se $f(x)$ è una funzione a variazione limitata in un intervallo (a', a'') si può determinare una costante positiva c in modo che sia, per ogni intero positivo n,

$$\left|\int_{a'}^{a''} f(x)\begin{matrix}\cos(nx)\\ \mathrm{sen}\,(nx)\end{matrix}\,\mathrm{d}x\right| < \frac{c}{n}\,.$$

2°) Se $\psi(x)$ è integrabile in un intervallo (α, β) e se $\varphi(x)$ è una funzione positiva, continua e crescente nel medesimo intervallo, allora è

$$\int_\alpha^\beta \psi(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(\beta)\cdot\int_\eta^\beta \psi(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

ove η è un valore opportuno di x fra α e β.

Premesse queste osservazioni si noti che il secondo degli integrali di cui sopra

$$\sqrt{\frac{2}{a}}\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^a f(Q,\xi,s)\,\mathrm{sen}\,(\varepsilon_h s)\cdot\mathrm{sen}\frac{h\pi s}{a}\,\mathrm{d}s\right\}\cos(l\cdot(t-\omega))\,\mathrm{d}t\,,$$

(per il primo e per il terzo la proposizione è ovviamente vera per essere il coefficiente relativo indipendente da s) si può scrivere nel modo che segue, pensando h abbastanza grande affinchè $\varepsilon_h s$ sia $< \pi/2$, quando $0 < s < a$,

$$(4) \qquad \sqrt{\frac{2}{a}} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^a f(Q, \xi, s) \operatorname{sen}(\varepsilon_h s) \cdot \operatorname{sen}\frac{h\pi s}{a}\, ds \right\} \cos(l\cdot(t-\omega))\, dt =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{a}} \int_0^a \operatorname{sen}(\varepsilon_h s) \left[\int_0^{2\pi} f(Q, \xi, s) \cos(l\cdot(t-\omega))\, dt \right] \operatorname{sen}\frac{h\pi s}{a}\, ds =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen}(\varepsilon_h a) \cdot \int_\eta^a \left[\int_0^{2\pi} f(Q, \xi, s) \cos(l\cdot(t-\omega))\, dt \right] \operatorname{sen}\frac{h\pi s}{a}\, ds\,.$$

Ma in questa espressione l'integrale

$$\int_0^{2\pi} f(Q, \xi, s) \cos(l\cdot(t-\omega))\, dt \qquad \text{si comporta al più come } \frac{1}{l^2}\, e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\xi}$$

(per le *condizioni* D della Osservazione II del n. 7, Parte I), mentre d'altra parte per la *condizione* D' *relativa alla* f l'integrale

$$\int_0^{2\pi} f(Q, \xi, s) \cos(l\cdot(t-\omega))\, dt\,,$$

pensato come funzione di s in $(0, a)$ è funzione a variazione limitata in tutto $(0, a)$; sicchè, per 1°), il suo integrale

$$\int_\eta^a \left[\int_0^{2\pi} f(Q, \xi, s) \cos(l\cdot(t-\omega))\, dt \right] \operatorname{sen}\frac{h\pi s}{a}\, ds$$

è a sua volta infinitesimo, rispetto ad h, come $1/h$. Per la presenza del fattore esterno $\operatorname{sen}(\varepsilon_h a)$, infinitesimo come $1/h$, si conclude che l'integrale (4) si comporta nel suo complesso come $\frac{1}{h^2 l^2}\, e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\xi}$. Per la Osservazione I del n. 7, Parte I, il rapporto $I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})/I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})$ con $0 < \xi \leqslant \varrho$, sempre per $l \geqslant 1$, si può maggiorare mediante l'espressione $M(\xi/\varrho)^l e^{\xi\sqrt{\lambda_h}-\varrho\sqrt{\lambda_h}} < M e^{\sqrt{\lambda_h}(\xi-\varrho)}$. Essendo, come si è visto nella Osservazione I di questo n.,

$$|\, K_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})\,| < \frac{1}{\varrho\sqrt{\lambda_h}}\, \frac{1}{I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})}\,,$$

si ha che, sempre per $0 < \xi \leqslant \varrho$ e $l \geqslant 1$,

$$\sqrt{\lambda_h} \mid K_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h}) \mid \xi I_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) < \frac{\xi\sqrt{\lambda_h}}{\varrho\sqrt{\lambda_h}} \frac{I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})}{I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})} < M e^{\sqrt{\lambda_h}(\xi-\varrho)}.$$

Osservazione III. Per il restante valore di l, $l = 0$, ci si può servire invece dell'altra (notando che $\sqrt{\lambda_h} \to \infty$ per $h \to \infty$)

$$\lambda_h \xi \mid K_0'(\varrho\sqrt{\lambda_h}) \mid I_0(\xi\sqrt{\lambda_h}) < \frac{\xi}{\varrho} \frac{I_0(\xi\sqrt{\lambda_h})}{I_0(\varrho\sqrt{\lambda_h})} \sim$$

$$\sim \frac{\xi}{\varrho} e^{\sqrt{\lambda_h}(\xi-\varrho)} \left(\frac{2\pi\xi\sqrt{\lambda_h}}{2\pi\varrho\sqrt{\lambda_h}}\right)^{-1/2} = \sqrt{\frac{\xi}{\varrho}}\, e^{\sqrt{\lambda_h}(\xi-\varrho)} < e^{\sqrt{\lambda_h}(\xi-\varrho)}.$$

In corrispondenza a tutto ciò, si noti che sotto la *condizone* D' l'espressione

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^a f(Q, \xi, s) \begin{matrix} \cos \dfrac{h\pi s}{a} \\ \operatorname{sen} \dfrac{h\pi s}{a} \end{matrix} \, ds \right\} dt,$$

quando $h \geqslant 1$, risulta infinitesima per $h \to \infty$ almeno dell'ordine $1/h$ cioè come $1/\sqrt{\lambda_h}$, e si comporta cioè come $(1/\sqrt{\lambda_h})e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\xi}$ al più. La sostituzione in

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^a f(Q, \xi, s) w_h(s)\, ds \right\} dt,$$

al posto di $w_h(s)$, di ciascuno dei termini nella cui somma è stata spezzata la $w_h(s)$, porta al fatto che il primo integrale che se ne ricava si comporta come $(1/\sqrt{\lambda_h})e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\xi}$ e gli altri, rispettivamente, come i prodotti di questa ultima espressione per $1/h$, per $1/h$, per $1/h^2$; sicchè fra queste espressioni la prima, cioè $(1/\sqrt{\lambda_h})e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\xi}$, è fra esse l'infinitesimo di ordine minimo quando $h \to \infty$.

Si tenga infine presente che la classe delle $w_h(z)$ è limitata al variare di h e di z. Per quanto siamo venuti dicendo fino ad ora si ha che quando $l \geqslant 1$, $h \geqslant 1$ le espressioni

$$\sqrt{\lambda_h} w_h(z) K_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h}) \frac{1}{\pi}\int_0^\varrho \xi I_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) \left[\int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^a f(Q, \xi, s) w_h(s)\, ds \right\} \cos(l\cdot(t-\omega))\, dt\right] d\xi,$$

con la scelta di un positivo M' opportunamente grande, possono maggiorarsi con le altre

$$\frac{M'}{\sqrt{\lambda_h}\,l^2}\int_0^{\varrho} e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\xi+\sqrt{\lambda_h}\xi}\,e^{-\sqrt{\lambda_h}\varrho}\,d\xi =$$

$$= \frac{M'}{\sqrt{\lambda_h}\,l^2}\,\frac{e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\varrho}-e^{-\sqrt{\lambda_h}\varrho}}{\sqrt{\lambda_h}+\sqrt{\lambda_0}-\beta} < M' e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\varrho}\,\frac{1}{\sqrt{\lambda_h}[\sqrt{\lambda_h}+\sqrt{\lambda_0}-\beta]l^2}\,.$$

Quando invece è $l=0$ le espressioni medesime possono maggiorarsi mediante le seguenti:

$$\frac{M'}{\sqrt{\lambda_h}}\,e^{-\varrho\sqrt{\lambda_h}}\int_0^{\varrho} e^{(\sqrt{\lambda_h}+\sqrt{\lambda_0}-\beta)\xi}\,d\xi =$$

$$= \frac{M'}{\sqrt{\lambda_h}}\,\frac{e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\varrho}-e^{-\varrho\sqrt{\lambda_h}}}{\sqrt{\lambda_h}+\sqrt{\lambda_0}-\beta} < M' e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\varrho}\,\frac{1}{\sqrt{\lambda_h}[\sqrt{\lambda_h}+\sqrt{\lambda_0}-\beta]}\,.$$

Sono ovvi i casi per $h=0$.

Col solito raffronto con la serie doppia armonica generalizzata

$$\sum_h^{1,\infty}\sum_l^{1,\infty}\frac{1}{h^2 l^2}\,,$$

se ne conclude che *la serie seguente*, corrispondente alla parte a),

$$-\sum_h^{0,\infty}\sqrt{\lambda_h}\,w_h(z)\left\{\frac{1}{2}K_0'(\varrho\sqrt{\lambda_h})\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\varrho}\xi I_0(\xi\sqrt{\lambda_h})\left[\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^a f(Q,\xi,s)w_h(s)\,ds\right\}dt\right]d\xi\,+\right.$$

$$\left.+\sum_l^{1,\infty}K_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})\,\frac{1}{\pi}\int_0^{\varrho}\xi I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\left[\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^a f(Q,\xi,s)w_h(s)\,ds\right\}\cos\left(l\cdot(t-\omega)\right)dt\right]d\xi\right\},$$

considerata quale serie doppia, è assolutamente convergente in $T+\mathrm{F}T$ *ed è quindi continua in ogni dominio limitato di* $T+\mathrm{F}T$.

