CARLO BIRINDELLI (*)

Nuova trattazione di problemi al contorno di uno strato, per l'equazione di POISSON in tre variabili. (**)

Parte III (e fine).

Nelle precedenti Parte I e Parte II, applicando il « Metodo della trasformazione di LAPLACE ad intervallo d'integrazione finito », dovuto al PICONE, viene studiato il problema al contorno di uno strato illimitato, consistente nella ricerca della funzione $u(x, y, z)$ soddisfacente l'equazione di POISSON $\Delta_2 u = f$ nello strato e verificante due date equazioni al contorno

$$\left[\alpha_0 u + \beta_0 \frac{\partial u}{\partial z}\right]_{z=0} = \gamma_0(x, y)\,, \qquad \left[\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial z}\right]_{z=a} = \gamma_a(x, y)\,,$$

con le costanti α_0, β_0, α, β tutte diverse da zero e tali che sia $\alpha_0^2 + \beta_0^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 1$ e, come è richiesto nei casi che interessano la Fisica matematica, $\alpha_0\beta_0 < 0$, $\alpha\beta > 0$, cosicchè risulti $\alpha\beta_0 - \alpha_0\beta \neq 0$, in modo da potersi così ridurre sempre al caso $\alpha\beta_0 - \alpha_0\beta > 0$.

Nella Parte I si perviene alla espressione formale per la $u(x, y, z)$ nonchè al teorema di unicità, e, sotto condizioni estremamente larghe per quel che ha riferimento con i dati al contorno $\gamma_0(x, y)$, $\gamma_a(x, y)$ e con la struttura della $f(x, y, z)$ nei punti dello strato, si dimostra la convergenza puntuale di tale espressione formale di $u(x, y, z)$ verso una funzione continua, in tutto lo strato, che soddisfa le condizioni del trovato teorema di unicità. Tale funzione continua, nello strato, esprimente così la $u(x, y, z)$ trovata, viene a costituire, in altre parole, l'unica eventuale possibile soluzione effettiva per il problema al contorno.

Nella Parte II viene dimostrato che la $u(x, y, z)$, precedentemente trovata, ammette le derivate $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ e che la u soddisfa pure, assieme alla sua $\frac{\partial u}{\partial z}$, le prescritte equazioni al contorno.

(*) Indirizzo: Via Parenzo 8, Roma (Italia).
(**) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

Di tali derivate $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ viene dimostrata la continuità almeno nei punti interni allo strato, mentre per la derivata $\frac{\partial u}{\partial z}$ viene dimostrata la continuità nello strato, contorno compreso, come viene richiesto dal problema al contorno in esame.

Lo studio del problema al contorno sarà del tutto ultimato quando verrà dimostrata *l'esistenza e la continuità, entro lo strato, delle derivate* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial u^2}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ *e sarà provato che la funzione* $u(x, y, z)$ *verifica entro lo strato all'equazione di* POISSON, ossia entro lo strato è

$$\Delta_2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z) .$$

Tali dimostrazioni costituiscono l'argomento della presente Parte III, con la quale si chiude la mia complessiva ricerca.

1. – Si cominci col notare che la (B), del n. 8 della Parte I, nel caso in cui sia $f = 0$ si può scrivere, per ora in senso solo formale, nel modo seguente:

$$(1) \qquad u(H, \varrho, z) =$$

$$= \int_0^{\varrho} \Big\{ \sum_h^{0,\infty} w_h(z) \Big\{ \frac{1}{2} K_0(\varrho\sqrt{\lambda_h}) I_0(\xi\sqrt{\lambda_h}) \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{\lambda_h}[\varrho_h \gamma_0(Q, \xi) + \varrho_h' \gamma_a(Q, \xi)]\, dt +$$

$$+ \sum_l^{1,\infty} K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) I_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{\lambda_h}[\varrho_h \gamma_0(Q, \xi) + \varrho_h' \gamma_a(Q, \xi)] \cos(l(t-\omega))\, dt \Big\} \Big\} \xi\, d\xi +$$

$$+ \int_{\varrho}^{\infty} \Big\{ \sum_h^{0,\infty} w_h(z) \Big\{ \frac{1}{2} I_0(\varrho\sqrt{\lambda_h}) K_0(\xi\sqrt{\lambda_h}) \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{\lambda_h}[\varrho_h \gamma_0(Q, \xi) + \varrho_h' \gamma_a(Q, \xi)]\, dt +$$

$$+ \sum_l^{1,\infty} I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) K_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{\lambda_h}[\varrho_h \gamma_0(Q, \xi) + \varrho_h' \gamma_a(Q, \xi)] \cos(l(t-\omega))\, dt \Big\} \Big\} \xi\, d\xi ,$$

in cui è

$$w_h(z) = \varrho_h[-\beta_0\sqrt{\lambda_h} \cos(\sqrt{\lambda_h} z) + \alpha_0 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_h} z)] =$$

$$= \varrho_h'[\alpha \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_h}(a-z)) + \beta\sqrt{\lambda_h} \cos(\sqrt{\lambda_h}(a-z))] .$$

Si ricordi inoltre [1] che

$$\varrho_h \sqrt{\lambda_h} = \sqrt{\frac{2}{a}}\frac{1}{\beta_0} + (\text{infinitesimi monotoni d'ordine } \geq 1/h^2)\,,$$

$$\varrho_h' \sqrt{\lambda_h} = \sqrt{\frac{2}{a}}\frac{1}{\beta}(-1)^{h+1} + (\text{infinitesimi monotoni d'ordine } \geq 1/h^2),$$

$$\varepsilon_h = \sqrt{\lambda_h} - \frac{h\pi}{a} = (\text{infinitesimo, per } h \to \infty, \text{ definitivamente positivo e monotono nel senso della decrescenza, d'ordine } 1/h),$$

$$w_h(z) = -\sqrt{\frac{2}{a}}\cos\frac{h\pi z}{a} + \sqrt{\frac{2}{a}}\operatorname{sen}(\varepsilon_h z)\operatorname{sen}\frac{h\pi z}{a} + \sqrt{\frac{2}{a}}\frac{\alpha_0}{\beta_0}\frac{a}{h\pi}\operatorname{sen}\frac{h\pi z}{a} + (\text{termini trigonometrici con coefficienti definitivamente monotoni e infinitesimi d'ordine } \geq 1/h^2).$$

Si tenga poi presente la Osservazione II del n. 1 della Parte II, alla quale dovremo spesso ricorrere in seguito.

Sostituendo nella (1), a $w_h(z)\sqrt{\lambda_h}\varrho_h$, $w_h(z)\sqrt{\lambda_h}\varrho_h'$ ordinatamente le rispettive parti principali

$$-\frac{2}{a\beta_0}\cos\frac{h\pi z}{a}\,, \qquad \frac{2}{a\beta}\cos\frac{h\pi z}{a}(-1)^h = \frac{2}{a\beta}\cos\frac{h\pi(z+a)}{a}\,,$$

nei due addendi del secondo membro della (1) lo studio del comportamento delle due funzioni integrande si riconduce (astraendo al solito da serie che sono assolutamente convergenti in $T + FT$ [2] e uniformemente nei domini limitati di $T + FT$) alla analisi delle seguenti due espressioni (indicando con h' una scelta opportunamente grande del minimo valore di h):

$$(1') \quad \frac{-1}{a\beta_0}\sum_h^{h',\infty} \xi e^{h\frac{\pi}{a}(\xi-\varrho)}\cos\frac{h\pi z}{a}\sum_l^{1,\infty}\frac{1}{l}\left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^l\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\gamma_0(Q,\xi)\cos(l(t-\omega))\cdot dt + \\ + \frac{1}{a\beta}\sum_h^{h',\infty}\xi e^{h\frac{\pi}{a}(\xi-\varrho)}\cos\frac{h\pi(z+a)}{a}\sum_l^{1,\infty}\frac{1}{l}\left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^l\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\gamma_a(Q,\xi)\cos(l(t-\omega))\cdot dt\,,$$

---

[1] C. Birindelli, *Nuova trattazione di problemi al contorno di una striscia per l'equazione di Laplace in due variabili.* Ann. Mat. Pura Appl. (4) **25**, 156-162 (1946). Cfr. pp. 170-171.

[2] Ed astraendo anche da serie aventi il medesimo comportamento delle parti principali (1′) e (1″) (indicate successivamente nel testo).

ove $\xi < \varrho$;

$$(1'') \quad \frac{-1}{a\beta_0} \sum_h^{h',\infty} \xi e^{h\frac{\pi}{a}(\varrho-\xi)} \cos\frac{h\pi z}{a} \sum_l^{1,\infty} \frac{1}{l}\left(\frac{\varrho}{\xi}\right)^l \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \gamma_0(Q,\xi)\cos(l(t-\omega))\cdot dt +$$

$$+ \frac{1}{a\beta} \sum_h^{h',\infty} \xi e^{h\frac{\pi}{a}(\varrho-\xi)} \cos\frac{h\pi(z+a)}{a} \sum_l^{1,\infty} \frac{1}{l}\left(\frac{\varrho}{\xi}\right)^l \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \gamma_a(Q,\xi)\cos(l(t-\omega))\cdot dt\,,$$

ove $\varrho < \xi$.

Siccome quando $\xi \neq \varrho$ queste espressioni [che appaiono come prodotto di due serie lineari ovviamente convergenti se $\xi \neq \varrho$, di cui la seconda converge anzi anche per $\xi = \varrho$ e assolutamente, per le *Condizioni* D (Parte I, pag. 95)] convergono, e per il noto procedimento di sommazione di Poisson esistono finiti i limiti

$$\lim_{\xi\to\varrho^-} \sum_h^{h',\infty} e^{h\frac{\pi}{a}(\xi-\varrho)} \cos\frac{h\pi z}{a}\,, \qquad \lim_{\xi\to\varrho^-} \sum_h^{h',\infty} e^{h\frac{\pi}{a}(\xi-\varrho)} \cdot \cos\frac{h\pi(z+a)}{a}\,, \quad \text{con} \quad 0 < z < a,$$

se ne conclude che esiste finito il limite per $\xi \to \varrho^-$ di (1′) e il limite per $\xi \to \varrho^+$ di (1″).

Si ha di qui che le funzioni integrande nei due addendi del secondo membro della (1) (le quali come serie doppie sono uniformemente e assolutamente convergenti rispettivamente per $0 \leqslant z \leqslant a$, $0 \leqslant \xi \leqslant \varrho - \delta$ e per $0 \leqslant z \leqslant a$, $\varrho + \delta \leqslant \xi < \infty$) hanno pure finiti i limiti quando, ordinatamente, $\xi \to \varrho^-$, $\xi \to \varrho^+$, essendo $0 < z < a$, e *questi due limiti sono eguali*. Dunque tali due funzioni integrande sono, quali funzioni di ξ, continue nei rispettivi intervalli $0 \leqslant \xi \leqslant \varrho$, $\varrho \leqslant \xi < \infty$ di integrazione (assegnando come valori alle funzioni nel punto $\xi = \varrho$, di non convergenza delle serie, il valore numerico espresso dal limite della somma delle serie quando $\xi \to \varrho$ nei modi indicati).

I due integrali del secondo membro della (1) (pel carattere d'ordine esponenziale d'infinitesimo della funzione integranda nel secondo per $\xi \to \infty$ e pel carattere d'infinitesimo di quella del primo per $\xi \to 0$, oltrechè per la continuità di esse rispetto a z e ξ quando, come si è precisato, per la seconda sia $0 < z < a$, $\varrho \leqslant \xi < \infty$ e per la prima sia $0 < z < a$, $0 \leqslant \xi \leqslant \varrho$) soddisfano la condizione della uniforme sommabilità quando il punto $(H, \varrho, z) = (\varrho\cos\omega, \varrho\,\mathrm{sen}\,\omega, z)$ appartiene a domini limitati interni a T.

La eguaglianza espressa dalla (1) rimane così giustificata non solo formalmente ma anche quantitativamente, nel senso che nel caso di $f \equiv 0$ la (1) col suo secondo membro, costituito dalla somma di due integrali, viene ad esprimere quantitativamente, entro T, la medesima funzione $u(H, \varrho, z)$ dalla (B) (n. 8 della Parte I), mediante la relativa somma (finita e continua in $T + FT$)

della serie(doppia) di integrali che è uniformemente convergente in ogni dominio limitato di $T+\mathrm{F}T$.

