MARIO DOLCHER (*)

Geometria delle trasformazioni continue.

Un rafforzamento di enunciati precedenti. (**)

Questa mia Nota fa seguito ad una, sullo stesso argomento, apparsa tre anni or sono sugli «Annali» di Pisa [1].

Nella presente Nota preciso ulteriormente i teoremi II e III dimostrati nella Nota I, col provare che le ipotesi sotto le quali sono stati dati tali teoremi sono sufficienti ad assicurare non solo — come già dimostrato — che gli insiemi $\Phi^{-1}(Q)$ dei quali vi si tratta constano di almeno n punti, ma altresí che tali insiemi constano di almeno n componenti distinti.

Precisazioni in questo senso sono già state raggiunte da L. CESARI [2], sia sotto l'ipotesi di T. RADÓ [3], sia per il caso più generale in cui egli si pone [4].

Io qui, in aggiunta ai risultati già acquisiti:

1) provo che l'asserto della precisazione stessa sussiste anche nell'ipotesi del mio Teorema II, ipotesi che — come ho già rilevato — è meno restrittiva, e assai più significativa, di quella di T. RADÓ [5];

2) preciso nel senso di L. CESARI il mio teorema III, sempre per via diretta, cioè senza far uso di metodi della teoria delle funzioni di variabile

---

(*) Indirizzo: via Roma 30, Trieste (Italia).

(**) Ricevuto il 15 aprile 1951.

(1) M. DOLCHER, *Geometria delle trasformazioni continue.* I: *Sopra un teorema di Radó.* Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) **14**, 99-116 (1948). A questa Nota, che nella presente viene citata con «Nota I», si rinvia anche per la terminologia e per le notazioni usate.

(2) L. CESARI, *Su di un teorema di Radó sulle trasformazioni continue.* Atti Ist. Veneto Scienze e Lettere, Tomo C, 377-403 (1942).

(3) Con riferimento alle notazioni del Teorema II (Nota I), tale ipotesi consiste nel supporre che l'insieme $\Phi^{-1}(Q_0)$ consti di un unico punto [cfr. Nota I, [20]].

(4) Loc. cit. in [2], pag. 378.

(5) Vedasi, nella Nota I, il capoverso successivo all'enunciato del Teorema II (pag. 100).

complessa (quale la trasformazione $z = w^n$, invocata da T. RADÓ e da L. CESARI nelle loro dimostrazioni).

Per le dimostrazioni che qui dò, introduco una nozione che ritengo utile anche per la trattazione di problemi analoghi, sia di topologia piana, sia di topologia più generale: quella di *trasformazioni quasi-topologiche*, della quale mi servo qui limitatamente ad un caso che, di fronte alla generalità di cui la nozione stessa è suscettibile, può considerarsi banale.

1. - Le trasformazioni quasi-topologiche.

Sia I un insieme chiuso e limitato di un piano π e sia Φ una trasformazione continua, che ad ogni punto P di I fa corrispondere un ben determinato punto $Q = \Phi(P)$ di un piano π'. Sia $J = \Phi(I)$. Esista un sottoinsieme chiuso di I composto di un numero finito di componenti $K_1, K_2, \ldots, K_n$ per modo che

(1) su ognuno dei continui K_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ la Φ sia costante e, posto $Q_i = \Phi(K_i)$, i punti Q_i siano tutti distinti;

(2) la Φ operi biunivocamente fra $I - \sum_1^n{}_i K_i$ e $J - \sum_1^n{}_i Q_i$ (6).

In tali condizioni diremo che la Φ è una *trasformazione quasi-tolopogica* (7).