Consideriamo adesso la restante parte della serie lineare (Ω), cioè la parte b):

$$\text{b)}\qquad -\sqrt{\lambda_h}\left\{\frac{1}{2}K_0'(\varrho\sqrt{\lambda_h})\,\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\varrho}\xi I_0(\xi\sqrt{\lambda_h})\left[\int\limits_0^{2\pi}\{-\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q,\xi)+\varrho_h'\gamma_a(Q,\xi)]\}\,dt\right]d\xi+\right.$$

$$\left.+\sum_l^{1,\infty}K_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})\,\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\varrho}\xi I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\left[\int\limits_0^{2\pi}\{-\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q,\xi)+\varrho_h'\gamma_a(Q,\xi)]\}\cos(l\cdot(t-\omega))\,dt\right]d\xi\right\}=$$

$$=\varrho_h\lambda_h\left\{\frac{1}{2}K_0'(\varrho\sqrt{\lambda_h})\,\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\varrho}\xi I_0(\xi\sqrt{\lambda_h})\left[\int\limits_0^{2\pi}\gamma_0(Q,\xi)\,dt\right]d\xi+\right.$$

$$\left.+\sum_l^{1,\infty}K_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})\,\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\varrho}\xi I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\left[\int\limits_0^{2\pi}\gamma_0(Q,\xi)\cos(l\cdot(t-\omega))\,dt\right]d\xi\right\}+$$

$$+\varrho_h'\lambda_h\left\{\frac{1}{2}K_0'(\varrho\sqrt{\lambda_h})\,\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\varrho}\xi I_0(\xi\sqrt{\lambda_h})\left[\int\limits_0^{2\pi}\gamma_a(Q,\xi)\,dt\right]d\xi+\right.$$

$$\left.+\sum_l^{1,\infty}K_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})\,\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\varrho}\xi I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\left[\int\limits_0^{2\pi}\gamma_a(Q,\xi)\cos(l\cdot(t-\omega))\,dt\right]d\xi\right\}.$$

Ma (ved. precedente lavoro citato in Parte I, nell'annotazione ([2]), cfr. in tale lavoro pag. 170), per $h\geqslant 1$,

$$\varrho_h=\sqrt{\frac{2}{a}}\,\frac{a}{\beta_0 h\pi}+(\text{infinitesimo monotono d'ordine }1/h^3),$$

$$\varrho_h'=\sqrt{\frac{2}{a}}\,\frac{(-1)^{h+1}}{\beta}\,\frac{a}{h\pi}+(\text{infinitesimo monotono d'ordine }1/h^3),$$

$$\sqrt{\lambda_h}=\frac{h\pi}{a}+\varepsilon_h\,,\quad\text{con }\varepsilon_h\text{ infinitesimo monotono dell'ordine di }1/h\,.$$

Ne segue:

$$\varrho_h\lambda_h=\sqrt{\frac{2}{a}}\,\frac{1}{\beta_0}\,\frac{h\pi}{a}+(\text{infinitesimo d'ordine }1/h)+(\text{infinitesimo d'ordine }\geqslant 1/h^2),$$

$$\varrho_h'\lambda_h=\sqrt{\frac{2}{a}}\,\frac{(-1)^{h+1}}{\beta}\,\frac{h\pi}{a}+(\text{idem})+(\text{idem}).$$

D'altra parte, a mezzo della (11*) relativa alla Osservazione II del n. 7 della Parte I, si vede che, se $\bar{c}$ è costante positiva opportunamente grande, si può far sì che risulti:

$$(5)\qquad \left.\begin{array}{l} \left|\displaystyle\int_0^{2\pi} \gamma_0(Q,\xi)\,\mathrm{d}t\right| \\ \left|\displaystyle\int_0^{2\pi} \gamma_a(Q,\xi)\,\mathrm{d}t\right| \end{array}\right\} < \bar{c}\,e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\xi};$$

$$(6)\qquad \left.\begin{array}{l} \left|\displaystyle\int_0^{2\pi} \gamma_0(Q,\xi)\cos(l\cdot t-\omega))\,\mathrm{d}t\right| \\ \left|\displaystyle\int_0^{2\pi} \gamma_a(Q,\xi)\cos(l\cdot t-\omega))\mathrm{d}t\right| \end{array}\right\} < \frac{\bar{c}}{l^2}\,e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\xi} \quad \text{per } l \geqslant 1\,.$$

Inoltre, per quanto si è detto in questo n., se $0 < \xi \leqslant \varrho$, si può scegliere $\overline{M}$ opportunamente grande affinchè risulti:

$$(7)\qquad \xi\,|\,K_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})\,|\,I_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) < \overline{M}\,\frac{1}{\sqrt{\lambda_h}}\,e^{\sqrt{\lambda_h}(\xi-\varrho)}, \quad \text{per } l=0 \text{ e } l \geqslant 1\,.$$

La parte della (B_ϱ) che corrisponde alla parte b), si può scrivere, escludendo i termini pertinenti al valore di $h=0$,

$$\sum_h^{1,\infty} w_h(z)\left[\sqrt{\frac{2}{a}}\,\frac{1}{\beta_0}\,\frac{h\pi}{a} + (\text{infinitesimo d'ordine } 1/h) + (\text{infinitesimi d'ordine} \geqslant 1/h^2)\right]\cdot$$
$$\cdot\left\{\frac{1}{2}K_0'(\varrho\sqrt{\lambda_h})\,\frac{1}{\pi}\int_0^\varrho \xi I_0(\xi\sqrt{\lambda_h})\left[\int_0^{2\pi}\gamma_0(Q,\xi)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\xi\,+\right.$$
$$+\sum_l^{1,\infty} K_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})\,\frac{1}{\pi}\int_0^\varrho \xi I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\left[\int_0^{2\pi}\gamma_0(Q,\xi)\cos(l\cdot(t-\omega))\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\xi\,+$$
$$+\sum_h^{1,\infty} w_h(z)\left[\sqrt{\frac{2}{a}}\,\frac{(-1)^{h+1}}{\beta}\,\frac{h\pi}{a} + (\text{infinitesimo d'ordine } 1/h) + (\text{infinitesimi d'ordine} \geqslant 1/h^2)\right]\cdot$$
$$\cdot\left\{\frac{1}{2}K_0'(\varrho\sqrt{\lambda_h})\,\frac{1}{\pi}\int_0^\varrho \xi I_0(\xi\sqrt{\lambda_h})\left[\int_0^{2\pi}\gamma_a(Q,\xi)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\xi\,+\right.$$
$$\left.+\sum_l^{1,\infty} K_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})\,\frac{1}{\pi}\int_0^\varrho \xi I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\left[\int_0^{2\pi}\gamma_a(Q,\xi)\cos(l\cdot t-\omega))\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\xi\right\}.$$

Qui le serie pertinenti alle parti con a fattore le espressioni:

(infinitesimo d'ordine $1/h$) + (infinitesimi d'ordine $\geqslant 1/h^2$)

sono assolutamente convergenti nel senso delle serie doppie, come al solito si vede subito col raffronto con la serie doppia armonica generalizzata, in $T+FT$. Lo stesso avviene con l'aggiunta dei termini pertinenti al valore di $h=0$.

Resta da vedere il comportamento della restante parte

$$\sqrt{\frac{2}{a}}\frac{1}{\beta_0}\frac{\pi}{a}\sum_h^{1,\infty} h w_h(z)\left\{\frac{1}{2}K_0'(\varrho\sqrt{\lambda_h})\frac{1}{\pi}\int_0^\varrho \xi I_0(\xi\sqrt{\lambda_h})\left[\int_0^{2\pi}\gamma_0(Q,\xi)\,dt\right]d\xi+\right.$$
$$\left.+\sum_l^{1,\infty} K_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})\frac{1}{\pi}\int_0^\varrho \xi I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\left[\int_0^{2\pi}\gamma_0(Q,\xi)\cos(l\cdot(t-\omega))\,dt\right]d\xi\right\}-$$
$$-\sqrt{\frac{2}{a}}\frac{1}{\beta}\frac{\pi}{a}\sum_h^{1,\infty} h(-1)^h w_h(z)\left\{\frac{1}{2}K_0'(\varrho\sqrt{\lambda_h})\frac{1}{\pi}\int_0^\varrho \xi I_0(\xi\sqrt{\lambda_h})\left[\int_0^{2\pi}\gamma_a(Q,\xi)\,dt\right]d\xi+\right.$$
$$\left.+\sum_l^{1,\infty} K_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})\frac{1}{\pi}\int_0^\varrho \xi I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\left[\int_0^{2\pi}\gamma_a(Q,\xi)\cos(l\cdot(t-\omega))\,dt\right]d\xi\right\},$$

e per queste due serie addendi intenderemo riferirci alla loro sommazione per linee.

Le due serie lineari coefficienti della $w_h(z)$ risultano, come subito si vede tenendo conto delle maggiorazioni precedentemente indicate (5), (6), (7), convergenti e con le rispettive somme entrambe infinitesime come $1/h$ per $h\to\infty$.