2. – Derivando parzialmente la (1) una volta rispetto a ϱ si ottiene la seguente eguaglianza, al momento solo formale dato che non sono ancora giustificate le operazioni inerenti alla derivazione in parola,

$$(1_\varrho)\qquad \frac{\partial u(H,\,\varrho,\,z)}{\partial\varrho}=$$

$$=\int_0^\varrho\Bigg[\sum_h^{0,\infty} w_h(z)\sqrt{\lambda_h}\Bigg\{\frac{1}{2}\,K_0'(\varrho\sqrt{\lambda_h})I_0(\xi\sqrt{\lambda_h})\,\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{\lambda_h}\,[\varrho_h\gamma_0(Q,\,\xi)+\varrho_h'\gamma_a(Q,\,\xi)]\,\mathrm{d}t\,+$$

$$+\sum_l^{1,\infty} K_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\,\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q,\,\xi)+\varrho_h'\gamma_a(Q,\,\xi)]\cos\,(l(t-\omega))\cdot\mathrm{d}t\Bigg\}\Bigg]\,\xi\,\mathrm{d}\xi+$$

$$+\int_\varrho^\infty\Bigg[\sum_h^{0,\infty} w_h(z)\,\sqrt{\lambda_h}\Bigg\{\frac{1}{2}\,I_0'(\varrho\sqrt{\lambda_h})K_0(\xi\sqrt{\lambda_h})\,\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q,\,\xi)+\varrho_h'\gamma_a(Q,\,\xi)]\,\mathrm{d}t\,+$$

$$+\sum_l^{1,\infty} I_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})K_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\,\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q,\,\xi)+\varrho_h'\gamma_a(Q,\,\xi)]\cos\,(l(t-\omega))\cdot\mathrm{d}t\Bigg\}\Bigg]\,\xi\,\mathrm{d}\xi\,,$$

dato che, per quanto si è detto al precedente n. 1, la somma dei due termini restanti è zero.

Tenendo conto della Osservazione II del n. 1 della Parte II, si può concludere che, dopo avere sostituito nel secondo membro della (2) al posto delle espressioni

$$w_h(z)\lambda_h\varrho_h K_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\xi\,,\qquad w_h(z)\lambda_h\varrho_h' K_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\xi\,,$$

$$w_h(z)\lambda_h\varrho_h I_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})K_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\xi\,,\qquad w_h(z)\lambda_h\varrho_h' I_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})K_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\xi\,,$$

le rispettive parti principali

$$\frac{1}{a\beta_0}\left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^{l+1}e^{h\frac{\pi}{a}(\xi-\varrho)}\cos\frac{h\pi z}{a}\,,\qquad \frac{-1}{a\beta}\left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^{l+1}e^{h\frac{\pi}{a}(\xi-\varrho)}\cos\frac{h\pi(z+a)}{a}\,,\qquad \text{ove}\quad \xi<\varrho\,,$$

$$\frac{-1}{a\beta_0}\left(\frac{\varrho}{\xi}\right)^{l-1}e^{h\frac{\pi}{a}(\varrho-\xi)}\cos\frac{h\pi z}{a}\,,\qquad \frac{1}{a\beta}\left(\frac{\varrho}{\xi}\right)^{l-1}e^{h\frac{\pi}{a}(\varrho-\xi)}\cos\frac{h\pi(z+a)}{a}\,,\qquad \text{ove}\quad \varrho<\xi\,,$$

lo studio del comportamento delle due funzioni integrande sotto il segno di integrale, nei due addendi del secondo membro della (1_ϱ), si riconduce [astraendo al solito da serie che sono assolutamente convergenti in $T+FT$, e da serie aventi lo stesso comportamento delle $(1'_\varrho)$ e $(1''_\varrho)$ che seguono] alla analisi del comportamento delle seguenti due espressioni

$$(1'_\varrho) \quad \frac{1}{a\beta_0}\sum_h^{h',\infty} e^{h\frac{\pi}{a}(\xi-\varrho)}\cos\frac{h\pi z}{a}\sum_l^{1,\infty}\left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^{l+1}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\gamma_0(Q,\xi)\cos(l(t-\omega))\cdot dt -$$

$$-\frac{1}{a\beta}\sum_h^{h',\infty} e^{h\frac{\pi}{a}(\xi-\varrho)}\cos\frac{h\pi(z+a)}{a}\sum_l^{1,\infty}\left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^{l+1}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\gamma_a(Q,\xi)\cos(l(t-\omega))\cdot dt\,,$$

ove $\xi<\varrho$,

$$(1''_\varrho) \quad \frac{-1}{a\beta_0}\sum_h^{h',\infty} e^{h\frac{\pi}{a}(\varrho-\xi)}\cos\frac{h\pi z}{a}\sum_l^{1,\infty}\left(\frac{\varrho}{\xi}\right)^{l-1}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\gamma_0(Q,\xi)\cos(l(t-\omega))\cdot dt +$$

$$+\frac{1}{a\beta}\sum_h^{h',\infty} e^{h\frac{\pi}{a}(\varrho-\xi)}\cos\frac{h\pi(z+a)}{a}\sum_l^{1,\infty}\left(\frac{\varrho}{\xi}\right)^{l-1}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\gamma_a(Q,\xi)\cos(l(t-\omega))\cdot dt\,,$$

ove $\varrho<\xi$. Ripetendo poi le argomentazioni della fine del precedente n. 1, si conclude per la (1_ϱ) con gli stessi risultati stabiliti nel caso della (1).

3. – Tenendo conto del fatto che l'equazione di BESSEL, del tipo $(8'''_c)$ e $(8'''_s)$ della Parte I (pag. 83), resa omogenea, ha quali soluzioni $I_l(\sigma)$ e $K_l(\sigma)$, si ha

$$K''_l(\sigma)=\frac{l^2+\sigma^2}{\sigma^2}K_l(\sigma)-\frac{1}{\sigma}K'_l(\sigma)\,,\qquad I''_l(\sigma)=\frac{l^2+\sigma^2}{\sigma^2}I_l(\sigma)-\frac{1}{\sigma}I'_l(\sigma)\,.$$

Per quanto si è visto nella Osservazione II del n. 1 della Parte II, se ne conclude che le due espressioni

$$K''_l(\sigma)I_l(\sigma)=\frac{l^2+\sigma^2}{\sigma^2}K_l(\sigma)I_l(\sigma)-\frac{1}{\sigma}K'_l(\sigma)I_l(\sigma)\,,$$

$$I''_l(\sigma)K_l(\sigma)=\frac{l^2+\sigma^2}{\sigma^2}I_l(\sigma)K_l(\sigma)-\frac{1}{\sigma}I'_l(\sigma)K_l(\sigma)$$

si comportano, quando $\sigma\to\infty$, come

$$\frac{1}{2\sigma^2}+\frac{l^2+\sigma^2}{\sigma^2}\frac{1}{2l}\,,\qquad \frac{-1}{2\sigma^2}+\frac{l^2+\sigma^2}{\sigma^2}\frac{1}{2l}\,,$$

rispettivamente. Ciò equivale a dire che, quando $h \to \infty$, le espressioni

$$K_l''(\varrho\sqrt{\lambda_h})I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})\,, \qquad I_l''(\varrho\sqrt{\lambda_h})K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})$$

si comportano come

$$\frac{1}{2\varrho^2\lambda_h} + \frac{l^2 + \varrho^2\lambda_h}{\varrho^2\lambda_h}\,\frac{1}{2l}\,, \qquad \frac{-1}{2\varrho^2\lambda_h} + \frac{l^2 + \varrho^2\lambda_h}{\varrho^2\lambda_h}\,\frac{1}{2l}\,.$$

Ne segue, tenendo conto che per la Osservazione I del n. 7 della Parte I l'espressione $I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})/I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})$ per grandi valori di l e per $h \to \infty$ si comporta come $(\xi/\varrho)^l e^{\sqrt{\lambda_h}(\xi-\varrho)}$, che quando $h \to \infty$ l'espressione

$$K_l''(\varrho\sqrt{\lambda_h})I_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) = K_l''(\varrho\sqrt{\lambda_h})I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})\,\frac{I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})}{I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})}\,,$$

si comporta come

$$\left\{\frac{1}{2\varrho^2h^2\pi^2/a^2} + \frac{l^2 + \varrho^2h^2\pi^2/a^2}{\varrho^2h^2\pi^2/a^2}\,\frac{1}{2l}\right\}\left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^l e^{h\frac{\pi}{a}(\xi-\varrho)}\,, \qquad \text{con} \quad \xi < \varrho\,,$$

e l'altra

$$I_l''(\varrho\sqrt{\lambda_h})K_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) = I_l''(\varrho\sqrt{\lambda_h})K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})\,\frac{K_l(\xi\sqrt{\lambda_h})}{K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})}$$

si comporta come

$$\left\{\frac{-1}{2\varrho^2h^2\pi^2/a^2} + \frac{l^2 + \varrho^2h^2\pi^2/a^2}{\varrho^2h^2\pi^2/a^2}\,\frac{1}{2l}\right\}\left(\frac{\varrho}{\xi}\right)^{l+1} e^{h\frac{\pi}{a}(\varrho-\xi)}\,, \qquad \text{con} \quad \varrho < \xi\,.$$

Ciò premesso, derivando formalmente una volta la (1_ϱ) rispetto a ϱ, si ottiene la seguente ultima eguaglianza (da intendersi per ora solo in senso formale):

$$(1_{\varrho^2}) \qquad \frac{\partial^2 u(H, \varrho, z)}{\partial \varrho^2} =$$

$$= \int_0^\varrho \Bigg[\sum_h^{0,\infty} w_h(z)\lambda_h \left\{\frac{1}{2}\,K_0''(\varrho\sqrt{\lambda_h})I_0(\xi\sqrt{\lambda_h})\,\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q, \xi) + \varrho_h'\gamma_a(Q, \xi)]\,dt\, + \right.$$

$$\left. + \sum_l^{1,\infty} K_l''(\varrho\sqrt{\lambda_h})I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\,\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q, \xi) + \varrho_h'\gamma_a(Q, \xi)]\cos(l(t-\omega))\cdot dt\right\}\Bigg]\,\xi\,d\xi +$$

$$+\int\limits_{\varrho}^{\infty}\left[\sum_h^{0,\infty} w_h(z)\lambda_h\left\{\frac{1}{2}I_0''(\varrho\sqrt{\lambda_h})K_0(\xi\sqrt{\lambda_h})\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q,\xi)+\varrho_h'\gamma_a Q,\xi)]\,dt+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_l^{1,\infty} I_l''(\varrho\sqrt{\lambda_h})K_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q,\xi)+\varrho_h'\gamma_a(Q,\xi)]\cos(l(t-\omega))\cdot dt\right\}\right]\xi\,d\xi+$$

$$+\varrho\lim_{\xi\to\varrho^-}\left[\sum_h^{0,\infty} w_h(z)\sqrt{\lambda_h}\left\{\frac{1}{2}K_0'(\varrho\sqrt{\lambda_h})I_0(\xi\sqrt{\lambda_h})\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q,\xi)+\varrho_h'\gamma_a(Q,\xi)]\,dt+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_l^{1,\infty} K_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q,\xi)+\varrho_h'\gamma_a(Q,\xi)]\cos(l(t-\omega))\,dt\right\}\right]-$$

$$-\varrho\lim_{\xi\to\varrho^+}\left[\sum_h^{0,\infty} w_h(z)\sqrt{\lambda_h}\left\{\frac{1}{2}I_0'(\varrho\sqrt{\lambda_h})K_0(\xi\sqrt{\lambda_h})\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q,\xi)+\varrho_h'\gamma_a(Q,\xi)]\,dt+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_l^{1,\infty} I_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})K_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q,\xi)+\varrho_h'\gamma_a(Q,\xi)]\cos(l(t-\omega))\,dt\right\}\right],$$

ove nel secondo membro, per quanto si è indicato nel precedente n. 2, sono certamente finiti i limiti