In base a proposizioni richiamate nella Nota I, possiamo dimostrare senza difficoltà il seguente

Teorema. *Date due curve semplici chiuse C^*, C'^* risp. sui piani π, π' e dette C, C' le regioni dei punti ad esse risp. interni, sia data una trasformazione topologica fra C^*, C'^* e siano prefissati inoltre, sul piano π, n continui $K_1, K_2, \ldots, K_n$ a due a due privi di punti a comune, non separanti il piano e tutti in C, e sul piano π', n punti distinti $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$ tutti in C'.*

Esiste una trasformazione quasi-topologica di $\bar{C}$ $(= C + C^*)$ in $\bar{C}'$ $(= C' + C'^*)$ la quale a ciascuno dei continui K_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ fa corrispondere l'unico punto P'_i, è biunivoca fra le altre coppie di punti $P \in \bar{C}$, $P' \in \bar{C}'$, e subordina fra i contorni delle due regioni la trasformazione assegnata.

---

(6) Si noti che dalle ipotesi fatte segue (come facilmente si prova) che nessuno dei continui K_i separa il piano. E ancora, che per ogni successione $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$ di punti convergente verso un punto Q_0 di J la corrispondente successione $\Phi^{-1}(Q_1)$, $\Phi^{-1}(Q_2), \ldots$, $\Phi^{-1}(Q_n), \ldots$ converge verso l'insieme chiuso $\Phi^{-1}(Q_0)$, nel senso preciso che: ogni sottosuccessione convergente della stessa ha come punto-limite un punto di $\Phi^{-1}(Q_0)$.

(7) Con ciò non intendo dare una *definizione* di «trasformazione quasi-topologica»; resta cioè aperta la possibilità di estendere tale nozione, denominando «quasi-topologiche» trasformazioni di tipo assai meno particolare, anche non univoche.

Dimostrazione. Se è $n > 1$, si decomponga $\overline{C}$ in modo regolare ([8]) in n regioni, a ciascuna delle quali sia interno uno dei continui K_i; si decomponga $\overline{C}'$ analogamente, tenendo opportuno conto della trasformazione prefissata fra i contorni C^* e C'^*. Con siffatte decomposizioni ci si riduce alla trattazione del caso in cui sia $n = 1$.

Con riferimento a tale caso, si costruisca in C una successione di curve semplici chiuse $C_1^*, C_2^*, \ldots, C_n^*, \ldots$ convergenti verso K nel senso della prop. (4.9) della Nota I; ed analogamente si operi su π', costruendo una successione di curve semplici chiuse $C_1'^*, C_2'^*, \ldots, C_n'^*, \ldots$ in C' e convergenti verso P'. Basta allora trasformare topologicamente C^* in C'^* (tenendo conto dell'eventuale trasformazione prefissata al contorno), e C_n^* in $C_n'^*$, $(n = 1, 2, \ldots)$, e trasformare topologicamente le regioni comprese fra due curve successive C_n^* e C_{n+1}^*, $(n = 0, 1, 2, \ldots;\ C_0^* = C^*)$ nelle analoghe del piano π', per avere costruito la trasformazione quasi-topologica desiderata.

2. - Rafforzamento del teorema II.

Sia Φ una trasformazione continua di una regione semplice $\overline{C}$ (limitata da una curva semplice chiusa C^*) del piano π in un insieme del piano π'. Esista sul piano π' un punto Q_0 non di $\Phi(C^*)$ che goda della seguente proprietà: fra i componenti dell'insieme chiuso $G = \Phi^{-1}(Q_0)$ ve ne sia uno, G_0, tale che per ogni curva semplice chiusa γ^* in $\overline{C}$ non contenente punti di G e circuitante G_0 si abbia

$$\mathcal{O}(Q_0;\ \Phi(\gamma^*)) \geqslant n > 0\,.$$

In tali ipotesi, detto g_0 quel campo componente dell'insieme complementare di $\Phi(C^*)$ il quale contiene Q_0, si ha:

Per ogni punto Q di g_0 distinto da Q_0, l'insieme $\Phi^{-1}(Q)$ consta di almeno n componenti. Anzi, fra i componenti dell'insieme stesso ve ne sono almeno n a due a due non separantisi nel piano, nè separati da C^* per mezzo di G.