Tenendo conto della indietro riportata espressione di $w_h(z)$ si vede subito che, a meno di serie che risultano assolutamente convergenti nel senso delle serie doppie in $T+FT$, lo studio del comportamento della espressione che ci occupa si riduce a quello del comportamento dell'altra espressione

$$-\frac{2}{\beta_0 a^2}\sum_h^{1,\infty} h\cos\frac{h\pi z}{a}\cdot\left\{\frac{1}{2}K_0'(\varrho\sqrt{\lambda_h})\int_0^\varrho \xi I_0(\xi\sqrt{\lambda_h})\left[\int_0^{2\pi}\gamma_0(Q,\xi)\,dt\right]d\xi+\right.$$
$$\left.+\sum_l^{1,\infty} K_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})\int_0^\varrho \xi I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\left[\int_0^{2\pi}\gamma_0(Q,\xi)\cos(l\cdot(t-\omega)\,dt\right]d\xi\right\}+$$
$$+\frac{2}{\beta a^2}\sum_h^{1,\infty}(-1)^h h\cos\frac{h\pi z}{a}\cdot\left\{\frac{1}{2}K_0'(\varrho\sqrt{\lambda_h})\int_0^\varrho \xi I_0(\xi\sqrt{\lambda_h})\left[\int_0^{2\pi}\gamma_a(Q,\xi)\,dt\right]d\xi+\right.$$
$$\left.+\sum_l^{1,\infty} K_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})\int_0^\varrho \xi I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\left[\int_0^{2\pi}\gamma_a(Q,\xi)\cos(l\cdot(t-\omega))\,dt\right]d\xi\right\},$$

ove al posto di $(-1)^h\cos\dfrac{h\pi z}{a}$ si può porre $\cos\dfrac{h\pi(z+a)}{a}$.

Si tenga ora presente che la serie

$$\sum_h^{1,\infty} \cos \frac{h\pi z}{a}$$

ha finite la minima e la massima somma quando $0 < \delta \leqslant z \leqslant a$ e così avviene per quelle della serie

$$\sum_h^{1,\infty} \cos \frac{h\pi(z+a)}{a},$$

quando $0 \leqslant z \leqslant a - \delta$.

D'altra parte per essere (1), per l'Osservazione I di questo n., una successione a variazione totale finita che è infinitesima per $h \to \infty$ e poichè il fattore che in entrambe le serie in esame moltiplica $\cos (h\pi z/a)$ oppure $\cos (h\pi(z+a)/a)$ è, al crescere di h, infinitesimo (come $1/h$), se ne deduce, ragionando come si fece in analoga questione [vedasi in Parte I il lavoro citato nell'annotazione ([2]): cfr. in tale lavoro pag. 173 e seg.], che il detto fattore di $\cos (h\pi z/a)$, $\cos (h\pi(z+a)/a)$, viene esso pure a costituire una successione, al crescere di h, che è a variazione totale finita e che è inoltre infinitesima.

Per il criterio di PICONE (ved. pag. 199 del lavoro citato) le due serie in esame risultano uniformemente convergenti in ogni dominio limitato di T non contenente punti della FT (sommandole per linee nel senso chiaramente indicato dalle forme scritte per gli sviluppi).

La prima serie del secondo membro di (B_ϱ) risulta così essa pure uniformemente convergente quando il punto (H, ϱ, z) varia in ogni dominio limitato di $T - \mathrm{F}T$. È inoltre evidente che quanto si è fino ad ora fatto si può ripetere onde potere stabilire che lo stesso avviene anche per l'altra serie secondo addendo del secondo membro della (B_ϱ). Se ne conclude che:

La $\dfrac{\partial u(H, \varrho, z)}{\partial \varrho}$ $\left[\textit{e quindi le } \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}\right]$ *esiste ed è continua in* $T - \mathrm{F}T$, *almeno. Essa è data dalla somma delle somme delle due serie doppie [intendendo di sommare queste due serie doppie per linee, nel senso chiaramente indicato nel secondo membro di* (B_ϱ)*] indicate nel secondo membro della* (B_ϱ)*. Queste due serie doppie, sommate per linee nel modo detto, risultano uniformemente convergenti quando* (H, ϱ, z) *varia in qualsiasi dominio limitato appartenente a* $T - \mathrm{F}T$, *e la loro somma è così una funzione continua in* $T - \mathrm{F}T$, *almeno.*

Per quel che si riferisce alla analisi corrispondente per la serie secondo addendo del secondo membro di (B_ϱ), osserviamo solo che, tenendo fisso l e variabile h, l'espressione $\xi\sqrt{\lambda_h}K_l(\xi\sqrt{\lambda_h})I'_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})$ costituisce, per $h \to \infty$, una successione a variazione totale finita e infinitesima [che ha qui il ruolo che la (1) aveva nel caso precedente] perchè, essendo $I'_l(\sigma) = \dfrac{l}{\sigma} I_l(\sigma) + I_{l+1}(\sigma)$, si ha che

$$\xi\sqrt{\lambda_h}K_l(\xi\sqrt{\lambda_h})I'_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) = \xi\sqrt{\lambda_h}K_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\frac{l}{\varrho\sqrt{\lambda_h}}I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) + \xi\sqrt{\lambda_h}K_l(\xi\sqrt{\lambda_h})I_{l+1}(\varrho\sqrt{\lambda_h})$$

e nel secondo membro di questa le due espressioni addende, per $\xi > \varrho$, sono, quando h varia divergendo positivamente, positive monotone nel senso della decrescenza e infinitesime. Dopo di ciò si procede nel modo seguito nel primo caso dettagliatamente trattato, operando con le considerazioni indicate nelle Osservazioni I e II al principio di questo n..

Passiamo infine allo studio di $\dfrac{\partial u(H,\varrho,z)}{\partial z}$. Derivando formalmente, rispetto a z, termine a termine, il secondo membro della (B), si ottiene il seguente sviluppo formale:

$$(\mathrm{B}_z)\qquad \frac{\partial u(H,\varrho,z)}{\partial z} \backsim -\sum_h^{0,\infty}\lambda_h\varrho_h\left[\beta_0 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_h}z) + \frac{\alpha_0}{\sqrt{\lambda_h}}\cos(\sqrt{\lambda_h}z)\right]\cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{1}{2}K_0(\varrho\sqrt{\lambda_h})\frac{1}{\pi}\int_0^{\varrho}\xi I_0(\xi\sqrt{\lambda_h})\left[\int_0^{2\pi}\left\{-\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q,\xi) + \varrho'_h\gamma_a(Q,\xi)] + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_0^a f(Q,\xi,s)w_h(s)\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\xi + \sum_l^{1,\infty}K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})\frac{1}{\pi}\int_0^{\varrho}\xi I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\cdot$$

$$\left.\cdot\left[\int_0^{2\pi}\left\{-\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q,\xi) + \varrho'_h\gamma_a(Q,\xi)] + \int_0^a f(Q,\xi,s)w_h(s)\,\mathrm{d}s\right\}\cos(l\cdot(t-\omega))\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\xi\right\} -$$

$$-\sum_h^{0,\infty}\lambda_h\varrho_h\left[\beta_0\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_h}z) + \frac{\alpha_0}{\sqrt{\lambda_h}}\cos(\sqrt{\lambda_h}z)\right]\cdot\left\{\frac{1}{2}I_0(\varrho\sqrt{\lambda_h})\frac{1}{\pi}\int_{\varrho}^{\infty}\xi K_0(\xi\sqrt{\lambda_h})\cdot\right.$$

$$\cdot\left[\int_0^{2\pi}\left\{-\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q,\xi) + \varrho'_h\gamma_a(Q,\xi)] + \int_0^a f(Q,\xi,s)w_h(s)\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\xi +$$

$$+\sum_l^{1,\infty}I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})\frac{1}{\pi}\int_{\varrho}^{\infty}\xi K_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\left[\int_0^{2\pi}\left\{-\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q,\xi) + \varrho'_h\gamma_a(Q,\xi)] + \right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\int_0^a f(Q,\xi,s)w_h(s)\,\mathrm{d}s\right\}\cos(l\cdot(t-\omega))\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\xi\right\}.$$

Notando che $\lambda_h \varrho_h[\beta_0 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_h} z) + (\alpha_0/\sqrt{\lambda_h})\cos(\sqrt{\lambda_h} z)]$ si può scrivere nella forma

$$\sqrt{\lambda_h}\varrho_h[\beta_0\sqrt{\lambda_h}\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_h} z) + \alpha_0 \cos(\sqrt{\lambda_h} z)]\,,$$

si ha che l'espressione $\varrho_h[\sqrt{\lambda_h}\beta_0 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_h} z) + \alpha_0 \cos(\sqrt{\lambda_h} z)]$ nella trattazione da svolgere per lo studio della (B_z) è quella che giuoca lo stesso ruolo che nello studio della (B_ϱ) aveva l'espressione $w_h(z)$. Osservando che [ved. pag. 174 del lavoro solito più volte già citato] è, per $h \geqslant 1$,

$$\varrho_h[\sqrt{\lambda_h}\beta_0 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_h} z) + \alpha_0 \cos(\sqrt{\lambda_h} z)] = \sqrt{\frac{2}{a}}\operatorname{sen}\frac{h\pi z}{a} +$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{a}}\frac{\alpha_0 a}{\pi\beta_0 h}\cos\frac{h\pi z}{a} + \sqrt{\frac{2}{a}}\operatorname{sen}(\varepsilon_h z)\cos\frac{h\pi z}{a} + (\text{termini trigonometrici con coefficienti trigonometrici monotoni e infinitesimi d'ordine } \leqslant 1/h^2),$$

raffrontando il secondo membro di questa con quello della espressione corrispondente valevole per $w_h(z)$, indietro rammentata, si vede come valga la perfetta analogia di comportamento; sicchè, ripetendo nel caso nostro attuale tutta la trattazione svolta indietro per la (B_ϱ), è chiaro come anche adesso si possa pervenire alle stesse risultanze trovate allora, vale a dire che

Esiste anche la $\dfrac{\partial u(H, \varrho, z)}{\partial z}$, *almeno in* $T - FT$, *e questa è pure continua, almeno in* $T - FT$.