$$\lim_{\xi\to\varrho^-}[\ldots],\qquad \lim_{\xi\to\varrho^+}[\ldots].$$

Le funzioni integrande nei due integrali del secondo membro della (1_{ϱ^2}) sono evidentemente, al solito, convergenti per $\xi\neq\varrho$. Infatti, sostituendo anche ora alle espressioni

$$w_h(z)\lambda_h\varrho_h\sqrt{\lambda_h}K_l''(\varrho\sqrt{\lambda_h})I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\xi,\quad w_h(z)\lambda_h\varrho_h'\sqrt{\lambda_h}K_l''(\varrho\sqrt{\lambda_h})I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\xi,\ \text{ove}\ \xi<\varrho,$$
$$w_h(z)\lambda_h\varrho_h\sqrt{\lambda_h}I_l''(\varrho\sqrt{\lambda_h})K_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\xi,\quad w_h(z)\lambda_h\varrho_h'\sqrt{\lambda_h}I_l''(\varrho\sqrt{\lambda_h})K_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\xi,\ \text{ove}\ \varrho<\xi,$$

le rispettive parti principali

$$\left.\begin{aligned}&\frac{-1}{\varrho a\beta_0}e^{h\frac{\pi}{a}(\xi-\varrho)}\cos\frac{h\pi z}{a}\cdot\left[1+l+\frac{\pi^2\varrho^2}{a^2}\frac{h^2}{l}\right]\left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^{l+1},\\&\frac{1}{\varrho a\beta}e^{h\frac{\pi}{a}(\xi-\varrho)}\cos\frac{h\pi(z+a)}{a}\cdot\left[1+l+\frac{\pi^2\varrho^2}{a^2}\frac{h^2}{l}\right]\left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^{l+1},\end{aligned}\right\}\quad\text{ove}\quad\xi<\varrho,$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{-1}{\varrho a\beta_0}e^{h\frac{\pi}{a}(\varrho-\xi)}\cos\frac{h\pi z}{a}\cdot\left[-1+l+\frac{\pi^2\varrho^2}{a^2}\frac{h^2}{l}\right]\left(\frac{\varrho}{\xi}\right)^{l},\\&\frac{1}{\varrho a\beta}e^{h\frac{\pi}{a}(\varrho-\xi)}\cos\frac{h\pi(z+a)}{a}\cdot\left[-1+l+\frac{\varrho^2\pi^2}{a^2}\frac{h^2}{l}\right]\left(\frac{\varrho}{\xi}\right)^{l},\end{aligned}\right\}\quad\text{ove}\quad\varrho<\xi,$$

lo studio del comportamento delle due funzioni integrande nei primi due addendi del secondo membro della (1_{ϱ^2}), si riconduce [astraendo al solito da serie che sono assolutamente convergenti in $T+FT$ e uniformemente nei domini limitati di $T+FT$ e da serie aventi il medesimo comportamento delle seguenti $(1'_{\varrho^2})$ e $(1''_{\varrho^2})$] allo studio del comportamento delle seguenti due espressioni (indicando al solito con h' una scelta opportunamente grande del minimo valore di h)

$$(1'_{\varrho^2})\qquad \frac{-1}{\varrho a\beta_0}\sum_h^{h',\infty} e^{h\frac{\pi}{a}(\xi-\varrho)}\cos\frac{h\pi z}{a}\sum_l^{1,\infty}(1+l)\left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^{l+1}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\gamma_0(Q,\xi)\cos(l(t-\omega))\cdot dt+$$

$$+\frac{1}{\varrho a\beta}\sum_h^{h',\infty} e^{h\frac{\pi}{a}(\xi-\varrho)}\cos\frac{h\pi(z+a)}{a}\sum_l^{1,\infty}(1+l)\left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^{l+1}\int_0^{2\pi}\gamma_a(Q,\xi)\cos(l(t-\omega))\cdot dt-$$

$$-\frac{\pi^2\varrho^2}{\varrho a^3\beta_0}\sum_h^{h',\infty} h^2 e^{h\frac{\pi}{a}(\xi-\varrho)}\cos\frac{h\pi z}{a}\sum_l^{1,\infty}\frac{1}{l}\left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^{l+1}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\gamma_0(Q,\xi)\cos(l(t-\omega))\cdot dt+$$

$$+\frac{\pi^2\varrho^2}{\varrho a^3\beta}\sum_h^{h',\infty} h^2 e^{h\frac{\pi}{a}(\xi-\varrho)}\cos\frac{h\pi(z+a)}{a}\sum_l^{1,\infty}\frac{1}{l}\left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^{l+1}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\gamma_a(Q,\xi)\cos(l(t-\omega))\cdot dt\,,$$

ove $\xi<\varrho$,

$$(1''_{\varrho^2})\qquad \frac{-1}{\varrho a\beta_0}\sum_h^{h',\infty} e^{h\frac{\pi}{a}(\varrho-\xi)}\cos\frac{h\pi z}{a}\sum_l^{1,\infty}(l-1)\left(\frac{\varrho}{\xi}\right)^{l}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\gamma_0(Q,\xi)\cos(l(t-\omega))\cdot dt+$$

$$+\frac{1}{\varrho a\beta}\sum_h^{h',\infty} e^{h\frac{\pi}{a}(\varrho-\xi)}\cos\frac{h\pi(z+a)}{a}\sum_l^{1,\infty}(l-1)\left(\frac{\varrho}{\xi}\right)^{l}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\gamma_a(Q,\xi)\cos l(t-\omega))\cdot dt-$$

$$-\frac{\pi^2\varrho^2}{\varrho a^3\beta_0}\sum_h^{h',\infty} h^2 e^{h\frac{\pi}{a}(\varrho-\xi)}\cos\frac{h\pi z}{a}\sum_l^{1,\infty}\frac{1}{l}\left(\frac{\varrho}{\xi}\right)^{l}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\gamma_0(Q,\xi)\cos(l(t-\omega))\cdot dt+$$

$$+\frac{\pi^2\varrho^2}{\varrho a^3\beta}\sum_h^{h',\infty} h^2 e^{h\frac{\pi}{a}(\varrho-\xi)}\cos\frac{h\pi(z+a)}{a}\sum_l^{1,\infty}\frac{1}{l}\left(\frac{\varrho}{\xi}\right)^{l}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\gamma_a(Q,\xi)\cos(l(t-\omega))\cdot dt\,,$$

ove $\varrho<\xi$.

Ma sotto le *Condizioni* D (Parte I, pag. 95) le due serie ottenute derivando termine a termine due volte consecutivamente rispetto ad ω le serie di FOURIER (delle γ_0, γ_a pensate funzioni di ω, $0\leqslant\omega\leqslant 2\pi$, lungo le solite circonferenze di raggio ξ, ove γ_0, γ_a sono periodiche assieme alle rispettive derivate dei primi due ordini rispetto ad ω, con periodo 2π)

$$\sum \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \gamma_0(Q,\xi)\cos(l(t-\omega))\cdot dt\,, \qquad \sum \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \gamma_a(Q,\xi)\cos l(t-\omega))\cdot dt\,,$$

sono esse pure due serie di Fourier convergenti uniformemente in $0 \leqslant \omega \leqslant 2\pi$ con somme quindi continue in $(0, 2\pi)$ ed esprimenti le $\partial^2\gamma_0/\partial\omega^2$, $\partial^2\gamma_a/\partial\omega^2$.

Le due serie

$$\sum_l^{1,\infty} l^2 \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \gamma_0(Q,\xi)\cos(l(t-\omega))\cdot dt\,, \qquad \sum_l^{1,\infty} l^2 \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \gamma_a(Q,\xi)\cos(l(t-\omega))\cdot dt$$

sono così convergenti uniformemente in $0 \leqslant \omega \leqslant 2\pi$ e di conseguenza tali pure sono le altre

$$\sum_l^{1,\infty} (1+l)\left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^{l+1} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \gamma_0(Q,\xi)\cos(l(t-\omega))\cdot dt\,,$$

$$\sum_l^{1,\infty} (1+l)\left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^{l+1} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \gamma_a(Q,\xi)\cos(l(t-\omega))\cdot dt\,,$$

quando $\xi \leqslant \varrho$,

$$\sum_l^{1,\infty} (l-1)\left(\frac{\varrho}{\xi}\right)^{l} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \gamma_0(Q,\xi)\cos(l(t-\omega))\cdot dt\,,$$

$$\sum_l^{1,\infty} (l-1)\left(\frac{\varrho}{\xi}\right)^{l} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \gamma_a(Q,\xi)\cos(l(t-\omega)\cdot dt\,,$$

quando $\varrho \leqslant \xi$. Tenendo conto di ciò e ragionando per il resto come si è fatto al n. 1 per le (1′) e (1″), si conclude che anche per il secondo membro della (1_{ϱ^2}) valgono gli stessi risultati stabiliti al n. 1 nei riguardi del secondo membro della (1).

Si conclude così che per la $u(H, \varrho, z)$ espressa a mezzo del secondo membro della (1) restano giustificate le condizioni, relative alle funzioni integrande, sotto cui è permessa la derivazione parziale due volte consecutivamente rispetto a ϱ sotto il segno d'integrale (con gli estremi dell'intervallo d'integrazione dipendenti dal parametro).

I secondi membri delle (1_ϱ) e (1_{ϱ^2}) che così si ottengono dal secondo membro della (1) costituiscono dunque le effettive $\partial u/\partial\varrho$, $\partial^2 u/\partial\varrho^2$ della $u(H, \varrho, z)$ quando il punto (H, ϱ, z) è interno a T e la $\partial^2 u/\partial\varrho^2$ risulta essa pure continua entro T.

4. – Si consideri ancora la $u(H, \varrho, z)$ espressa dalla (1) col punto (H, ϱ, z) sempre interno a T. Si rammenti che è:

$$\Delta_2 u(H, \varrho, z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \omega^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad w_h''(z) = -\lambda_h w_h(z).$$

Essendo K_l, I_l soluzioni della equazione di BESSEL nel caso omogeneo (Parte I, n. 3), si vede, a mezzo di passaggi elementari, che ne seguono le due eguaglianze seguenti:

$$\lambda_h K_l''(\varrho\sqrt{\lambda_h}) = \lambda_h\left(1 + \frac{l^2}{\varrho^2\lambda_h}\right) K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) - \frac{\sqrt{\lambda_h}}{\varrho} K_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h}),$$

$$\lambda_h I_l''(\varrho\sqrt{\lambda_h}) = \lambda_h\left(1 + \frac{l^2}{\varrho^2\lambda_h}\right) I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) - \frac{\sqrt{\lambda_h}}{\varrho} I_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h}).$$

Da queste due eguaglianze e dalle (1_ϱ) e (1_{ϱ^2}) si ha che quando (H, ϱ, z) è interno a T risulta