Dimostrazione. Se l'insieme G separa il piano, detto G'' l'insieme dei punti separati da C^* per mezzo di G, e posto $G' = G + G''$, sostituiamo alla trasformazione Φ una nuova, che diciamo Φ_0, definita da:

$$\Phi_0(P) = \Phi(P) \quad \text{per} \quad P \in \mathcal{C}(G'')\,, \qquad \text{e} \qquad \Phi_0(P) = Q_0 \quad \text{per} \quad P \in G''\,.$$

La Φ_0 è ancora una trasformazione continua; inoltre, essa soddisfa alle ipotesi del Teorema II, e l'insieme chiuso $\Phi_0^{-1}(Q_0) = G'$ non separa il piano

---

([8]) Vedi Nota I, pag. 108.

[prop. (4.7) della Nota I]. Provato che sia l'asserto relativamente alla Φ_0, esso risulterà a maggior ragione per la Φ. Per semplicità, ci converrà dunque supporre che già per la Φ si verifichi quanto avviene per la Φ_0; e cioè, che nessuno dei componenti di G separi il piano.

Detto Q un punto qualunque di g_0 distinto da Q_0, trattiamo dapprima il caso in cui nessuno dei componenti dell'insieme $\Phi^{-1}(Q)$ separi il piano. Diciamo $K_1, K_2, \ldots, K_\nu$ tali componenti, supponendoli in numero finito (chè altrimenti l'asserto è raggiunto). Consideriamo, sopra un nuovo piano π'', un cerchio $\overline{D}$, di centro T_0, e diciamo $T_1, T_2, \ldots, T_\nu$, ν punti distinti entro D, distinti anche da T_0. Esiste allora (Teorema prec.) una trasformazione quasi-topologica Ψ di $\overline{C}$ $(\subset \pi)$ in $\overline{D}$ $(\subset \pi'')$, tale che $\Psi(G_0) = T_0$ e $\Psi(K_i) = T_i$, $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$. La trasformazione $\Phi \cdot \Psi^{-1}$, che porta $\overline{D}$ $(\subset \pi'')$ in $\Phi(\overline{C})$ $(\subset \pi')$ è univoca e continua, trasforma D^* in $\Phi(C^*)$ e soddisfa alle condizioni di applicabilità del Teorema II. Ne segue che è $\nu \geqslant n$.

Resta da considerare il caso che fra i continui $K_1, K_2, \ldots, K_r$, componenti dell'insieme $\Phi^{-1}(Q)$, ve ne sono che separano il piano. Diciamo $K_1, K_2, \ldots, K_\nu$ quelli non separati da C^* per mezzo di nessun altro, e diciamo K_i' $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$ l'insieme costituito da K_i più tutti gli eventuali punti che esso separa da C^*. Proviamo anzitutto che non può avvenire che alcuno dei continui K_i separi G_0 da C^*. Ammesso, per assurdo, che il fatto si verificasse ad es. per K_1, detto ε un numero positivo arbitrario, si potrebbe costruire una curva semplice chiusa γ^* circuitante G_0, senza punti a comune con G ed avente ogni suo punto a distanza minore di ε da K_1: orbene, se il numero ε è scelto in modo che il diametro dell'imagine $\Phi(\gamma^*)$ sia minore della distanza $|Q_0 Q|$, si ha $\mathcal{O}(Q_0; \Phi(\gamma^*)) = 0$, contro l'ipotesi del teorema. Dal fatto ora provato segue in particolare che G_0 non è contenuto nell'insieme $\sum_1^\nu{}_i K_i'$. Alla Φ sostituiamo una nuova trasformazione Φ_1 definita da:

$$\Phi_1(P) = \Phi(P) \quad \text{per} \quad P \in \overline{C} - \sum_{1}^{\nu}{}_i K_i', \qquad \text{e} \qquad \Phi_1(P) = Q \quad \text{per} \quad P \in \sum_{1}^{\nu}{}_i K_i'.$$

La Φ_1, ancora continua, si presta all'applicazione del ragionamento svolto sopra, in quanto i continui componenti di $\Phi_1^{-1}(Q)$ non separano il piano. Ne segue che è $\nu \geqslant n$, da cui la prima parte della tesi.