2. – Verifica delle poste equazioni al contorno. Continuità in $T + FT$ della $\dfrac{\partial u(H, \varrho, z)}{\partial z}$.

Resta ora da verificare che $u(H, \varrho, z)$, $\dfrac{\partial u(H, \varrho, z)}{\partial z}$ soddisfano le relazioni (2) della Parte I, cioè le due assegnate equazioni al contorno costituito dalle due facce $z = 0$, $z = a$ dello strato T. Da questa verifica seguirà evidentemente la continuità della $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ in $T + FT$.

Ci riferiremo, per brevità, alla giustificazione della validità della prima delle equazioni (2) della Parte I, cioè di quella relativa alla faccia $z = 0$ dello strato T. Con procedimento del tutto simile si può giustificare la validità della restante equazione, quella relativa alla faccia $z = a$. Cominciamo osservando che è

$$\alpha_0 w_h(z) + \beta_0\frac{dw_h(z)}{dz} = \alpha_0\varrho_h[-\beta_0\sqrt{\lambda_h}\cos(\sqrt{\lambda_h} z) + \alpha_0 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_h} z)] +$$

$$+ \beta_0\varrho_h[\beta_0\lambda_h \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_h} z) + \alpha_0\sqrt{\lambda_h}\cos(\sqrt{\lambda_h} z)] = \varrho_h\cdot(\alpha_0^2 + \beta_0^2\lambda_h)\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_h} z)\,.$$

È agevole dopo ciò scrivere la combinazione lineare delle due espressioni a secondo membro delle (B), (B_z) [che esprimono effettivamente $u(H, \varrho, z)$, $\dfrac{\partial u(H, \varrho, z)}{\partial z}$ in $T - FT$, ed anzi la prima in tutto $T + FT$] mediante le due costanti α_0, β_0.

Per agevolare la ricerca di cui dobbiamo ora occuparci, conviene scrivere la combinazione lineare in questione nel seguente modo:

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{C}^{(0)})\qquad & \alpha_0 u(H, \varrho, z) + \beta_0 \frac{\partial u(H, \varrho, z)}{\partial z} = \frac{1}{\pi} \sum_h^{0,\infty} \varrho_h^2 \sqrt{\lambda_h} (\alpha_0^2 + \beta_0^2 \lambda_h) \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_h} z) \cdot \\
& \cdot \Bigg\{ \frac{1}{2} K_0(\varrho\sqrt{\lambda_h}) \int_0^{\varrho} \xi I_0(\xi\sqrt{\lambda_h}) \left[\int_0^{2\pi} \gamma_0(Q, \xi)\, dt\right] d\xi + \frac{1}{2} I_0(\varrho\sqrt{\lambda_h}) \int_{\varrho}^{\infty} \xi K_0(\xi\sqrt{\lambda_h}) \left[\int_0^{3\pi} \gamma_0(Q, \xi)\, dt\right] d\xi + \\
& + \sum_l^{1,\infty} \Bigg(K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) \int_0^{\varrho} \xi I_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) \left[\int_0^{2\pi} \gamma_0(Q, \xi) \cos(l \cdot (t - \omega))\, dt\right] d\xi + \\
& + I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) \int_{\varrho}^{\infty} \xi K_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) \left[\int_0^{2\pi} \gamma_0(Q, \xi) \cos(l \cdot (t - \omega))\, dt\right] d\xi \Bigg) \Bigg\} + \\
& + \frac{1}{\pi} \sum_h^{0,\infty} \varrho_h \varrho_h' \sqrt{\lambda_h} (\alpha_0^2 + \beta_0^2 \lambda_h) \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_h} z) \cdot \Bigg\{ \frac{1}{2} K_0(\varrho\sqrt{\lambda_h}) \int_0^{\varrho} \xi I_0(\xi\sqrt{\lambda_h}) \left[\int_0^{2\pi} \gamma_a(Q, \xi)\, dt\right] d\xi + \\
& + \frac{1}{2} I_0(\varrho\sqrt{\lambda_h}) \int_{\varrho}^{\infty} \xi K_0(\xi\sqrt{\lambda_h}) \left[\int_0^{2\pi} \gamma_a(Q, \xi)\, dt\right] d\xi + \\
& + \sum_l^{1,\infty} \Bigg(K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) \int_0^{\varrho} \xi I_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) \left[\int_0^{2\pi} \gamma_a(Q, \xi) \cos(l \cdot (t - \omega))\, dt\right] d\xi + \\
& + I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) \int_{\varrho}^{\infty} \xi K_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) \left[\int_0^{2\pi} \gamma_a(Q, \xi) \cos(l \cdot (t - \omega))\, dt\right] d\xi \Bigg) \Bigg\} - \\
& - \frac{1}{\pi} \sum_h^{0,\infty} \varrho_h \cdot (\alpha_0^2 + \beta_0^2 \lambda_h) \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_h} z) \Bigg\{ \frac{1}{2} K_0(\varrho\sqrt{\lambda_h}) \int_0^{\varrho} \xi I_0(\xi\sqrt{\lambda_h}) \left[\int_0^{2\pi} \left(\int_0^a f(Q, \xi, s) w_h(s)\, ds\right) dt\right] d\xi + \\
& + \frac{1}{2} I_0(\varrho\sqrt{\lambda_h}) \int_{\varrho}^{\infty} \xi K_0(\xi\sqrt{\lambda_h}) \left[\int_0^{2\pi} \left(\int_0^a f(Q, \xi, s,) w_h(s)\, ds\right) dt\right] d\xi + \\
& + \sum^{,\infty} \Bigg(K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) \int_0^{\varrho} \xi I_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) \left[\int_0^{2\pi} \left(\int_0^a f(Q, \xi, s) w_h(s)\, ds\right) \cos(l \cdot (t - \omega))\, dt\right] d\xi + \\
& + I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) \int_{\varrho}^{\infty} \xi K_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) \left[\int_0^{2\pi} \left(\int_0^a f(Q, \xi, s) w_h(s)\, ds\right) \cos(l \cdot (t - \omega))\, dt\right] d\xi \Bigg) \Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Si cominci col notare che al crescere di h l'espressione

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^a f(Q,\xi,s)w_h(s)\,ds\right\}\cos\left(l\cdot(t-\omega)\right)dt,$$

è (sotto la *condizione* D' *relativa alla* f) tale da comportarsi come la

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_h}\,l^2}\,e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\xi},$$

perchè sotto la *condizione* D' *relativa alla* f il modulo di

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^a f(Q,\xi,s)w_h(s)\,ds\right\}\cos\left(l\cdot(t-\omega)\right)dt$$

è maggiorabile mediante una espressione $\{M/(\sqrt{\lambda_h}\,l^2)\}\,e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\xi}$ invece che con quella (11*) della Parte I in cui non appare $\sqrt{\lambda_h}$ a denominatore. Notando che al crescere di h l'espressione $\varrho_h\cdot(\alpha_0^2+\beta_0^2\lambda_h)$ a meno di infinitesimi si comporta come $\sqrt{\lambda_h}$, cioè come h, per $h\to\infty$, si vede, ripetendo per la serie (considerandola doppia) che fa da ultimo addendo del secondo membro della $(C^{(o)})$ le medesime maggiorazioni dei moduli dei singoli termini fatte al n. 8 della Parte I per le due serie del secondo membro della (B), che la serie (doppia) ultimo addendo del secondo membro della $(C^{(o)})$ è assolutamente convergente in $T+FT$. Per la presenza del fattore sen $(\sqrt{\lambda_h}z)$ si ha che la somma di detta serie è funzione continua che assume valore nullo per $z=0$.

Siccome, per $h\to\infty$, $\varrho_h^2\sqrt{\lambda_h}$, $\varrho_h\varrho_h'\sqrt{\lambda_h}$ si comportano come $1/h$, allora, tenendo presenti le (5) del n. precedente e ripetendo i rilievi di cui sopra, si trova che hanno identico comportamento a quello della serie sopra detta anche le due serie (considerandole doppie)

$$\frac{1}{\pi}\sum_h^{0,\infty}\varrho_h^2\sqrt{\lambda_h}\,\alpha_0^2\,\text{sen}\,(\sqrt{\lambda_h}z)\cdot\{\ldots\},\qquad \frac{1}{\pi}\sum_h^{0,\infty}\varrho_h\varrho_h'\sqrt{\lambda_h}\,\alpha_0^2\,\text{sen}\,(\sqrt{\lambda_h}z)\cdot\{\ldots\},$$

parti, rispettivamente, del primo e del secondo addendo del secondo membro della $(C^{(o)})$.