(2)
$$\frac{\partial^2 u(H, \varrho, z)}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial u(H, \varrho, z)}{\partial \varrho} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\varrho \Bigg[\sum_h^{0,\infty} w_h(z)\lambda_h \Bigg\{ \frac{1}{2} K_0(\varrho\sqrt{\lambda_h}) I_0(\xi\sqrt{\lambda_h}) \int_0^{2\pi} \sqrt{\lambda_h}\,[\varrho_h\gamma_0(Q, \xi) + \varrho_h'\gamma_a(Q, \xi)]\,dt +$$

$$+ \sum_l^{1,\infty}\left(1 + \frac{l^2}{\varrho^2\lambda_h}\right) K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) I_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) \int_0^{2\pi} \sqrt{\lambda_h}\,[\varrho_h\gamma_0(Q, \xi) + \varrho_h'\gamma_a(Q, \xi)] \cos(l(t-\omega))\,dt \Bigg\}\Bigg] \xi\,d\xi +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^\varrho \Bigg[\sum_h^{0,\infty} w_h(z)\lambda_h \Bigg\{ \frac{1}{2} I_0(\varrho\sqrt{\lambda_h}) K_0(\xi\sqrt{\lambda_h}) \int_0^{2\pi} \sqrt{\lambda_h}\,[\varrho_h\gamma_0(Q, \xi) + \varrho_h'\gamma_a(Q, \xi)]\,dt +$$

$$+ \sum_l^{1,\infty}\left(1 + \frac{l^2}{\varrho^2\lambda_h}\right) I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) K_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) \int_0^{2\pi} \sqrt{\lambda_h}\,[\varrho_h\gamma_0(Q, \xi) + \varrho_h'\gamma_a(Q, \xi)] \cos(l(t-\omega))\,dt \Bigg\}\Bigg] \xi\,d\xi +$$

$$+ \varrho \lim_{\xi\to\varrho^-} \Bigg[\sum_h^{0,\infty} w_h(z)\sqrt{\lambda_h} \Bigg\{ \frac{1}{2} K_0'(\varrho\sqrt{\lambda_h}) I_0(\xi\sqrt{\lambda_h}) \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{\lambda_h}\,[\varrho_h\gamma_0(Q, \xi) + \varrho_h'\gamma_a(Q, \xi)]\,dt +$$

$$+ \sum_l^{1,\infty} K_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h}) I_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{\lambda_h}\,[\varrho_h\gamma_0(Q, \xi) + \varrho_h'\gamma_a(Q, \xi)] \cos(l(t-\omega))\,dt \Bigg\}\Bigg] -$$

$$- \varrho \lim_{\xi\to\varrho^+} \Bigg[\sum_h^{0,\infty} w_h(z)\sqrt{\lambda_h} \Bigg\{ \frac{1}{2} I_0'(\varrho\sqrt{\lambda_h}) K_0(\xi\sqrt{\lambda_h}) \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{\lambda_h}\,[\varrho_h\gamma_0(Q, \xi) + \varrho_h'\gamma_a(Q, \xi)]\,dt +$$

$$+ \sum_l^{1,\infty} I_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h}) K_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{\lambda_h}\,[\varrho_h\gamma_0(Q, \xi) + \varrho_h'\gamma_a(Q, \xi)] \cos(l(t-\omega))\,dt \Bigg\}\Bigg].$$

È chiaro d'altra parte che il $\lim\limits_{\xi\to\varrho}$ espresso dalla riunione del terzo e quarto addendo del secondo membro della (2) è esprimibile sotto la forma seguente:

$$
\begin{aligned}
(3)\quad & \varrho\lim_{\xi\to\varrho^-}\Bigg[\sum_h^{0,\infty} w_h(z)\sqrt{\lambda_h}\Bigg\{\frac{1}{2}K_0'(\varrho\sqrt{\lambda_h})I_0(\xi\sqrt{\lambda_h})\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q,\xi)+\varrho_h'\gamma_a(Q,\xi)]\,dt+\\
&+\sum_l^{1,\infty}K_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{\lambda_h}\,[\varrho_h\gamma_0(Q,\varrho)+\varrho_h'\gamma_a(Q,\varrho)]\cos(l(t-\omega))\cdot dt\Bigg\}\Bigg]-\\
&-\varrho\lim_{\xi\to\varrho^+}\Bigg[\sum_h^{0,\infty} w_h(z)\sqrt{\lambda_h}\Bigg\{\frac{1}{2}I_0'(\varrho\sqrt{\lambda_h})K_0(\xi\sqrt{\lambda_h})\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{\lambda_h}\,[\varrho_h\gamma_0(Q,\varrho)+\varrho_h'\gamma_a(Q,\varrho)]\,dt+\\
&+\sum_l^{1,\infty}I_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})K_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{\lambda_h}\,[\varrho_h\gamma_0(Q,\varrho)+\varrho_h'\gamma_a(Q,\varrho)]\cos(l(t-\omega))\cdot dt\Bigg\}\Bigg].
\end{aligned}
$$

Rammentando che, per la Osservazione II del n. 1 della Parte II, al variare di l ed h

l'espressione $\sqrt{\lambda_h}K_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})$ con $\xi<\varrho$ si comporta come $\dfrac{-1}{2\varrho}\left(\dfrac{\xi}{\varrho}\right)^l e^{\sqrt{\lambda_h}(\xi-\varrho)}$

e l'espressione $\sqrt{\lambda_h}I_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})K_l(\xi\sqrt{\lambda_h})$ con $\xi>\varrho$ si comporta come $\dfrac{1}{2\varrho}\left(\dfrac{\varrho}{\xi}\right)^l e^{\sqrt{\lambda_h}(\varrho-\xi)}$,

e che è

$$\sqrt{\lambda_h}[K_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})-I_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})]=\frac{-1}{\varrho},$$

si ha intanto, indicando con ξ la quantità $<\varrho$ e tendente a ϱ e con ξ' l'altra $>\varrho$ e tendente a ϱ, che l'espressione

$$
\begin{aligned}
(4)\quad & \{\sqrt{\lambda_h}K_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})-\sqrt{\lambda_h}I_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})K_l(\xi'\sqrt{\lambda_h})\}+\\
&\qquad+\left\{\frac{1}{2\varrho}\left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^l e^{\sqrt{\lambda_h}(\xi-\varrho)}+\frac{1}{2\varrho}\left(\frac{\varrho}{\xi'}\right)^l e^{\sqrt{\lambda_h}(\varrho-\xi')}\right\}
\end{aligned}
$$

è infinitesima quando ξ e ξ' si fanno tendere, anche indipendentemente l'uno dall'altro, a ϱ. In particolare, in corrispondenza di ogni $\xi<\varrho$ si può scegliere lo $\xi'>\varrho$ per cui è $\xi-\varrho=\varrho-\xi'$, nel qual caso bisogna porre $\xi'=2\varrho-\xi$, e la corrispondente espressione (4) è allora:

$$(4')\qquad \{\sqrt{\lambda_h}K_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})-\sqrt{\lambda_h}I_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})K_l((2\varrho-\xi)\sqrt{\lambda_h})\}+ \\ +\frac{1}{2\varrho}e^{\sqrt{\lambda_h}(\xi-\varrho)}\left\{\left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^l+\left(\frac{\varrho}{2\varrho-\xi}\right)^l\right\},$$

ed essa tende a zero quando $\xi\to\varrho^-$. È allora facile vedere [operando come si è fatto al n. 2 per la ricerca del limite delle funzioni integrande negli integrali del secondo membro di (1_ϱ), quando $\xi\to\varrho$] che l'espressione

$$\varrho\lim_{\xi\to\varrho^-}\sum_h^{0,\infty}w_h(z)\Bigg[\Bigg\{\sqrt{\lambda_h}(K_0'(\varrho\sqrt{\lambda_h})I_0(\xi\sqrt{\lambda_h})-I_0'(\varrho\sqrt{\lambda_h})K_0((2\varrho-\xi)\sqrt{\lambda_h})+ \\ +\frac{1}{2\varrho}e^{\sqrt{\lambda_h}(\xi-\varrho)}\left\{\left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^0+\left(\frac{\varrho}{2\varrho-\xi}\right)^0\right\}\Bigg\}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q,\varrho)+\varrho_h'\gamma_a(Q,\varrho)]\,dt+ \\ +\sum_l^{1,\infty}\Bigg\{\sqrt{\lambda_h}(K_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})-I_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})K_l((2\varrho-\xi)\sqrt{\lambda_h})+ \\ +\frac{1}{2\varrho}e^{\sqrt{\lambda_h}(\xi-\varrho)}\left\{\left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^l+\left(\frac{\varrho}{2\varrho-\xi}\right)^l\right\}\Bigg\}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q,\varrho)+\varrho_h'\gamma_a(Q,\varrho)]\cos(l(t-\omega))\cdot dt\Bigg]$$

ha il valore zero. Ne segue che l'espressione (3) si può porre sotto la forma (più opportuna per l'analisi che stiamo svolgendo):

$$(3')\qquad \frac{-\varrho}{2\varrho}\lim_{\xi\to\varrho^-}\sum_h^{0,\infty}e^{\sqrt{\lambda_h}(\xi-\varrho)}w_h(z)\Bigg\{2\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q,\varrho)+\varrho_h'\gamma_a(Q,\varrho)]\,dt+ \\ +\sum_h^{1,\infty}\left[\left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^l+\left(\frac{\varrho}{2\varrho-\xi}\right)^l\right]\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q,\varrho)+\varrho_h'\gamma_a(Q,\varrho)]\cos(l(t-\omega))\cdot dt\Bigg\}= \\ =\frac{-1}{2}\lim_{\xi\to\varrho^-}\sum_l^{0,\infty}w_h(z)\varrho_h\sqrt{\lambda_h}e^{\sqrt{\lambda_h}(\xi-\varrho)}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\gamma_0(Q,\varrho)\,dt+\sum_l^{1,\infty}\left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^l\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\gamma_0(Q,\varrho)\cos(l(t-\omega))\,dt\right\}+ \\ +\frac{-1}{2}\lim_{\xi\to\varrho^-}\sum_h^{0,\infty}w_h(z)\varrho_h'\sqrt{\lambda_h}e^{\sqrt{\lambda_h}(\xi-\varrho)}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\gamma_a(Q,\varrho)\,dt+\sum_l^{1,\infty}\left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^l\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\gamma_a(Q,\varrho)\cos(l(t-\omega))\,dt\right\}+ \\ +\frac{-1}{2}\lim_{\xi\to\varrho^-}\sum_h^{0,\infty}w_h(z)\varrho_h\sqrt{\lambda_h}e^{\sqrt{\lambda_h}(\xi-\varrho)}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\gamma_0(Q,\varrho)\,dt+\sum_l^{1,\infty}\left(\frac{\varrho}{2\varrho-\xi}\right)^l\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\gamma_0(Q,\varrho)\cos(l(t-\omega))\,dt\right\}+$$

$$+\frac{-1}{2}\lim_{\xi\to\varrho^-}\sum_h^{0,\infty} w_h(z)\varrho_h'\sqrt{\lambda_h}e^{\sqrt{\lambda_h}(\xi-\varrho)}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\gamma_a(Q,\varrho)\,dt\,+\right.$$

$$\left.+\sum_l^{1,\infty}\left(\frac{\varrho}{2\varrho-\xi}\right)^l\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\gamma_a(Q,\varrho)\cos\left(l(t-\omega)\right)dt\right\}=$$

$$=-\gamma_0(H,\varrho)\lim_{\xi\to\varrho^-}\sum_h^{0,\infty}\varrho_h\sqrt{\lambda_h}w_h(z)e^{\sqrt{\lambda_h}(\xi-\varrho)}-\gamma_a(H,\varrho)\lim_{\xi\to\varrho^-}\sum_h^{0,\infty}\varrho_h'\sqrt{\lambda_h}w_h(z)e^{\sqrt{\lambda_h}(\xi-\varrho)}=$$

$$=-\lim_{\xi\to\varrho^-}\sum_h^{0,\infty}e^{\sqrt{\lambda_h}(\xi-\varrho)}\,w_h(z)\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(H,\varrho)+\varrho_h'\gamma_a(H,\varrho)]\,.$$

Tutto ciò si giustifica per il fatto che le serie di Fourier indicate sono convergenti per le solite *Condizioni* D (Parte I, pag. 95), sicchè il procedimento di Poisson porta al risultato costituito dalle somme ordinarie delle serie in questione, mentre d'altra parte, per il noto comportamento delle successioni $\varrho_h\sqrt{\lambda_h}$, $\varrho_h'\sqrt{\lambda_h}$ e della successione di polinomi goniometrici $w_h(z)$, è facile giustificare, con le solite argomentazioni, che esistono certamente finiti i limiti:

$$\lim_{\xi\to\varrho^-}\sum_h^{0,\infty}e^{\sqrt{\lambda_h}(\xi-\varrho)}\varrho_h\sqrt{\lambda_h}w_h(z)\qquad\text{con}\qquad\xi<\varrho\,,\tag{5}$$

$$\lim_{\xi\to\varrho^-}\sum_h^{0,\infty}e^{\sqrt{\lambda_h}(\xi-\varrho)}\varrho_h'\sqrt{\lambda_h}w_h(z)\qquad\text{con}\qquad\xi<\varrho\,;\tag{6}$$

vale a dire che si ha la convergenza, con un metodo di Poisson, per le due serie (non convergenti in senso ordinario)

$$\sum_h^{0,\infty}\varrho_h\sqrt{\lambda_h}w_h(z)\,,\qquad\sum_h^{0,\infty}\varrho_h'\sqrt{\lambda_h}w_h(z)\,,$$

e quindi anche per la serie complessiva

$$\sum_h^{0,\infty}w_h(z)\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(H,\varrho)+\varrho_h'\gamma_a(H,\varrho)]$$

(pur essa non convergente in senso ordinario).