Da quanto constatato per le trasformazioni Φ_0 e Φ_1 segue senz'altro anche la seconda parte della tesi.

3. – Estensione del rafforzamento al caso di L. Cesari.

Sia Φ una trasformazione continua di una regione semplice chiusa $\overline{C}$ (di contorno C^*) del piano π in un insieme del piano π', e sia Q_0 un punto di π' tale che si abbia $\mathcal{O}(Q_0;\ \Phi(C^*)) = n > 0$.

In tali ipotesi si ha: Esiste un intorno di Q_0, per ogni punto Q del quale l'insieme chiuso $\Phi^{-1}(Q)$ consta di almeno n componenti. Anzi, fra i componenti dell'insieme stesso ve ne sono almeno n a due a due non separantisi nel piano, nè separati da C^* per mezzo di $\Phi^{-1}(Q_0)$.

Dimostrazione. Ci riferiremo alla distinzione dei casi ed alle notazioni usate nella dimostrazione del Teorema III (Nota I, pp. 114-116).

È già stata notata [Nota I, ([22])] la validità dell'asserto in quello che costituisce il primo caso. Possiamo dunque riferirci senz'altro al secondo caso, quello cioè in cui il numero delle regioni $C_i^{(p)}$ tali che per le trasformate dei loro contorni fosse $\mathcal{O}(Q_0;\ \boldsymbol{c}_i^{(p)}) \neq 0$, non raggiunge n per nessuna decomposizione $(D^{(p)})$ della successione considerata.

Detta allora C_l una regione della p-esima decomposizione relativamente alla quale si abbia $\mathcal{O}(Q_0;\ \boldsymbol{c}_l) \geqslant 1$, e detto g_l il campo complementare di $\Phi(C_l^*)$ su π' il quale contiene Q_0, rileviamo che alla trasformazione Φ_l subordinata dalla Φ sopra $\overline{C}_l$ sono applicabili senz'altro le conclusioni del teorema precedente. Entro C_l l'insieme-modello di Q consta di almeno n_l componenti a due a due non separantisi nel piano, nè separati da C^* per mezzo di G.

E allora, detto g_0 l'intorno di Q_0 costituito dall'intersezione degli intorni g_l, $(l = 1, 2, \ldots, N)$ e tenendo presente che si ha $\sum_1^n{}_l\, n_l \geqslant n$, l'asserto è senz'altro raggiunto.

Dalla dimostrazione sopra data risulta altresì che *nelle stesse ipotesi* sussiste la più precisa affermazione:

Fra i componenti dell'insieme chiuso $\Phi^{-1}(Q_0)$, ve ne sono almeno n a due a due non separantisi nel piano, nè separati da C^* per mezzo di $\Phi^{-1}(Q_0)$, tali che ciascuno di essi ammette curve semplici chiuse δ^* che lo circuitano ed arbitrariamente ristrette intorno ad esso, per le quali si abbia $\mathcal{O}(Q;\ \Phi(\delta^*)) > 0$.

Si ritrova così il Teorema B di L. Cesari ([9]).

Giova notare infine che l'affermazione qui da ultimo contenuta circa l'esistenza di « curve arbitrariamente ristrette » non può sostituirsi con la più forte seguente: « per ogni curva sufficientemente ristretta intorno ad uno di tali componenti di $\Phi^{-1}(Q_0)$ si ha $\mathcal{O}(Q;\ \Phi(\delta^*)) > 0$ ». È possibile provare la cosa con un esempio.

([9]) Op. cit. in ([2]), cfr. pag. 391.