Resta da analizzare il comportamento delle due restanti serie

$$\frac{1}{\pi}\sum_h^{0,\infty}\varrho_h^2\sqrt{\lambda_h}\,\beta_0^2\lambda_h\,\text{sen}\,(\sqrt{\lambda_h}z)\cdot\{\ldots\},\qquad \frac{1}{\pi}\sum_h^{0,\infty}\varrho_h\varrho_h'\sqrt{\lambda_h}\,\beta_0^2\lambda_h\,\text{sen}\,(\sqrt{\lambda_h}z)\cdot\{\ldots\}.$$

Rammentando che $\sqrt{\lambda_h}=(h\pi/a)+\varepsilon_h$, con ε_h infinitesimo (>0) monotono dell'ordine $1/h$, e osservando che la differenza

$$\text{sen}\,(\sqrt{\lambda_h}z)-\text{sen}\,\frac{h\pi z}{a}=2\cos\frac{\{\sqrt{\lambda_h}+(h\pi/a)\}z}{2}\,\text{sen}\,\frac{\varepsilon_h z}{2}$$

risulta, per $h \to \infty$, infinitesima come $1/h$, allora se nelle due ultime serie si sostituisce al posto di sen $(\sqrt{\lambda_h} z)$ la differenza

$$\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_h} z) - \operatorname{sen} \frac{h\pi z}{a},$$

le due serie (considerate doppie) che si ottengono sono tali da avere il comportamento di quelle considerate sopra con somma nulla quando $z = 0$ per la presenza del fattore sen $(\varepsilon_h z/2)$, come si vede osservando che $\varrho_h^2 \lambda_h$, $\varrho_h \varrho_h' \lambda_h$ costituiscono classi numeriche limitate, al variare di h, e ripetendo il procedimento seguito nel caso del secondo membro della (B).

Dopo ciò si può concludere che lo studio del comportamento del secondo membro della ($C^{(0)}$), per $z \to 0$, è ricondotto a quello del comportamento, sempre per $z \to 0$, della espressione seguente

$$\frac{\beta_0^2}{\pi} \sum_h^{0,\infty} \varrho_h^2 \lambda_h \sqrt{\lambda_h} \operatorname{sen} \frac{h\pi z}{a} \cdot \left\{ \frac{1}{2} K_0(\varrho\sqrt{\lambda_h}) \int_0^{\varrho} \xi I_0(\xi\sqrt{\lambda_h}) \left[\int_0^{2\pi} \gamma_0(Q,\xi)\, dt \right] d\xi + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} I_0(\varrho\sqrt{\lambda_h}) \int_{\varrho}^{\infty} \xi K_0(\xi\sqrt{\lambda_h}) \left[\int_0^{2\pi} \gamma_0(Q,\xi)\, dt \right] d\xi +$$

$$+ \sum_l^{1,\infty} \left(K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) \int_0^{\varrho} \xi I_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) \left[\int_0^{2\pi} \gamma_0(Q,\xi) \cos(l\cdot(t-\omega))\, dt \right] d\xi + \right.$$

$$\left. \left. + I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) \int_{\varrho}^{\infty} \xi K_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) \left[\int_0^{2\pi} \gamma_0(Q,\xi) \cos(l\cdot(t-\omega))\, dt \right] d\xi \right) \right\} +$$

$$+ \frac{\beta_0^2}{\pi} \sum_h^{0,\infty} \varrho_h \varrho_h' \lambda_h \sqrt{\lambda_h} \operatorname{sen} \frac{h\pi z}{a} \cdot \left\{ \frac{1}{2} K_0(\varrho\sqrt{\lambda_h}) \int_0^{\varrho} \xi I_0(\xi\sqrt{\lambda_h}) \left[\int_0^{2\pi} \gamma_a(Q,\xi)\, dt \right] d\xi + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} I_0(\varrho\sqrt{\lambda_h}) \int_{\varrho}^{\infty} \xi K_0(\xi\sqrt{\lambda_h}) \left[\int_0^{2\pi} \gamma_a(Q,\xi)\, dt \right] d\xi +$$

$$+ \sum_l^{1,\infty} \left(K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) \int_0^{\varrho} \xi I_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) \left[\int_0^{2\pi} \gamma_a(Q,\xi) \cos(l\cdot(t-\omega))\, dt \right] d\xi + \right.$$

$$\left. \left. + I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) \int_{\varrho}^{\infty} \xi K_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) \left[\int_0^{2\pi} \gamma_a(Q,\xi) \cos(l\cdot(t-\omega))\, dt \right] d\xi \right) \right\}.$$

Si osservi intanto che nella serie secondo addendo del secondo membro il coefficiente $(\beta_0^2/\pi)\varrho_h\varrho_h'\lambda_h\sqrt{\lambda_h}$, con le ricordate espressioni, si può scrivere nella forma seguente

$$-\frac{\beta_0^2}{\pi}\,\frac{2}{\beta_0\beta}\,\frac{\pi}{a^2}\,(-1)^h h + (\text{infinitesimi monotoni d'ordine} \geqslant 1/h) =$$

$$= -\frac{2}{a^2}\,\frac{\beta_0}{\beta}\,(-1)^h h + (\text{infinitesimi monotoni d'ordine} \geqslant 1/h)\,,$$

e allora sostituendo a quel coefficiente (nella detta serie) la parte di questo secondo membro espressa da « infinitesimi monotoni d'ordine $\geqslant 1/h$ » si ha che la serie (considerata doppia) così ottenuta, per le solite argomentazioni, risulta assolutamente convergente in $T+FT$ e uniformemente convergente in ogni dominio limitato di $T+FT$ e, per la presenza del fattore sen $(h\pi z/a)$, ha la somma nulla quando $z=0$. La sostituzione, invece, di $-\{2\beta_0/(a^2\beta)\}(-1)^h h$ fa sì che il coefficiente che moltiplica la graffa $\{\ldots\}$ si può scrivere nella forma $-\{2\beta_0/(a^2\beta)\}\,h\,\text{sen}\,\dfrac{h\pi(z+a)}{a}$, cosicchè, essendo $h\cdot\{\ldots\}$, al crescere di h, una successione a variazione totale finita e inoltre infinitesima, come si può riconoscere con le solite argomentazioni, ed essendo la serie

$$\sum_h^{0,\infty} \text{sen}\,\frac{h\pi(z+a)}{a}\,,$$

tale da mantenere finite la minima e la massima somma quando $0 \leqslant z \leqslant a-\delta$, allora, per il solito criterio I del PICONE, la serie (considerata semplice, sommandola per linee) converge uniformemente per $0 \leqslant z \leqslant a-\delta$, e, per la presenza del fattore sen $\dfrac{h\pi(z+a)}{a}$, ha la somma avente limite nullo per $z \to 0$. Riassumendo:

La somma della serie secondo addendo del secondo membro della ultima espressione scritta ha limite nullo per $z \to 0$.

Il coefficiente $(\beta_0^2/\pi)\varrho_h^2\lambda_h\sqrt{\lambda_h}$ relativo alla serie primo addendo del secondo membro della stessa estesa espressione si può scrivere, a sua volta, nella forma seguente

$$\frac{2}{a^2}\,h + (\text{infinitesimi monotoni d'ordine} \geqslant 1/h)\,,$$

e la sostituzione della parte « infinitesimi monotoni d'ordine $\geqslant 1/h$ » nella serie porta naturalmente alla considerazione di una serie che ha il solito comportamento con la somma funzione continua in $T+FT$ che si annulla per $z=0$.

Resta da esaminare il comportamento che si ha per la serie quando al coefficiente $(\beta_0^2/\pi)\varrho_h^2\lambda_h\sqrt{\lambda_h}$ si sostituisce $(2/a^2)h$. Si osservi nel contempo, rammentando che $\sqrt{\lambda_h} = (h\pi/a) + \varepsilon_h$ con ε_h infinitesimo monotono come $1/h$, che per il teorema della media, con $0 < \xi \leqslant \varrho$,

$$\xi I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})[K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) - K_l(\varrho h\pi/a)] = \varrho\xi K_l'(\varrho(h\pi/a + \theta'\varepsilon_h))I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\varepsilon_h,$$

ove θ' è interno all'intervallo $(0, 1)$; il secondo membro di questa, tenendo conto delle (7) del n. precedente, si può in modulo maggiorare mediante l'espressione del tipo (tenendo conto della presenza del fattore ε_h che per $h \to \infty$ si comporta come $1/h$, cioè come $1/\sqrt{\lambda_h}$):

$$\overline{M}\,\frac{1}{\lambda_h}\,e^{\sqrt{\lambda_h}(\xi-\varrho)} \qquad \text{sia per } l = 0 \qquad \text{che per } l \geqslant 1\,.$$

Se nella detta serie, oltre a sostituire $(\beta_0^2/\pi)\varrho_h^2\lambda_h\sqrt{\lambda_h}$ con $(2/a^2)h$, si pone $K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) - K_l(\varrho h\pi/a)$ al posto di $K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})$, la serie (doppia) addendo che si ottiene, tenendo presenti le (5) e (6) del n. precedente, risulta assolutamente convergente in $T + FT$ e uniformemente convergente in ogni dominio limitato di $T + FT$ e la somma, come funzione continua in $T + FT$, assume il valore zero per $z = 0$. Tutto ciò si giustifica al solito col raffronto con la serie doppia armonica generalizzata e per la presenta del fattore sen $(h\pi z/a)$.