Si osservi, allo scopo di giustificare qui la parola usata di « procedimento di Poisson », che, per essere $\sqrt{\lambda_h}$ dell'ordine di $h\pi/a$, tanto da far sì che la $\varepsilon_h=\sqrt{\lambda_h}-h\pi/a$ è infinitesima come $1/h$, il coefficiente $e^{\sqrt{\lambda_h}(\xi-\varrho)}$ ha lo stesso ufficio dell'altro $\left[e^{(\xi-\varrho)\pi/a}\right]^h$ con la base $e^{(\xi-\varrho)\pi/a}$ sempre <1 per $\xi<\varrho$.

Faremo ora vedere che *l'ultimo membro della* (3') *è numericamente eguale allo zero.*

Basta, per brevità, mettere a raffronto le espressioni (5) e (6) con le ultime due della pag. 184 del lavoro citato in (1), tenendo presente che la nostra $w_h(z)$ non è altro che la $v_h(y)$ di tale lavoro, mentre le nostre $\varrho_h\sqrt{\lambda_h}$, $\varrho'_h\sqrt{\lambda_h}$ non sono altro che le $\sigma_h^{(0)}$, $-\sigma_h$ di detto lavoro. Dalle espressioni di queste $\sigma_n^{(0)}$, σ_n indicate a pag. 162 del lavoro richiamato e tenendo conto della seconda forma che si può dare alla espressione della $v_n(y)$ [che è la nostra $w_h(z)$], si ha infatti

$$\sigma_n^{(0)} = \frac{-1}{\beta_0}\, v_n(0) = \frac{-1}{\beta_0}\,[\varrho_n\cdot(-\beta_0\sqrt{\lambda_n})] = \varrho_n\sqrt{\lambda_n}\,,$$

$$\sigma_n = \frac{-1}{\beta}\, v_n(a) = \frac{-1}{\beta}\,\varrho'_n\beta\sqrt{\lambda_n} = -\,\varrho'_n\sqrt{\lambda_n}\,.$$

Siccome le due dette espressioni di pag. 184 del mio sopranominato lavoro hanno il comune valore dato dallo zero, segue la immediata giustificazione dell'asserto fatto (quando è $0 < z < a$).

Se ne conclude che *nel secondo membro della* (2) *l'espressione complessiva espressa dalla somma del terzo e quarto addendo ha il valore zero.*

Per avere l'espressione completa $\Delta_2 u$ si deve ancora determinare quale sia l'espressione della rimanente parte $\dfrac{1}{\varrho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\omega^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ che va aggiunta al secondo membro della (2) onde avere per somma il $\Delta_2 u$. È ora facile verificare che si ottiene, col solo cambiamento del segno, l'espressione integrale a secondo membro della (2), sicchè ne risulta di conseguenza che è $\Delta_2 u(H, \varrho, z) = 0$.

Si riconosce anzitutto, seguendo i precedenti procedimenti, che per le espressioni integrali che si incontrano via via per la valutazione finale per le espressioni delle

$$\frac{\partial^2 u(H, \varrho, z)}{\partial\omega^2}\,, \quad \frac{\partial^2 u(H, \varrho, z)}{\partial z^2}$$

sono giustificabili tutte le operazioni inerenti alle derivazioni parziali sotto i segni di integrale (ad estremi fissi questa volta, per l'intervallo d'integrazione) e che valgono le solite proprietà per le funzioni integrande relative.

Si trova così che, sempre intendendo che il punto (H, ϱ, z) sia interno a T, è per la $u(H, \varrho, z)$, data dalla (1),

$$(7) \qquad \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 u(H, \varrho, z)}{\partial\omega^2} + \frac{\partial^2 u(H, \varrho, z)}{\partial z^2} =$$

$$= \frac{-1}{\pi}\int_0^\varrho \Big[\sum_h^{0,\infty} w_h(z)\lambda_h\Big\{\frac{1}{2}\,K_0(\varrho\sqrt{\lambda_h})I_0(\xi\sqrt{\lambda_h})\int_0^{2\pi}\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q, \xi) + \varrho'_h\gamma_a(Q, \xi)]\,\mathrm{d}t +$$

$$+\sum_l^{1,\infty}\left(1+\frac{l^2}{\varrho^2\lambda_h}\right)K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\int_0^{2\pi}\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q,\xi)+$$

$$+\varrho_h'\gamma_a(Q,\xi)]\cos(l(t-\omega))\cdot dt\Big\}\Big]\xi\,d\xi-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_\varrho^\infty\Big[\sum_h^{0,\infty}w_h(z)\lambda_h\Big\{\frac{1}{2}I_0(\varrho\sqrt{\lambda_h})K_0(\xi\sqrt{\lambda_h})\int_0^{2\pi}\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q,\xi)+\varrho_h'\gamma_a(Q,\xi)]\,dt+$$

$$+\sum_l^{1,\infty}\left(1+\frac{l^2}{\varrho^2\lambda_h}\right)I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})K_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\int_0^{2\pi}\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q,\xi)+$$

$$+\varrho_h'\gamma_a(Q,\xi)]\cos(l(t-\omega))\,dt\Big\}\Big]\xi\,d\xi\,.$$

Tenendo conto di quanto si è osservato, rispetto agli ultimi due termini del secondo membro di (2), si deduce appunto che *sommando membro a membro* (2) *e* (7), *risulta essere, entro* T,

$$\Delta_2 u(H,\varrho,z)=0\,,$$

per la funzione $u(H,\varrho,z)$ *espressa dalla* (B), *del n.* 8 *della Parte* I, *nel caso particolare in cui si supponga* $f=0$ *in* T, *e le derivate*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,\quad\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,,\quad\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

risultano continue anch'esse entro T, *sicchè la* u, *per quanto sappiamo già, viene a costituire l'unica effettiva soluzione per il nostro generale problema al contorno quando in tutto* T *si assuma* $f=0$. *Lo studio del caso armonico è così del tutto completato per il problema al contorno che ci occupa.*

5. – Fatto lo studio della parte (1) del secondo membro della (B), del n. 8 della Parte I, passiamo allo studio del comportamento della parte restante del secondo membro della (B) stessa. È chiaro che tale parte residua dovrebbe costituire la soluzione $u(H,\varrho,z)$ del problema al contorno quando si assuma, lungo FT, $\gamma_0\equiv0$ per $z=0$, $\gamma_a\equiv0$ per $z=a$, e qui va sempre inteso che il punto $(H,\varrho,z)\equiv(\varrho\cos\omega,\ \varrho\,\mathrm{sen}\,\omega,\ z)\equiv(x,y,z)$ appartenga a T. La funzione u è data da

$$(1_f) \qquad u(H, \varrho, z) =$$

$$= \frac{-1}{\pi} \sum_h^{0,\infty} w_h(z) \left\{ \frac{1}{2} K_0(\varrho\sqrt{\lambda_h}) \int_0^{\varrho} I_0(\xi\sqrt{\lambda_h}) \left[\int_0^{2\pi} \left(\int_0^a f(Q, \xi, s) w_h(s)\, ds \right) dt \right] \xi\, d\xi + \right.$$

$$+ \sum_l^{1,\infty} K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) \int_0^{\varrho} I_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) \left[\int_0^{2\pi} \left(\int_0^a f(Q, \xi, s) w_h(s)\, ds \right) \cos(l(\omega - t))\, dt \right] \xi\, d\xi \Bigg\} +$$

$$+ \frac{-1}{\pi} \sum_h^{0,\infty} w_h(z) \left\{ \frac{1}{2} I_0(\varrho\sqrt{\lambda_h}) \int_{\varrho}^{\infty} K_0(\xi\sqrt{\lambda_h}) \left[\int_0^{2\pi} \left(\int_0^a f(Q, \xi, s) w_h(s)\, ds \right) dt \right] \xi\, d\xi + \right.$$

$$+ \sum_l^{1,\infty} I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) \int_{\varrho}^{\infty} K_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) \left[\int_0^{2\pi} \left(\int_0^a f(Q, \xi, s) w_h(s)\, ds \right) \cos(l(\omega - t))\, dt \right] \xi\, d\xi \Bigg\},$$

e, da quanto ci è noto, le due serie doppie di integrali sono assolutamente convergenti in $T + \mathrm{F}T$ ed uniformemente convergenti quando (H, ϱ, z) varia in domini limitati di $T + \mathrm{F}T$, sicchè $u(H, \varrho, z)$ è funzione continua in $T + \mathrm{F}T$. Per quanto si è fatto al n. 1 della Parte II si ha che sotto la *condizione* D′ *relativa alla* f (pag. 239 della Parte II) l'espressione

$$\int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^a f(Q, \xi, s) w_h(s)\, ds \right\} \cos(l(\omega - t)) \cdot dt$$

si comporta come $\frac{1}{hl^2} e^{(\sqrt{\lambda_0} - \beta)\xi}$ e allora ripetendo per le serie doppie aventi come termini le funzioni integrande [degli integrali $\int_0^{\varrho}$, $\int_{\varrho}^{\infty}$ termini delle due serie doppie a secondo membro della (1_f)] tutto il procedimento svolto al n. 9 della Parte I, si riconosce che le due serie in questione sono assolutamente convergenti per ogni ξ e siccome i termini relativi si comportano (uniformemente) come

$$\frac{1}{h^2 l^2} e^{-|\varrho - \xi| \sqrt{\lambda_h} + (\sqrt{\lambda_0} - \beta)\xi}$$

per $\xi \to \infty$, ne segue che la (1_f) si può scrivere nella seguente forma equivalente:

$$(\overline{1}_f) \qquad u(H,\varrho,z)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\varrho}\Bigg[\sum_h^{0,\infty} w_h(z)\Bigg\{\frac{1}{2}K_0(\varrho\sqrt{\lambda_h})I_0(\xi\sqrt{\lambda_h})\int_0^{2\pi}\Bigg(\int_0^a f(Q,\xi,s)w_h(s)\,ds\Bigg)dt+$$

$$+\sum_l^{1,\infty}K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\int_0^{2\pi}\Bigg(\int_0^a f(Q,\xi,s)w_h(s)\,ds\Bigg)\cos(l(\omega-t))\cdot dt\Bigg\}\Bigg]\xi\,d\xi-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{\varrho}^{\infty}\Bigg[\sum_h^{0,\infty} w_h(z)\Bigg\{\frac{1}{2}I_0(\varrho\sqrt{\lambda_h})K_0(\xi\sqrt{\lambda_h})\int_0^{2\pi}\Bigg(\int_0^a f(Q,\xi,s)w_h(s)\,ds\Bigg)dt+$$

$$+\sum_l^{1,\infty}I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})K_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\int_0^{2\pi}\Bigg(\int_0^a f(Q,\xi,s)w_h(s)\,ds\Bigg)\cos(l(\omega-t))\cdot dt\Bigg\}\Bigg]\xi\,d\xi\,,$$

le cui funzioni integrande sono funzioni continue rispetto a ξ come pure rispetto ai tre parametri ϱ, ω, z e i due integrali soddisfano la condizione della uniforme sommabilità quando $(\varrho,\omega,z)\equiv(H,\varrho,z)$ varia in qualsiasi dominio limitato di $T+FT$.

Si considerino due numeri positivo r', r'' con $r'<r''$ e due altri $\overline{r}'$, $\overline{r}''$ tali che risulti $r'<\overline{r}'<\overline{r}''<r''$ sicchè l'intervallo $(\overline{r}',\overline{r}'')$ è allora interno a quello (r',r''). Si limiti dopo ciò il dominio $\overline{C}'$ di variabilità del punto $(H,\varrho,z)\equiv$ $\equiv(\varrho\cos\omega,\ \varrho\operatorname{sen}\omega,\ z)$ imponendo che sia sempre $\overline{r}'\leqslant\varrho\leqslant\overline{r}''$, $0\leqslant\omega\leqslant 2\pi$, $0\leqslant z\leqslant a$ e più precisamente che il punto (H,ϱ,z) sia interno al detto dominio $\overline{C}'$, avente forma di involucro cilindrico. (Questo dominio $\overline{C}'$ è poi interno a quello C', pure esso a forma di involucro cilindrico, per cui è invece $r'\leqslant\varrho\leqslant r''$, $0\leqslant\omega\leqslant 2\pi$, $0\leqslant z\leqslant a$.)