Si tenga presente che $I_l'(x)$ cresce al crescere di x (e $I_l'(x) > 0$). Rammentando che

$$I_l(x) = \frac{(x/2)^l}{\Gamma(l + 1/2)\Gamma(1/2)}\int_0^\pi e^{x\cos\theta}\,\mathrm{sen}^{2l}\,\theta\,\mathrm{d}\theta$$

e che

$$K_l(x) = \left[\int_x^\infty \frac{\mathrm{d}\mu}{\mu\cdot[I_l(\mu)]^2}\right] I_l(x)\,,$$

nonchè la Osservazione I del n. 7 della Parte I, si ha se $\varrho \leqslant \xi$, tenendo presente che $\sqrt{\lambda_h}$ è crescente e divergente positivamente quando $h \to \infty$,

$$\frac{K_l(\xi\sqrt{\lambda_h})}{K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})} = \frac{I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})}{I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})}\left\{\int_{\xi\sqrt{\lambda_h}}^\infty \frac{\mathrm{d}\mu}{\mu\cdot[I_l(\mu)]^2}\Big/\int_{\varrho\sqrt{\lambda_h}}^\infty \frac{\mathrm{d}\mu}{\mu\cdot[I_l(\mu)]^2}\right\},$$

e in relazione al secondo rapporto che qui appare a secondo membro si noti che il suo limite è 1 per $\xi \to \varrho$; pensando crescente il parametro $\sqrt{\lambda_h}$ il rapporto stesso appare come il rapporto di due infinitesimi, sicchè, applicando il teorema di l'HOSPITAL col derivare numeratore e denominatore rispetto al parametro $\sqrt{\lambda_h}$, si ha che per $h \to \infty$ tutto il secondo membro della ultima espressione si comporta come

$$\frac{I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})}{I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})}\left[\frac{I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})}{I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})}\right]^2 = \frac{I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})}{I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})}.$$

Potremo allora scegliere una costante positiva abbastanza grande M_1 affinchè l'espressione $K_l(\xi\sqrt{\lambda_h})/K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})$ sia maggiorabile, per tutti gli h, mediante l'espressione $M_1 I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})/I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})$ e questa (per l'Osservazione I nel n. 7 della Parte I) è maggiorabile mediante l'altra

$$M_1 \cdot (\varrho/\xi)^l M e^{\sqrt{\lambda_h}(\varrho-\xi)} < M M_1 e^{\sqrt{\lambda_h}(\varrho-\xi)} = M_2 e^{\sqrt{\lambda_h}(\varrho-\xi)} .$$

Rammentando che il Wronskiano delle $I_l(x)$, $K_l(x)$ è $I_l(x)K_l'(x) - K_l(x)I_l'(x) = -1/x$, si ha

$$K_l(x)I_l'(x) = \frac{1}{x} + I_l(x)K_l'(x) .$$

Premesso ciò, se $\varrho \leqslant \xi$, si ha pel teorema della media, con $0 < \theta'' < 1$,

$$\begin{aligned}(8)\qquad & \xi K_l(\xi\sqrt{\lambda_h})[I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) - I_l(\varrho h\pi/a)] = \varrho\xi I_l'(\varrho(h\pi/a + \theta''\varepsilon_h))K_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\varepsilon_h < \\ & < \varepsilon_h\varrho\xi I_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})K_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) = \varepsilon_h\varrho\xi \cdot \{ K_l(\xi\sqrt{\lambda_h})/K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) \}\ K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})I_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h}) < \\ & < \varepsilon_h\varrho\xi M_2 e^{\sqrt{\lambda_h}(\varrho-\xi)} \{ 1/(\varrho\sqrt{\lambda_h}) + I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})K_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h}) \} = \\ & = (1/\sqrt{\lambda_h})\varepsilon_h\xi M_2 e^{\sqrt{\lambda_h}(\varrho-\xi)} + M_2\varepsilon_h\varrho\xi e^{\sqrt{\lambda_h}(\varrho-\xi)} I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})K_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h}) < \\ & < (1/\sqrt{\lambda_h})\varepsilon_h M_2\xi e^{\sqrt{\lambda_h}(\varrho-\xi)} + M_2\xi\varepsilon_h(\overline{M}/\sqrt{\lambda_h})e^{\sqrt{\lambda_h}(\varrho-\xi)} ,\end{aligned}$$

per la (7) del n. precedente (facendo ivi $\varrho = \xi$). L'ultima espressione maggiorante si comporta ovviamente come $(1/h^2)\xi e^{\sqrt{\lambda_h}(\varrho-\xi)}$ essendo $\xi \geqslant \varrho$. Se allora nella solita precedente serie, oltre a sostituire $(\beta_0^2/\pi)\varrho_h^2\lambda_h\sqrt{\lambda_h}$ con $(2/a^2)h$ si pone $I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) - I_l(\varrho h\pi/a)$ al posto di $I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})$, si vede subito [servendosi della maggiorazione (8) e con le già note maggiorazioni degli integrali

$$\int_0^{2\pi} \gamma_0(Q, \xi)\cos(l\cdot(t-\omega))\,dt , \qquad \int_0^{2\pi} \gamma_a(Q, \xi)\cos(l\cdot(t-\omega))\,dt,$$

che si comportano al più come $(1/l^2)e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\xi}$] che la serie (doppia) addendo che così si ottiene ha, quando $l \geqslant 1$, i termini maggiorabili in modulo mediante il prodotto di una costante positiva, opportunamente grande, per le rispettive espressioni integrali seguenti:

$$\frac{2}{a^2} h \frac{1}{h^2} \frac{1}{l^2} \int_{\varrho}^{\infty} \xi e^{\sqrt{\lambda_h}(\varrho-\xi)+(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\xi} \, d\xi = \frac{2}{a^2 h l^2} e^{\varrho\sqrt{\lambda_h}} \int_{\varrho}^{\infty} \xi e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta-\sqrt{\lambda_h})\xi} \, d\xi =$$

$$= \frac{2e^{(\sqrt{\lambda_0}-\beta)\varrho}}{a^2} \left[\varrho + \frac{1}{\sqrt{\lambda_h}-(\sqrt{\lambda_0}-\beta)}\right] \frac{1}{h\cdot[\sqrt{\lambda_h}-(\sqrt{\lambda_0}-\beta)]l^2} .$$

Analogo rlsultato si ha per $l = 0$.

Col solito raffronto con la serie $\sum\sum 1/(h^2 l^2)$ si ha che la serie doppia è assolutamente convergente in $T + FT$ e uniformemente convergente in ogni dominio limitato di $T + FT$, sicchè la sua somma è funzione continua in $T + FT$ e assume il valore zero per $z = 0$ [per la presenza di sen $(h\pi z/a)$].

Tenendo allora presente che si può scrivere

$$K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})I_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) = [K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) - K_l(\varrho h\pi/a)]I_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) + K_l(\varrho h\pi/a)I_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) ,$$

$$I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})K_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) = [I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) - I_l(\varrho h\pi/a)]K_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) + I_l(\varrho h\pi/a)K_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) ,$$

possiamo concludere che lo studio del comportamento della espressione (combinazione lineare in esame) $(C^{(0)})$ quando (H, ϱ, z) tende ad un punto della faccia $z = 0$ di FT, cosicchè allora $z \to 0$, si riduce allo studio del comportamento della espressione seguente [nel mentre il punto (H, ϱ, z) tende ad un punto $(H_{(0)}, \varrho_{(0)}, 0)$]:

$$(\overline{C}^{(0)}) \quad \frac{2}{a^2} \sum_h^{1,\infty} h \operatorname{sen} \frac{h\pi z}{a} \cdot \left\{ \frac{1}{2} K_0(\varrho h\pi/a) \int_0^{\varrho} \xi I_0(\xi\sqrt{\lambda_h}) \left[\int_0^{2\pi} \gamma_0(Q, \xi) dt\right] d\xi + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} I_0(\varrho h\pi/a) \int_{\varrho}^{\infty} \xi K_0(\xi\sqrt{\lambda_h}) \left[\int_0^{2\pi} \gamma_0(Q, \xi)\, dt\right] d\xi +$$

$$+ \sum_l^{1,\infty} \left(K_l(\varrho h\pi/a) \int_0^{\varrho} \xi I_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) \left[\int_0^{2\pi} \gamma_0(Q, \xi) \cos (l\cdot(t-\omega))\, dt\right] d\xi + \right.$$

$$\left.\left. + I_l(\varrho h\pi/a) \int_{\varrho}^{\infty} \xi K_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) \left[\int_0^{2\pi} \gamma_0(Q, \xi) \cos (l\cdot(t-\omega))\, dt\right] d\xi \right)\right\} .$$

Questa serie (sommata per linee nel modo indicato dalla forma dello sviluppo stesso) è certo convergente in $T - FT$ ed uniformemente convergente in ogni dominio limitato interno a $T - FT$, poichè tale era il secondo membro di $(C^{(0)})$ e tali erano tutte le serie che via via siamo venuti scartando e che rappresentavano, per così dire, le espressioni che con la loro somma davano la differenza tra $(C^{(0)})$ e l'ultima serie su scritta.

A questo punto conviene premettere la seguente

Osservazione. Nel lavoro di D. Caligo citato nella annotazione (1) della Parte I il Caligo perviene allo sviluppo (19), di tale lavoro, per la soluzione u del problema di Dirichlet. *Questa soluzione u,* sotto le ipotesi (16), ivi poste, che non sono altro che le nostre (11) della Parte I, con il coefficiente $\sqrt{\lambda_0}$ sostituito da quello π/a pertinente al problema di Dirichlet, *soddisfa il teorema di esistenza e di unicità per il problema stesso.*

D'altra parte imponendo alle γ_0, γ_a, f le ulteriori condizioni poste nel corso di questa nostra ricerca, ove in esse si sostituisca dappertutto a $\sqrt{\lambda_0}$ il numero π/a, si perviene alla giustificazione della convergenza puntuale del detto sviluppo (19), almeno nel caso di $r = 2$, cioè nel caso particolare del problema di Dirichlet per lo strato T: si arriva evidentemente a questo risultato constatando prima di tutto che tale (19) non è che la trascrizione, nel caso di $r = 2$, della nostra (B), della Parte I, quando $\sqrt{\lambda_h} = h\pi/a$, e in un secondo tempo si dimostra la convergenza puntuale della (19) nei domini limitati interni a $T - FT$ (sommando la serie doppia per linee nel modo solito qui indicato) nella stessa maniera con cui qui è stata dimostrata la convergenza uniforme entro T delle $\dfrac{\partial u(H, \varrho, z)}{\partial \varrho}$, ecc., sfruttando il solito criterio I del Picone.