Tornando allora alla (1_f), sostituendo nei termini delle due serie doppie [che sono uniformemente convergenti, per ciò che è già noto, per (H,ϱ,z) variabile nel dominio $\overline{C}'$] le integrazioni $\int_0^{\varrho}$, $\int_{\varrho}^{\infty}$, rispettivamente con le altre $\int_0^{r'}$, $\int_{r''}^{\infty}$ si ottiene col secondo membro della (1_f) così trasformato la somma di due serie doppie [i cui termini sono funzioni armoniche rispetto a (H,ϱ,z) quando (H,ϱ,z) varia in $\overline{C}'$] entrambe uniformemente (ed assolutamente) convergenti per (H,ϱ,z) variabile in $\overline{C}'$, sicchè la funzione $\overline{u}(H,\varrho,z)$ che si ottiene dalla somma delle due serie doppie è funzione armonica in $\overline{C}'$.

Non resta dopo ciò che studiare il comportamento del Δ_2 della funzione $\bar{u}(H, \varrho, z)$ costituita dalla parte residua del secondo membro della (1_f) e che esprimeremo servendoci della $(\bar{1}_f)$; va al solito inteso che (H, ϱ, z) sia interno al dominio limitato $\bar{C}'$;

$$\bar{u}(H, \varrho, z) =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{r'}^{\varrho}\Bigg[\sum_h^{0,\infty} w_h(z)\Bigg\{\frac{1}{2}K_0(\varrho\sqrt{\lambda_h})I_0(\xi\sqrt{\lambda_h})\int_0^{2\pi}\Bigg(\int_0^a f(Q, \xi, s)w_h(s)\,ds\Bigg)dt +$$

$$+\sum_l^{1,\infty} K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\int_0^{2\pi}\Bigg(\int_0^a f(Q, \xi, s)w_h(s)\,ds\Bigg)\cos(l(\omega - t))\cdot dt\Bigg\}\Bigg]\xi\,d\xi -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{\varrho}^{r''}\Bigg[\sum_h^{0,\infty} w_h(z)\Bigg\{\frac{1}{2}I_0(\varrho\sqrt{\lambda_h})K_0(\xi\sqrt{\lambda_h})\int_0^{2\pi}\Bigg(\int_0^a f(Q, \xi, s)w_h(s)\,ds\Bigg)dt +$$

$$+\sum_l^{1,\infty} I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})K_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\int_0^{2\pi}\Bigg(\int_0^a f(Q, \xi, s)w_h(s)\,ds\Bigg)\cos(l(\omega - t))\cdot dt\Bigg\}\Bigg]\xi\,d\xi\,.$$

Per la Osservazione del n. 2 della Parte II (pag. 258) si ha che la corrispondente espressione di quella ora scritta, e pertinente al problema di Dirichlet per lo strato, è la seguente:

$$\bar{u}_D(H, \varrho, z) =$$

$$= \frac{-1}{\pi}\frac{2}{a}\int_{r'}^{\varrho}\Bigg[\sum_h^{1,\infty}\operatorname{sen}\frac{h\pi z}{a}\cdot\Bigg\{\frac{1}{2}K_0\Big(\varrho\frac{h\pi}{a}\Big)I_0\Big(\xi\frac{h\pi}{a}\Big)\int_0^{2\pi}\Bigg(\int_0^a f(Q, \xi, s)\operatorname{sen}\frac{h\pi s}{a}\cdot ds\Bigg)dt +$$

$$+\sum_l^{1,\infty} K_l\Big(\varrho\frac{h\pi}{a}\Big)I_l\Big(\xi\frac{h\pi}{a}\Big)\int_0^{2\pi}\Bigg(\int_0^a f(Q, \xi, s)\operatorname{sen}\frac{h\pi s}{a}\cdot ds\Bigg)\cos(l(\omega - t))\cdot dt\Bigg\}\Bigg]\xi\,d\xi -$$

$$-\frac{1}{\pi}\frac{2}{a}\int_{\varrho}^{r''}\Bigg[\sum_h^{1,\infty}\operatorname{sen}\frac{h\pi z}{a}\cdot\Bigg\{\frac{1}{2}I_0\Big(\varrho\frac{h\pi}{a}\Big)K_0\Big(\xi\frac{h\pi}{a}\Big)\int_0^{2\pi}\Bigg(\int_0^a f(Q, \xi, s)\operatorname{sen}\frac{h\pi s}{a}\cdot ds\Bigg)dt +$$

$$+\sum_l^{1,\infty} I_l\Big(\varrho\frac{h\pi}{a}\Big)K_l\Big(\xi\frac{h\pi}{a}\Big)\int_0^{2\pi}\Bigg(\int_0^a f(Q, \xi, s)\operatorname{sen}\frac{h\pi s}{a}\cdot ds\Bigg)\cos(l(\omega - t))\cdot dt\Bigg\}\Bigg]\xi\,d\xi\,,$$

e per questa risulta

$$\Delta_2\bar{u}_D(H, \varrho, z) = f(H, \varrho, z)\,, \qquad \text{(per essere } f \text{ hölderiana)},$$

come è ben evidente ripetendo quanto precede nel caso del problema di DIRICHLET (pel quale si sa già essere la competente espressione (B) l'unica ed effettiva soluzione per il problema di DIRICHLET nello strato T).

Per dimostrare che è

$$\Delta_2\bar{\bar{u}}(H, \varrho, z) = f(H, \varrho, z)$$

conviene studiare la

$$(2') \qquad \bar{\bar{u}}(H, \varrho, z) =$$

$$= \frac{-1}{\pi}\int\limits_{r'}^{\varrho}\Bigg[\sum_h^{0,\infty}\Bigg\{ w_h(z)\,\frac{1}{2}\,K_0(\varrho\sqrt{\lambda_h})I_0(\xi\sqrt{\lambda_h})\int\limits_0^{2\pi}\Bigg(\int\limits_0^a f(Q, \xi, s)w_h(s)\,\mathrm{d}s\Bigg)\mathrm{d}t -$$

$$- \frac{2}{a}\,\mathrm{sen}\,\frac{h\pi z}{a}\cdot\frac{1}{2}\,K_0\left(\varrho\,\frac{h\pi}{a}\right)I_0\left(\xi\,\frac{h\pi}{a}\right)\int\limits_0^{2\pi}\Bigg(\int\limits_0^a f(Q, \xi, s)\,\mathrm{sen}\,\frac{h\pi s}{a}\cdot\mathrm{d}s\Bigg)\mathrm{d}t +$$

$$+ \sum_l^{1,\infty}\Bigg[w_h(z)K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\int\limits_0^{2\pi}\Bigg(\int\limits_0^a f(Q, \xi, s)w_h(s)\,\mathrm{d}s\Bigg)\cos\,(l(\omega - t))\cdot\mathrm{d}t -$$

$$- \frac{2}{a}\,\mathrm{sen}\,\frac{h\pi z}{a}\cdot K_l\left(\varrho\,\frac{h\pi}{a}\right)I_l\left(\xi\,\frac{h\pi}{a}\right)\int\limits_0^{2\pi}\Bigg(\int\limits_0^a f(Q, \xi, s)\,\mathrm{sen}\,\frac{h\pi s}{a}\cdot\mathrm{d}s\Bigg)\cos\,(l(\omega - t))\cdot\mathrm{d}t\Bigg]\Bigg\}\Bigg]\,\xi\,\mathrm{d}\xi -$$

$$- \frac{1}{\pi}\int\limits_{\varrho}^{r''}\Bigg[\sum_h^{0,\infty}\Bigg\{ w_h(z)\,\frac{1}{2}\,I_0(\varrho\sqrt{\lambda_h})K_0(\xi\sqrt{\lambda_h})\int\limits_0^{2\pi}\Bigg(\int\limits_0^a f(Q, \xi, s)w_h(s)\,\mathrm{d}s\Bigg)\mathrm{d}t -$$

$$- \frac{2}{a}\,\mathrm{sen}\,\frac{h\pi z}{a}\cdot\frac{1}{2}\,I_0\left(\varrho\,\frac{h\pi}{a}\right)K_0\left(\xi\,\frac{h\pi}{a}\right)\int\limits_0^{2\pi}\Bigg(\int\limits_0^a f(Q, \xi, s)\,\mathrm{sen}\,\frac{h\pi s}{a}\cdot\mathrm{d}s\Bigg)\mathrm{d}t +$$

$$+ \sum_l^{1,\infty}\Bigg[w_h(z)I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})K_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\int\limits_0^{2\pi}\Bigg(\int\limits_0^a f(Q, \xi, s)w_h(s)\,\mathrm{d}s\Bigg)\cos\,(l(\omega - t))\cdot\mathrm{d}t -$$

$$- \frac{2}{a}\,\mathrm{sen}\,\frac{h\pi z}{a}\cdot I_l\left(\varrho\,\frac{h\pi}{a}\right)K_l\left(\xi\,\frac{h\pi}{a}\right)\int\limits_0^{2\pi}\Bigg(\int\limits_0^a f(Q, \xi, s)\,\mathrm{sen}\,\frac{h\pi s}{a}\cdot\mathrm{d}s\Bigg)\cos\,(l(\omega - t))\cdot\mathrm{d}t\Bigg]\Bigg\}\Bigg]\,\xi\,\mathrm{d}\xi +$$

$$+ \bar{\bar{u}}_D(H, \varrho, z)\,,$$

ove al solito va inteso che (H, ϱ, z) sia interno al dominio $\overline{C}'$.

Ricordando che per $h \to \infty$ è

$$\frac{1}{2} K_0(\varrho\sqrt{\lambda_h}) I_0(\xi\sqrt{\lambda_h}) \sim \frac{1}{2} K_0\left(\varrho\frac{h\pi}{a}\right) I_0\left(\xi\frac{h\pi}{a}\right) \sim \frac{1}{2^2}\frac{1}{\sqrt{\xi\varrho}}\frac{a}{h\pi} e^{\frac{h\pi}{a}(\xi-\varrho)}, \quad \xi < \varrho\,;$$

$$\frac{1}{2} I_0(\varrho\sqrt{\lambda_h}) K_0(\xi\sqrt{\lambda_h}) \sim \frac{1}{2} K_0\left(\xi\frac{h\pi}{a}\right) I_0\left(\varrho\frac{h\pi}{a}\right) \sim \frac{1}{2^2}\frac{1}{\sqrt{\varrho\xi}}\frac{a}{h\pi} e^{\frac{h\pi}{a}(\varrho-\xi)}, \quad \varrho < \xi\,;$$

nonchè i risultati offerti dalla Osservazione II del n. 1 della Parte II relativamente alle parti principali delle

$$K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) I_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) \sim K_l\left(\varrho\frac{h\pi}{a}\right) I_l\left(\xi\frac{h\pi}{a}\right) \sim \frac{1}{2l}\left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^l e^{\frac{h\pi}{a}(\xi-\varrho)}, \quad \xi < \varrho\,;$$

$$I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) K_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) \sim I_l\left(\varrho\frac{h\pi}{a}\right) K_l\left(\xi\frac{h\pi}{a}\right) \sim \frac{1}{2l}\left(\frac{\varrho}{\xi}\right)^l e^{\frac{h\pi}{a}(\varrho-\xi)}, \quad \varrho < \xi\,;$$

sempre per $h \to \infty$ e per grandi valori di l, e infine che per $h \to \infty$ la parte principale di $w_h(z) w_h(s)$ è data dalla espressione

$$\frac{2}{a}\cos\frac{h\pi z}{a}\cos\frac{h\pi s}{a}\,,$$

si ha che le due serie, aventi per termini le espressioni che dànno le parti principali dei termini delle serie costituenti le funzioni integrande dei due integrali primo e secondo addendo del secondo membro della (2′), sono:

$$\frac{1}{2}\xi\sum_h \frac{2}{a}\left\{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\varrho\xi}}\frac{a}{h\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a f(Q,\xi,s)\cos\frac{h\pi(z+s)}{a}\cdot ds\right)dt\,+\right.$$

$$\left.+\sum_l^{1,\infty}\frac{1}{l}\left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^l\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a f(Q,\xi,s)\cos\frac{h\pi(z+s)}{a}\cdot ds\right)\cos\left(l(\omega-t)\right)\cdot dt\right\} e^{\frac{h\pi}{a}(\xi-\varrho)} =$$

$$=\frac{\sqrt{\xi/\varrho}}{2\pi}\int_0^a\left[\sum_h e^{\frac{h\pi}{a}(\xi-\varrho)}\cos\frac{h\pi(z+s)}{a}\cdot\left(\int_0^{2\pi} f(Q,\xi,s)\,dt\right)\right]ds\,+$$

$$+\frac{\xi}{a}\int_0^a\left[\sum_h e^{\frac{h\pi}{a}(\xi-\varrho)}\cos\frac{h\pi(z+s)}{a}\cdot\left\{\sum_l^{1,\infty}\frac{1}{l}\left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^l\int_0^{2\pi} f(Q,\xi,s)\cos(l(\omega-t))\cdot dt\right\}\right]ds,$$

con $\xi < \varrho$, e l'altra del tutto simile con $\varrho < \xi$.