La detta (19), nel caso di $r = 2$, dunque, in armonia con le analoghe espressioni da noi incontrate e studiate qui quali le (B_ϱ) e (B_z) relative agli sviluppi di $\dfrac{\partial u}{\partial \varrho}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}$, non è sommabile assolutamente in $T + FT$ nel senso delle serie doppie, come avviene invece per la nostra (B), ma è invece solo uniformemente convergente nel senso delle serie semplici quando $0 < \delta \leqslant z \leqslant a - \delta$ (pensando di sommarla per linee nel modo noto).

Questa diversità nel comportamento della detta (19) e della (B) dipende dal fatto che nella prima appare a numeratore il fattore h (analoga diversità si riscontra nei problemi corrispondenti per la striscia piana).

Naturalmente, valendo il teorema di esistenza e di unicità per il problema di Dirichlet, l'unica soluzione è espressa dallo sviluppo convergente puntualmente in $T - FT$ (verso una somma continua in $T - FT$). Dovendo poi la somma di tale serie soddisfare le equazioni al contorno pertinenti al problema di Dirichlet per lo strato T, si ha che questa somma $u(H, \varrho, z)$ ha per limite $\gamma_0(H_{(0)}, \varrho_{(0)})$ quando il punto (H, ϱ, z) tende ad un punto $(H_{(0)}, \varrho_{(0)}, 0)$ mentre ha per limite il numero $\gamma_a(H_{(a)}, \varrho_{(a)})$ quando il punto (H, ϱ, z) tende ad un punto $(H_{(a)}, \varrho_{(a)}, a)$. In tal senso la somma $u(H, \varrho, z)$ della detta (19) rappresenta una funzione continua in $T + FT$.

La trascrizione della (19) *per* $r = 2$ *e la trascrizione della nostra* (B), *facendo in questa* $\sqrt{\lambda_h} = h\pi/a$, *conducono concordemente alla seguente espressione per l'unica soluzione del problema di* DIRICHLET *per lo strato* T:

$$\frac{2}{\pi a}\sum_h^{1,\infty}\operatorname{sen}\frac{h\pi z}{a}\cdot\left\{\frac{1}{2}K_0\left(\varrho\frac{h\pi}{a}\right)\cdot\right.$$

$$\cdot\int_0^\varrho \xi I_0\left(\xi\frac{h\pi}{a}\right)\left[\int_0^{2\pi}\left[\frac{h\pi}{a}\{\gamma_0(Q,\xi)+(-1)^{h+1}\gamma_a(Q,\xi)\}+\int_0^a - f(Q,\xi,s)\operatorname{sen}\frac{h\pi s}{a}\cdot \mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\xi +$$

$$+\frac{1}{2}I_0\left(\varrho\frac{h\pi}{a}\right)\int_\varrho^\infty \xi K_0\left(\xi\frac{h\pi}{a}\right)\left[\int_0^{2\pi}\left[\frac{h\pi}{a}\{\gamma_0(Q,\xi)+(-1)^{h+1}\gamma_a(Q,\xi)\}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_0^a - f(Q,\xi,s)\operatorname{sen}\frac{h\pi s}{a}\cdot \mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\xi +$$

$$+\sum_l^{1,\infty}K_l\left(\varrho\frac{h\pi}{a}\right)\cdot\int_0^\varrho \xi I_l\left(\xi\frac{h\pi}{a}\right)\left[\int_0^{2\pi}\left[\frac{h\pi}{a}\{\gamma_0(Q,\xi)+(-1)^{h+1}\gamma_a(Q,\xi)\}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_0^a - f(Q,\xi,s)\operatorname{sen}\frac{h\pi s}{a}\cdot \mathrm{d}s\right]\cos(l\cdot(t-\omega))\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\xi +$$

$$+\sum_l^{1,\infty}I_l\left(\varrho\frac{h\pi}{a}\right)\cdot\int_\varrho^\infty \xi K_l\left(\xi\frac{h\pi}{a}\right)\left[\int_0^{2\pi}\left(\frac{h\pi s}{a}\{\gamma_0(Q,\xi)+(-1)^{h+1}\gamma_a(Q,\xi)\}+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\int_0^a - f(Q,\xi,s)\operatorname{sen}\frac{h\pi z}{a}\cdot \mathrm{d}s\right)\cos(l\cdot(t-\omega))\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\xi\right\}.$$

Nel caso particolare di $\gamma_a = f = 0$, questa soluzione diventa:

$$(\overline{\mathrm{C}}'')\qquad \frac{2}{a^2}\sum_h^{1,\infty}h\operatorname{sen}\frac{h\pi z}{a}\cdot\left\{\frac{1}{2}K_0\left(\varrho\frac{h\pi}{a}\right)\cdot\right.$$

$$\cdot\int_0^\varrho \xi I_0\left(\xi\frac{h\pi}{a}\right)\left[\int_0^{2\pi}\gamma_0(Q,\xi)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2}I_0\left(\varrho\frac{h\pi}{a}\right)\int_\varrho^\infty \xi K_0\left(\xi\frac{h\pi}{a}\right)\left[\int_0^{2\pi}\gamma_0(Q,\xi)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\xi +$$

$$+\sum_l^{1,\infty}\left(K_l\left(\varrho\frac{h\pi}{a}\right)\int_0^\varrho \xi I_l\left(\xi\frac{h\pi}{a}\right)\left[\int_0^{2\pi}\gamma_0(Q,\xi)\cos(l\cdot(t-\omega))\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\xi +\right.$$

$$\left.\left.+I_l\left(\varrho\frac{h\pi}{a}\right)\cdot\int_\varrho^\infty \xi K_l\left(\xi\frac{h\pi}{a}\right)\left[\int_0^{2\pi}\gamma_0(Q,\xi)\cos(l\cdot(t-\omega))\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\xi\right)\right\}.$$

Riguardo a questa serie $(\overline{\mathrm{C}}'')$ sappiamo, per quanto si è detto, che è convergente, sommandola per linee, in $T - FT$ e considerandone tutti i termini da $l = 1$ a ∞, quando per γ_0 fossero valide tutte le condizioni via via imposte nel corso di questo lavoro [fra le quali è la (16) del lavoro del CALIGO], previa sostituzione in queste (al posto del nostro minimo autovalore $\sqrt{\lambda_0}$) del numero π/a minimo autovalore pertinente al problema di DIRICHLET.

Siccome non è detto che «a priori» le condizioni così modificate mediante la detta sostituzione seguitino a valere per γ_0 solo come conseguenza della validità imposta a γ_0 delle originarie condizioni corrispondenti al coefficiente $\sqrt{\lambda_0}$, si arguisce da ciò che la $(\overline{\mathrm{C}}'')$ presa in blocco, da $h = 1$ ad ∞, può anche essere eventualmente non convergente (sommandola per linee) per la scelta fatta della γ_0, in quanto questa funzione γ_0 può eventualmente non verificare le condizioni che alla γ_0 vanno imposte in relazione al problema di DIRICHLET per lo strato; può darsi ad esempio che alcuni dei termini della serie siano integrali impropri non convergenti.

Ma se h' è un numero intero positivo maggiore di $a\sqrt{\lambda_0}/\pi$ e del minimo intero positivo $\bar{h}$ per cui le condizioni relative alla γ_0, quali la (11) della Parte I e tutte le altre successivamente imposte e valide per il numero $\sqrt{\lambda_0}$, seguitano a valere anche quando in esse venga sostituito a $\sqrt{\lambda_0}$ l'altro numero $\bar{h}\pi/a$, allora se della $(\overline{\mathrm{C}}'')$ si considera la sola parte di serie $\frac{2}{a^2}\sum_h^{h',\infty}\ldots$, i coefficienti integrali di questa sono convergenti e la serie così delimitata resta convergente e col solito comportamento che tutta la $(\overline{\mathrm{C}}'')$ aveva quando le solite condizioni imposte a γ_0 erano quelle pertinenti al coefficiente π/a. Infatti poichè nei procedimenti dimostrativi onde stabilire la convergenza ecc. ... per tutta la $(\overline{\mathrm{C}}'')$ erano essenziali le condizioni col coefficiente autovalore più basso π/a, ne viene, ripetendo per la sola parte $\frac{2}{a^2}\sum_h^{h',\infty}\ldots$ tutti i medesimi procedimenti dimostrativi, che si può pervenire alla giustificazione della convergenza della $\frac{2}{a^2}\sum_h^{h',\infty}\ldots$, ecc., se la γ_0 è tale da soddisfare le condizioni solite ove però al posto del coefficiente autovalore minimo π/a si ponga il nuovo autovalore $h'\pi/a$, ch'è il minimo nuovo fra quelli che compaiono nella $\frac{2}{a^2}\sum_h^{h',\infty}\ldots$, il quale attualmente assume il ruolo di quello originario π/a della serie complessiva, nelle argomentazioni da ripetersi parola per parola.

Siccome le dette condizioni modificate (col coefficiente $h'\pi/a$) relative a γ_0 sono da questa verificate quando la γ_0 soddisfa le condizioni pertinenti al coefficiente $\sqrt{\lambda_0}$, se ne conclude che, sotto le condizioni imposte alla γ_0 nel corso della nostra ricerca, la serie $\frac{2}{a^2}\sum_h^{h',\infty}\ldots$ risulta convergente, ecc..