Queste espressioni, estendendo ad esempio la $\sum_h$ per h da zero ad ∞, hanno, comunque si faccia tendere ξ a ϱ, il comune limite finito [essendo z interno a $(0, a)$]:

$$\frac{1}{2}\int_0^a\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Q, \xi, s)\,\mathrm{d}t + \frac{\varrho}{a}\sum_l^{1,\infty}\frac{1}{l}\int_0^{2\pi} f(Q, \xi, s)\cos\left(l(\omega - t)\right)\cdot\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}s\,.$$

Se ne deduce che le funzioni integrande dei due integrali primo e secondo addendo del secondo membro della (2′) sono due serie (doppie) che sommate per linee sono uniformemente convergenti, rispettivamente, negli intervalli $r' \leqslant \xi \leqslant \varrho - \varepsilon$, $\varrho + \varepsilon \leqslant \xi \leqslant r''$, con limite finito per la loro somma quando $\xi \to \varrho$, sicchè nei due detti integrali la funzione integranda è funzione continua rispetto a ξ negli interi intervalli di integrazione (r', ϱ), (ϱ, r'') e quando (H, ϱ, z) è interno a $\overline{C}'$ i due integrali stessi soddisfano la condizione della uniforme sommabilità.

Si riconosce poi che i vari termini delle due serie doppie sono funzioni armoniche di (H, ϱ, z). Infatti, rammentando che

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2}{\partial\omega^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

e che $K_l(\sigma)$, $I_l(\sigma)$ sono soluzioni della

$$\sigma^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\sigma^2} + \sigma\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\sigma} - (l^2 + \sigma^2)u = 0\,,$$

risulta

$$K_l''(\varrho\sqrt{\lambda_h}) = \frac{l^2}{\varrho^2\lambda_h}K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) + K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) - \frac{1}{\varrho\sqrt{\lambda_h}}K_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})\,,$$

$$I_l''(\varrho\sqrt{\lambda_h}) = \frac{l^2}{\varrho^2\lambda_h}I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) + I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) - \frac{1}{\varrho\sqrt{\lambda_h}}I_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})\,,$$

e in particolare, per $l = 0$,

$$K_0''(\varrho\sqrt{\lambda_h}) = K_0(\varrho\sqrt{\lambda_h}) - \frac{1}{\varrho\sqrt{\lambda_h}}K_0'(\varrho\sqrt{\lambda_h})\,,\quad I_0''(\varrho\sqrt{\lambda_h}) = I_0(\varrho\sqrt{\lambda_h}) - \frac{1}{\varrho\sqrt{\lambda_h}}I_0'(\varrho\sqrt{\lambda_h}).$$

Ne risulta che è

$$\Delta_2\{\,w_h(z)K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})\cos\left(l(\omega - t)\right)\} = \Delta_2\{\,w_h(z)I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})\cos\left(l(\omega - t)\right)\} =$$
$$= \Delta_2\{\,w_h(z)K_0(\varrho\sqrt{\lambda_h})\} = \Delta_2\{\,w_h(z)I_0(\varrho\sqrt{\lambda_h})\} = 0\,.$$

Tenendo conto di tutto ciò, si può procedere in relazione alla espressione somma dei due integrali che compaiono nel secondo membro della (2') come si è fatto nel precedente n. 1 nei riguardi del secondo membro della (1).

A mezzo della già più volte richiamata Osservazione II della Parte II (pag. 237) e delle stesse argomentazioni fatte ai nn. 2, 3, 4 precedenti, si conclude che anche nel caso in esame restano giustificate le condizioni sotto cui è valida la derivazione parziale, due volte consecutivamente, rispetto a ϱ sotto il segno di integrale (con gli estremi dell'intervallo di integrazione dipendenti dal parametro) quando (H, ϱ, z) è interno a $\overline{C}'$. Proseguendo, come nel caso rammentato, l'analisi in tali punti (H, ϱ, z) per la valutazione del Δ_2 della espressione in esame, si perviene, a parte i soliti termini che si elidono due a due come nel precedente caso sopra rammentato, in definitiva alla conclusione che il Δ_2 cercato si identifica con la espressione seguente:

$$(7')\quad -\frac{1}{\pi}\lim_{\xi\to\varrho^-}\left[\sum_h^{0,\infty}\left\{w_h(z)\varrho\sqrt{\lambda_h}\,\frac{1}{2}\,K_0'(\varrho\sqrt{\lambda_h})I_0(\xi\sqrt{\lambda_h})\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a f(Q,\xi,s)w_h(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t\,+\right.\right.$$

$$-\frac{2}{a}\,\mathrm{sen}\,\frac{h\pi z}{a}\cdot\varrho\,\frac{h\pi}{a}\,\frac{1}{2}\,K_0'\left(\varrho\frac{h\pi}{a}\right)I_0\left(\xi\frac{h\pi}{a}\right)\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a f(Q,\xi,s)\,\mathrm{sen}\,\frac{h\pi s}{a}\cdot\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t\,+$$

$$+\sum_l^{1,\infty}\left[w_h(z)\varrho\sqrt{\lambda_h}K_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a f(Q,\xi,s)w_h(s)\,\mathrm{d}s\right)\cos\left(l(\omega-t)\right)\cdot\mathrm{d}t\,-\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{2}{a}\,\mathrm{sen}\,\frac{h\pi z}{a}\cdot\varrho\,\frac{h\pi}{a}\,K_l'\left(\varrho\frac{h\pi}{a}\right)I_l\left(\xi\frac{h\pi}{a}\right)\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a f(Q,\xi,s)\,\mathrm{sen}\,\frac{h\pi s}{a}\cdot\mathrm{d}s\right)\cos\left(l(\omega-t)\right)\cdot\mathrm{d}t\right]\right\}\right]+$$

$$+\frac{1}{\pi}\lim_{\xi\to\varrho^+}\left[\sum_h^{0,\infty}\left\{w_h(z)\varrho\sqrt{\lambda_h}\,\frac{1}{2}\,I_0'(\varrho\sqrt{\lambda_h})K_0(\xi\sqrt{\lambda_h})\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a f(Q,\xi,s)w_h(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t\,-\right.\right.$$

$$-\frac{2}{a}\,\mathrm{sen}\,\frac{h\pi z}{a}\cdot\varrho\,\frac{h\pi}{a}\,\frac{1}{2}\,I_0'\left(\varrho\frac{h\pi}{a}\right)K_0\left(\xi\frac{h\pi}{a}\right)\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a f(Q,\xi,s)\,\mathrm{sen}\,\frac{h\pi s}{a}\cdot\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t\,+$$

$$+\sum_l^{1,\infty}\left[w_h(z)\varrho\sqrt{\lambda_h}I_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})K_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a f(Q,\xi,s)w_h(s)\,\mathrm{d}s\right)\cos\left(l(\omega-t)\right)\cdot\mathrm{d}t\,-\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{2}{a}\,\mathrm{sen}\,\frac{h\pi z}{a}\cdot\varrho\,\frac{h\pi}{a}\,I_l'\left(\varrho\frac{h\pi}{a}\right)K_l\left(\xi\frac{h\pi}{a}\right)\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a f(Q,\xi,s)\,\mathrm{sen}\,\frac{h\pi s}{a}\cdot\mathrm{d}s\right)\cos\left(l(\omega-t)\right)\cdot\mathrm{d}t\right]\right\}\right].$$

Il tutto si riduce a stabilire che questa espressione ha valore nullo. A questo scopo si tenga presente che è

$$-[K_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})-I_l'(\varrho\sqrt{\lambda_h})K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})]=\frac{1}{\varrho\sqrt{\lambda_h}}$$

e che per $\xi\to\varrho$ le due espressioni $I_l(\xi\sqrt{\lambda_h})/I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})$, $K_l(\xi\sqrt{\lambda_h})/K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})$, tenendo presente l'Osservazione II della Parte II (pag. 237), si comportano come $e^{-\sqrt{\lambda_h}\,|\xi-\varrho|}$.

Tornando alla espressione in esame, si pensi di scegliere nelle due somme i due valori di ξ per cui siano eguali gli esponenziali e di raggruppare in una unica serie i termini delle due serie della espressione stessa; questa ha lo stesso limite (per $\xi\to\varrho$) dato da

$$\begin{aligned}(8)\qquad &\lim_{\xi\to\varrho}\frac{1}{\pi}\sum_h^{0,\infty}\Bigg\{w_h(z)\,e^{-\sqrt{\lambda_h}\,|\xi-\varrho|}\Bigg[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Bigg(\int_0^a f(Q,\xi,s)w_h(s)\,ds\Bigg)dt+\\
&+\sum_l^{1,\infty}\int_0^{2\pi}\Bigg(\int_0^a f(Q,\xi,s)w_h(s)\,ds\Bigg)\cos\,(l(\omega-t))\cdot dt\Bigg]-\\
&-\frac{2}{a}\,e^{-\frac{h\pi}{a}|\xi-\varrho|}\operatorname{sen}\frac{h\pi z}{a}\cdot\Bigg[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Bigg(\int_0^a f(Q,\xi,s)\operatorname{sen}\frac{h\pi s}{a}\cdot ds\Bigg)dt+\\
&+\sum_l^{1,\infty}\int_0^{2\pi}\Bigg(\int_0^a f(Q,\xi,s)\operatorname{sen}\frac{h\pi s}{a}\cdot ds\Bigg)\cos\,(l(\omega-t))\cdot dt\Bigg]\Bigg\}=\\
&=\lim_{\xi\to\varrho}\sum_h^{0,\infty}\Bigg\{w_h(z)e^{-\sqrt{\lambda_h}\,|\xi-\varrho|}\int_0^a f(H,\xi,s)w_h(s)\,ds-\\
&-\frac{2}{a}\operatorname{sen}\frac{h\pi z}{a}\cdot e^{-\frac{h\pi}{a}|\xi-\varrho|}\int_0^a f(H,\xi,s)\operatorname{sen}\frac{h\pi s}{a}\cdot ds\Bigg\},\end{aligned}$$

come è ben evidente per il fatto della convergenza delle serie di FOURIER verso la funzione e ciò come conseguenza delle note condizioni imposte alla f.

Si ricordi a questo punto che in loc. cit. in [1] si è trovato che la soluzione per il problema al contorno di una striscia, corrispondente di quello che ora ci occupa per lo strato, nel caso di $\gamma_0=\gamma_a=0$ è precisamente data dalla seguente espressione:

$$u(x, y) = -\int_{-\infty}^{x} \sum_h^{0,\infty} \frac{w_h(y)}{2\sqrt{\lambda_h}} e^{\sqrt{\lambda_h}(\xi - x)} \left(\int_0^a f(\xi, s) w_h(s)\, ds \right) d\xi -$$

$$-\int_{x}^{\infty} \sum_h^{0,\infty} \frac{w_h(y)}{2\sqrt{\lambda_h}} e^{\sqrt{\lambda_h}(x - \xi)} \left(\int_0^a f(\xi, s) w_h(s)\, ds \right) d\xi ,$$

ove al posto del simbolismo relativo a loc. cit. in [1] si è sostituito quello sistematicamente seguito ora. Essendo $\Delta_2 u(x, y) = f(x, y)$ entro la striscia [sotto le corrispondenti condizioni di quelle a cui deve soddisfare la nostra f, in particolare quella d'essere f hölderiana] e risultando giustificate le condizioni sotto cui sono lecite le derivazioni parziali sotto il segno d'integrale (con gli estremi dell'intervallo d'integrazione dipendenti dal parametro) *si trova*, col calcolare il Δ_2 e scartando i soliti termini che si elidono due a due, *la fondamentale eguaglianza, per ogni y interno a* $(0, a)$,

$$\lim_{|\xi - x| \to 0} \sum_h^{0,\infty} w_h(y) e^{-\sqrt{\lambda_h}\,|\xi - x|} \int_0^a f(\xi, s) w_h(s)\, ds = f(x, y) . \tag{9}$$

Dalla (9) segue che il secondo membro della (8) ha precisamente il valore $f(H, \varrho, z) - f(H, \varrho, z) = 0$, e tale risulta quindi il valore della espressione (7').