D'altra parte nella ($\overline{\mathrm{C}}^{(0)}$), convergente in $T - \mathrm{F}T$, la parte $\frac{2}{a^2} \sum_h^{1,h'-1} \ldots$ converge naturalmente in $T + \mathrm{F}T$ e la somma tende a zero per $z \to 0$. Siccome tanto nella ($\overline{\mathrm{C}}^{(0)}$) che nella ($\overline{\mathrm{C}}''$) le parti $\frac{2}{a^2} \sum_h^{h',\infty} \ldots$ sono, come si è rilevato, convergenti in $T - \mathrm{F}T$, la ricerca del limite della ($\overline{\mathrm{C}}^{(0)}$) per $z \to 0$ si riduce a quella del limite, per $z \to 0$, della seguente espressione (somma di due serie, da sommarsi per linee, entrambe convergenti almeno in $T - \mathrm{F}T$):

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{E}) \qquad & \frac{2}{a^2} \sum_h^{h',\infty} h \operatorname{sen} \frac{h\pi z}{a} \cdot \left\{ \frac{1}{2} K_0\left(\varrho \frac{h\pi}{a}\right) \int_0^{\varrho} \xi \cdot \left[I_0(\xi\sqrt{\lambda_h}) - I_0\left(\xi \frac{h\pi}{a}\right)\right] \left(\int_0^{2\pi} \gamma_0(Q, \xi)\, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}\xi + \right. \\
& + \frac{1}{2} I_0\left(\varrho \frac{h\pi}{a}\right) \int_{\varrho}^{\infty} \xi \cdot \left[K_0(\xi\sqrt{\lambda_h}) - K_0\left(\xi \frac{h\pi}{a}\right)\right] \left(\int_0^{2\pi} \gamma_0(Q, \xi)\, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}\xi + \\
& + \sum_l^{1,\infty} \left(K_l\left(\varrho \frac{h\pi}{a}\right) \int_0^{\varrho} \xi \cdot \left[I_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) - I_l\left(\xi \frac{h\pi}{a}\right)\right] \left[\int_0^{2\pi} \gamma_0(Q, \xi) \cos(l \cdot (t - \omega))\, \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}\xi + \right. \\
& \left.\left. + I_l\left(\varrho \frac{h\pi}{a}\right) \int_{\varrho}^{\infty} \xi \cdot \left[K_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) - K_l\left(\xi \frac{h\pi}{a}\right)\right] \left[\int_0^{2\pi} \gamma_0(Q, \xi) \cos(l \cdot (t - \omega))\, \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}\xi \right) \right\} + \\
& + \frac{2}{a^2} \sum_h^{h',\infty} h \operatorname{sen} \frac{h\pi z}{a} \cdot \left\{ \frac{1}{2} K_0\left(\varrho \frac{h\pi}{a}\right) \int_0^{\varrho} \xi I_0\left(\xi \frac{h\pi}{a}\right) \left[\int_0^{2\pi} \gamma_0(Q, \xi)\, \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}\xi + \right. \\
& + \frac{1}{2} I_0\left(\varrho \frac{h\pi}{a}\right) \int_{\varrho}^{\infty} \xi K_0\left(\xi \frac{h\pi}{a}\right) \left[\int_0^{2\pi} \gamma_0(Q, \xi)\, \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}\xi + \\
& + \sum_l^{1,\infty} \left(K_l\left(\varrho \frac{h\pi}{a}\right) \int_0^{\varrho} \xi I_l\left(\xi \frac{h\pi}{a}\right) \left[\int_0^{2\pi} \gamma_0(Q, \xi) \cos(l \cdot (t - \omega))\, \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}\xi + \right. \\
& \left.\left. + I_l\left(\varrho \frac{h\pi}{a}\right) \int_{\varrho}^{\infty} \xi K_l\left(\xi \frac{h\pi}{a}\right) \left[\int_0^{2\pi} \gamma_0(Q, \xi) \cos(l \cdot (t - \omega))\, \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}\xi \right) \right\}.
\end{aligned}
$$

Di queste due serie la seconda ha, come si è già detto, la somma convergente al limite $\gamma_0(H_{(0)}, \varrho_{(0)})$ quando il punto (H, ϱ, z) tende comunque al generico punto $(H_{(0)}, \varrho_{(0)}, 0)$ della faccia $z = 0$ (cosicchè $z \to 0$). Per quel che riguarda invece la prima serie conviene fare qualche ulteriore rilievo. Operando come si è fatto nel caso che precede l'ultima Osservazione, si ottiene nella prima serie (la quale, sommata per linee, è convergente almeno in $T - \mathrm{F}T$) che è:

I) Con $0 < \xi \leqslant \varrho$, operando come in (8) col teorema della media,

$$\xi K_l\left(\varrho \frac{h\pi}{a}\right)\left[I_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) - I_l\left(\xi \frac{h\pi}{a}\right)\right] = \xi^2 \varepsilon_h K_l\left(\varrho \frac{h\pi}{a}\right) I_l'\left(\xi \cdot \left(\frac{h\pi}{a} + \theta'' \varepsilon_h\right)\right) <$$

$$< \varrho^2 \varepsilon_h K_l\left(\varrho \frac{h\pi}{a}\right) I_l'(\xi\sqrt{\lambda_h}) = \varrho^2 \varepsilon_h \left\{ K_l\left(\varrho \frac{h\pi}{a}\right) / K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) \right\} K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) I_l'(\xi\sqrt{\lambda_h}) <$$

$$< M' \varrho^2 \varepsilon_h K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) I_l'(\xi\sqrt{\lambda_h})$$

e quest'ultima, operando come si è fatto partendo dal terzo membro della (8), si può maggiorare mediante l'espressione $M'' \varepsilon_h \frac{1}{\sqrt{\lambda_h}} e^{\sqrt{\lambda_h}(\xi - \varrho)}$.

II) Con $\varrho \leqslant \xi$,

$$\xi I_l\left(\varrho \frac{h\pi}{a}\right)\left[K_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) - K_l\left(\xi \frac{h\pi}{a}\right)\right] = \varepsilon_h \xi^2 I_l\left(\varrho \frac{h\pi}{a}\right) K_l'\left(\xi\left(\frac{h\pi}{a} + \theta' \varepsilon_h\right)\right),$$

nella quale, tenendo conto del 1°) della Osservazione II del n. precedente, la parte $\varepsilon_h \xi^2 I_l\left(\varrho \frac{h\pi}{a}\right) K_l'\left(\xi\left(\frac{h\pi}{a} + \theta' \varepsilon_h\right)\right)$ si può maggiorare in modulo mediante la espressione

$$M'' \varepsilon_h \frac{1}{\sqrt{\lambda_h}} \xi e^{\sqrt{\lambda_h}(\varrho - \xi)}.$$

Tenendo conto di I), si vede, procedendo come al n. 8 della Parte I, che la parte di (E) in cui appare $I_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) - I_l\left(\xi \frac{h\pi}{a}\right)$ costituisce una serie (doppia) assolutamente convergente in $T + \mathrm{F}T$ e uniformemente convergente in ogni dominio limitato di $T + \mathrm{F}T$, sicchè la somma della serie è continua in $T + \mathrm{F}T$ e si annulla per $z = 0$.

Così pure, tenendo conto della II) si vede che anche la parte di (E) in cui appare $K_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) - K_l(\xi h\pi/a)$ è una serie (doppia) assolutamente convergente in $T + \mathrm{F}T$ e uniformemente convergente in ogni dominio limitato di $T + \mathrm{F}T$, sicchè la somma della serie è continua in $T + \mathrm{F}T$ e si annulla per $z = 0$.

La prima equazione al contorno (2), *della Parte I, resta così giustificata.*

Con identico procedimento si giustifica l'altra equazione (2) *al contorno*, servendosi dell'altra forma seguente con cui si può esprimere la $w_h(z)$:

$$w_h(z) = \varrho_h' \cdot [\alpha \operatorname{sen} (\sqrt{\lambda_h}(a - z)) + \beta\sqrt{\lambda_h} \cos (\sqrt{\lambda_h}(a - z))].$$

Nel contempo, come conseguenza, resta giustificata la proposizione esprimente la continuità della $\dfrac{\partial u(H, \varrho, z)}{\partial z}$ *in tutto* $T + \mathrm{F}T$ (tenendo conto che è già tale la u).

Riassumendo i risultati di questa Parte II e della Parte I della nostra complessiva ricerca, si può enunciare il

Teorema II. *Della* $u(H, \varrho, z)$ *espressa dal secondo membro della* (B) *esistono le* $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, *continue in* $T - \mathrm{F}T$, *e la* $\frac{\partial u}{\partial z}$ *continua in* $T + \mathrm{F}T$; *le* u, $\frac{\partial u}{\partial z}$ *soddisfano le equazioni al contorno* (2) (*Parte I*) *relative al nostro problema e la* u *soddisfa la condizione sotto cui vale il teorema di unicità della eventuale soluzione del problema al contorno. Tutto ciò sussiste se le* γ_0, γ_a, f *soddisfano, oltre le condizioni indicate nel Teorema I* (*Parte I*), *anche l'altra condizione espressa dalla* « *condizione* D′ *relativa alla* f » *precisata al* n. *precedente.*

3. – La nostra ricerca risulterà completamente esaurita quando avremo dimostrato che la u espressa col secondo membro di (B) soddisfa, in T, effettivamente alla equazione di Poisson

$$\Delta_2 u(H, \varrho, z) = f(H, \varrho, z) \ ,$$

poichè allora si potrà affermare che la (B) dà l'unica soluzione per il proposto problema al contorno dello strato T e che la soluzione certo esiste sotto le generalissime condizioni qui imposte alle γ_0, γ_a, f.

Tale ultima ardua questione sarà l'oggetto della Parte III della nostra complessiva ricerca.