Se ne conclude che quando (H, ϱ, z) è interno al dominio limitato $\overline{C}'$ è

$$\Delta_2 \overline{u}(H, \varrho, z) = f(H, \varrho, z) .$$

Di conseguenza la u espressa dal secondo membro della (1_f) soddisfa, entro T, la equazione di Poisson $\Delta_2 u = f$ e le derivate seconde sono continue in $T - FT$. Si può, dopo ciò, enunciare il seguente

Teorema III. *Sotto le condizioni imposte alle γ_0, γ_a, f (tra le altre quella d'essere f localmente hölderiana in T) la funzione $u(H, \varrho, z)$ espressa dalla* (B) *del* n. 8 *della Parte* I (pag. 96), *soddisfa, entro T, alla equazione di* Poisson $\Delta_2 u(H, \varrho, z) = f(H, \varrho, z)$ *e, in base ai risultati già stabiliti nella Parte* I *e nella Parte* II, *tale $u(H, \varrho, z)$ costituisce l'unica effettiva soluzione per il nostro generale problema al contorno per lo strato T.*

6. – Per finire, credo utile riassumere i risultati ottenuti nel corso della nostra ricerca complessiva.

La funzione $\gamma_0(H, \varrho)$ assegnata nel piano $z = 0$ sia continua ed altrettanto avvenga per l'altra $\gamma_a(H, \varrho)$ nel relativo piano $z = a$, mentre la funzione $f(H, \varrho, z)$ assegnata nei punti $T + FT$ sia continua in $T + FT$ ed inoltre hölderiana in ogni dominio limitato di T.

Date le quattro costanti reali α_0, β_0, α, β tutte diverse da zero, per cui risulti $\alpha_0^2 + \beta_0^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 1$, con $\alpha_0\beta_0 < 0$, $\alpha\beta > 0$, cosicchè $\alpha\beta_0 - \alpha_0\beta \neq 0$ (ci si può sempre ridurre al caso di $\alpha\beta_0 - \alpha_0\beta > 0$), si consideri la successione $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h, \dots$ delle soluzioni λ positive crescenti (in infinità numerabile) della equazione

$$\operatorname{cotg}(\sqrt{\lambda}\, a) = \frac{\alpha\alpha_0 + \beta\beta_0\lambda}{(\alpha\beta_0 - \alpha_0\beta)\sqrt{\lambda}},$$

ove i numeri $\sqrt{\lambda_h}$ sono via via crescenti ed accostantisi sempre più, al crescere del loro numero d'ordine h, ai corrispondenti numeri $h\pi/a$.

In corrispondenza alla precedente successione numerica, si consideri poi l'altra costituita dalle funzioni

$$w_h(z) = \varrho_h \{-\beta_0\sqrt{\lambda_h} \cos(\sqrt{\lambda_h} z) + \alpha_0 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_h} z)\} =$$
$$= \varrho_h' \{\alpha \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_h}(a - z)) + \beta\sqrt{\lambda_h} \cos(\sqrt{\lambda_h}(a - z))\},$$

ove $0 \leqslant z \leqslant a$ e inoltre

$$\varrho_h = \sqrt{2} \Big/ \sqrt{(\beta_0^2\lambda_h + \alpha_0^2)a + \frac{\beta_0^2\lambda_h - \alpha_0^2}{2\sqrt{\lambda_h}} \operatorname{sen}(2\sqrt{\lambda_h} a) + \alpha_0\beta_0(\cos(2\sqrt{\lambda_h} a) - 1)},$$

$$\varrho_h' = -\beta_0\sqrt{\lambda_h}\varrho_h / \{\alpha \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_h} a) + \beta\sqrt{\lambda_h} \cos(\sqrt{\lambda_h} a)\} =$$
$$= \varrho_h \{\alpha_0 \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_h} a) - \beta_0\sqrt{\lambda_h} \cos(\sqrt{\lambda_h} a)\} / (\beta\sqrt{\lambda_h}).$$

Preso in considerazione il primo elemento $\sqrt{\lambda_0}$ della successione di numeri positivi $\sqrt{\lambda_h}$, supponiamo che le tre funzioni assegnate $\gamma_0(H, \varrho)$, $\gamma_a(H, \varrho)$, $f(H, \varrho, z)$ siano tali da fare sì che sia possibile scegliere tre opportune costanti positive N, M, c (con $c < \sqrt{\lambda_0}$) per cui sia

$$\left.\begin{array}{l} |\gamma_0(H, \varrho)| \\ |\gamma_a(H, \varrho)| \end{array}\right\} < M e^{(\sqrt{\lambda_0} - c)\varrho}, \qquad |f(H, \varrho, z)| < N e^{(\sqrt{\lambda_0} - c)\varrho}. \tag{10}$$

Oltre a ciò supponiamo che le funzioni γ_0, γ_a, f soddisfino pure le *Condizioni* D (Parte I, pag. 95), vale a dire siano lungo le circonferenze di raggio ϱ, concentriche a quelle $\omega(0)$, derivabili rispetto all'argomento ω, $0 \leqslant \omega \leqslant 2\pi$, con derivata prima assolutamente continua e derivata seconda continua e a variazione limitata [per la f ciò sussista per ogni valore di z scelto in $(0, a)$] in modo tale che le variazioni totali delle rispettive derivate prime e gli estremi superiori dei moduli di queste derivate prime verifichino la relazione (10) alla quale già, per ipotesi, deve soddisfare la f.

La f soddisfi infine alla *Condizione* D' *relativa ad* f (Parte II, pag. 239), sia cioè tale da risultare a variazione limitata rispetto a z nell'intervallo $(0, a)$, pensandola come funzione della sola z in $0 \leqslant z \leqslant a$, cioè lungo i segmenti di T perpendicolari alle facce $z = 0$, $z = a$ di FT e in modo tale che la relativa variazione totale $V(H, \varrho)$ soddisfi essa pure la relazione (10) relativa alla f.

Sotto queste condizioni assai generali imposte alle funzioni $\gamma_0(H, \varrho)$, $\gamma_a(H, \varrho)$, $f(H, \varrho, z)$ (³), indicando con $I_l(\sigma)$, $K_l(\sigma)$ le due funzioni di Bessel (di prima e di seconda specie, rispettivamente) di ordine $l = 0, 1, 2, \ldots$, e di argomento immaginario, possiamo, raccogliendo i risultati stabiliti, enunciare, *per la soluzione della equazione* $\Delta_2 u = f$ *nel generale problema al contorno di uno strato* T, indicato al n. 1 della Parte I, il seguente

Teorema di esistenza (e di unicità). *La somma di due serie doppie*

$$u(H, \varrho, z) = \tag{11}$$

$$= \frac{-1}{\pi} \sum_h^{0,\infty} w_h(z) \left\{ \frac{1}{2} K_0(\varrho\sqrt{\lambda_h}) \int_0^\varrho \xi I_0(\xi\sqrt{\lambda_h}) \left[\int_0^{2\pi} \left\{ -\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h \gamma_0(Q, \xi) + \varrho_h' \gamma_a(Q, \xi)] + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_0^a f(Q, \xi, s) w_h(s)\, ds \right\} dt \right] d\xi + \sum_l^{1,\infty} K_l(\varrho\sqrt{\lambda_h}) \int_0^\varrho \xi I_l(\xi\sqrt{\lambda_h}) \cdot$$

$$\cdot \left[\int_0^{2\pi} \left\{ -\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h \gamma_0(Q, \xi) + \varrho_h' \gamma_a(Q, \xi)] + \int_0^a f(Q, \xi, s) w_h(s)\, ds \right\} \cos(l(\omega - t)) \cdot dt \right] d\xi +$$

$$+ \frac{-1}{\pi} \sum_h^{0,\infty} w_h(z) \left\{ \frac{1}{2} I_0(\varrho\sqrt{\lambda_h}) \int_\varrho^\infty \xi K_0(\xi\sqrt{\lambda_h}) \cdot \right.$$

$$\cdot \left[\int_0^{2\pi} \left\{ -\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h \gamma_0(Q, \xi) + \varrho_h' \gamma_a(Q, \xi)] + \int_0^a f(Q, \xi, s) w_h(s)\, ds \right\} dt \right] d\xi +$$

(³) Condizioni, invero, *leggermente* più restrittive di quelle imposte alle γ_0, γ, f nel corrispondente lavoro sul problema, analogo, al contorno di una striscia, trattato in loc. cit. in (¹).

$$+\sum_l^{1,\infty} I_l(\varrho\sqrt{\lambda_h})\int_\varrho^\infty \xi K_l(\xi\sqrt{\lambda_h})\left[\int_0^{2\pi}\left\{-\sqrt{\lambda_h}[\varrho_h\gamma_0(Q,\xi)+\varrho_h'\gamma_a(Q,\xi)]+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_0^a f(Q,\xi,s)w_h(s)\,\mathrm{d}s\right\}\cos(l(\omega-t))\cdot\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\xi\Big\}$$

converge in senso puntuale in ogni punto (H, ϱ, z) *di* $T+\mathrm{F}T$ *e rappresenta in* $T+\mathrm{F}T$ *una funzione* $u(H, \varrho, z)$ *continua, poichè le due serie doppie, suoi addendi, sono entrambe assolutamente convergenti in* $T+\mathrm{F}T$, *nel senso delle serie doppie, e sono uniformemente convergenti in ogni dominio limitato di* $T+\mathrm{F}T$.

La $u(H, \varrho, z)$ *continua in* $T+\mathrm{F}T$ *ha tale comportamento da soddisfare la relazione*

$$\lim_{\varrho\to\infty}\frac{u(H,\varrho,z)}{e^{\sqrt{\lambda_0}\varrho}}\,\varrho=0\,,$$

uniformemente rispetto agli z *di* $(0, a)$, *relazione relativa al trovato teorema di unicità per il generale problema al contorno in esame.*

Esistono inoltre le $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$ *continue in* $T-\mathrm{F}T$ *e la* $\partial u/\partial z$ *continua in* $T+\mathrm{F}T$ (*come la* u) *e le* u, $\partial u/\partial z$ *soddisfano le due imposte equazioni al contorno* $\mathrm{F}T$, *dello strato* T,

$$(12)\qquad \begin{aligned}\alpha_0 u(H,\varrho,0)+\beta_0\left(\frac{\partial u(H,\varrho,z)}{\partial z}\right)_{z=0}&=\gamma_0(H,\varrho)\,,\\ \alpha u\,(H,\varrho,a)+\beta\left(\frac{\partial u(H,\varrho,z)}{\partial z}\right)_{z=a}&=\gamma_a(H,\varrho)\,,\end{aligned}$$

oltre la precedente all'∞ *assicurante l'unicità della soluzione del problema al contorno.*

Esistono infine le $\partial^2u/\partial x^2$, $\partial^2u/\partial y^2$, $\partial^2u/\partial z^2$ *continue in* $T-\mathrm{F}T$, *dove è*

$$\Delta_2 u(H,\varrho,z)=f(H,\varrho,z)\,.$$

La $u(H, \varrho, z)$ *espressa da* (11) *costituisce dunque, sotto le condizioni assai generali imposte alle* γ_0, γ_a, f *e riportate in questo* n., *l'unica ed effettiva soluzione per il problema al contorno, dello strato* T (indicato al n. 1 della Parte I e brevemente riassunto nell'enunciato di questo teorema).