VITTORIO E. BONONCINI (*)

Su una estensione del campo di esistenza di una funzione continua in un insieme chiuso. (**)

1. – Il LEBESGUE (1) ha, per primo, dimostrato il seguente teorema:

« Data la funzione reale $f(P)$, $P \in C$, definita e continua in un insieme chiuso C contenuto in un intervallo S dello spazio euclideo E, esiste una funzione $F(P)$, $P \in S$, continua in S, coincidente con $f(P)$ in C. »

Questo teorema, che è di notevole interesse in Topologia e in Analisi, è stato poi successivamente esteso in varie guise a insiemi continui qualsiansi, a spazi metrici e a spazi perfino non metrici e anche al caso in cui $f(P)$ è un vettore funzione di P.

E. J. McSHANE (2) usando per la costruzione della $F(P)$ un procedimento indicato da H. WITNEY (3) ha notevolmente esteso il precedente teorema e lo ha precisato, mostrando tra l'altro che se $\omega(t)$ è una funzione concava verso il basso per $t \geqslant 0$, infinitesima per $t \to 0$ e tale che $|f(P) - f(P')| \leqslant \omega(\overline{PP'})$ per ogni coppia di punti P, P' di C, allora la funzione $F(P)$ [costruita con il procedimento di H. WITNEY] soddisfa alla relazione $|F(P) - F(P')| \leqslant \omega(\overline{PP'})$ per ogni coppia di punti P, P' di S. Come immediata conseguenza si ha che se $f(P)$ è lipschitziana in C, la $F(P)$ è lipschitziana in S. Tali risultati di E. J. McSHANE valgono anche se S è un qualunque spazio metrico.

2. – In talune applicazioni è utile avere precise informazioni sull'andamento delle $F(P)$ nell'insieme aperto $S - C$, e precisamente può interessare

(*) Indirizzo: Istituto Matematico S. PINCHERLE, Università, Bologna (Italia).

(**) Ricevuto il 20-IV-1951.

(1) H. LEBESGUE, *Sur le problème de Dirichlet.* Rend. Cir. Mat. Palermo **24**, 371-402 (1907).

(2) E. J. McSHANE, *Extension of range of functions.* Bull. Amer. Math. Soc. **40**, 837-842 (1934).

(3) E. WITNEY, *Analytic extension of differentialle functions defined in closed sets.* Trans. Amer. Math. Soc. **36**, 63-89 (1934).

il sapere che la $F(P)$ è *quasi lineare* in $S - C$, cioè esiste una conveniente suddivisione di $S - C$ in triangoli, generalmente in numero infinito, densi soltanto in C, in ciascuno dei quali $F(P)$ è lineare. Nè la funzione $F(P)$ indicata da LEBESGUE, nè quella indicata da McSHANE godono di tali proprietà.

Se supponiamo $f(P)$ lipschitziana in C, allora la funzione indicata da McSHANE è, come si è detto, lipschitziana in S, mentre quella indicata da LEBESGUE non è necessariamente lipschitziana in S (n. 7).

Nella presente Nota indico *due procedimenti* per costruire una funzione $F(P)$, $P \in S$, coincidente con la funzione $f(P)$ lipschitziana in C, quasi lineare in $S - C$, lipschitziana in S. Un *primo procedimento* è una modificazione della costruzione di LEBESGUE tale che $F(P)$ risulti lineare in $S - C$, e si riesce a dimostrare che la $F(P)$ è lipschitziana in S (nn. 3, 4, 5, 6). Un *secondo procedimento* consiste nel costruire prima la funzione $F(P)$ indicata da McSHANE, nell'eseguire una conveniente suddivisione di $S - C$ in triangoli e nell'interpolare linearmente in ogni triangolo tra i valori che $F(P)$ ha nei vertici di questi (n. 8).

Per semplicità mi riferisco a funzioni di due variabili indipendenti.

3. – Una modificazione della costruzione di Lebesgue.

Sia $f(P) = f(x, y)$ una funzione reale delle due variabili reali x, y definita e continua nell'insieme chiuso C contenuto nel quadrato S del piano euclideo, E_2, riferito ad un sistema cartesiano ortogonale Oxy; possiamo supporre S di lato unitario e a lati paralleli agli assi coordinati x, y.

Mediante rette parallele agli assi x, y dividiamo S in quattro quadrati uguali di lato $1/2$; ancora mediante rette parallele agli assi dividiamo ciascuno di questi quattro quadrati in quattro quadrati uguali di lato $1/2^2$; dividiamo poi, analogamente, ciascuno dei nuovi quadrati in quattro quadrati uguali e così proseguiamo indefinitamente. Otteniamo in tal modo delle divisioni D_1, D_2, D_3, ... di S in quadrati di lati 1, $1/2$, $1/2^2$, ...

Fissato comunque un criterio di ordinamento dei quadrati di ciascuna divisione, indichiamo con q_{21}, q_{22}, q_{23}, ..., q_{2s_2} i quadrati della divisione D_2 ai quali non appartiene alcun punto di C, neppure come punto del contorno. Siano, analogamente, q_{31}, q_{32}, q_{33}, ..., q_{3s_3} i quadrati della divisione D_3 non contenuti in alcuni dei quadrati della divisione D_2 e ai quali non appartiene alcun punto di C, neppure come punto del contorno, e così via. In tal modo ogni punto del quadrato S che non appartenga a C appartiene sicuramente ad almeno uno dei quadrati q_{rs}, $(r \geqslant 2)$ e nessuno di questi quadrati contiene punti di C.

In ciascun vertice di q_{rs} definiamo la funzione $F(P) = F(x, y)$ ponendola uguale al minimo dei valori che la funzione $f(P)$ assume nei punti di C che si trovano alla minima distanza dal vertice stesso. Considerato un quadrato generico q_{rs} si ha intanto che la funzione $F(P)$ è definita in un numero finito di punti della frontiera, q^*_{rs}, di q_{rs}, e precisamente nei vertici di q_{rs} e in quegli altri punti che risultano vertici di altri quadrati $q_{r's'}$ con $r' > r$, punti, questi ultimi, che sono in numero finito. Invero denotata con δ la minima distanza di q^*_{rs} dai punti di C e indicato con r_1 il più piccolo numero intero e positivo tale che $1/2^{r_1} < \delta/\sqrt{2}$, si ha che tutti i quadrati della divisione D_{r_1} aventi almeno un punto in comune con q_{rs} sono completamente contenuti in $S - C$ e pertanto sono quadrati $q_{r_1 s}$ o appartengono a quadrati $q_{\mu s}$ con $\mu < r_1$. Poichè questi quadrati della divisione D_{r_1} sono in numero finito rimane provato l'asserto.

La funzione $F(P)$ è già definita nei punti P_i, $(i = 1, 2, ..., N)$, di q^*_{rs}. Supponiamo i punti P_i ordinati su q^*_{rs} in un dato verso, ad esempio in quello antiorario. Definiamo ora la funzione $F(P)$ su tutto q_{rs}, stabilendo che il suo valore nel centro P_0 di q_{rs} sia uguale alla media aritmetica degli N valori che essa ha nei punti P_i, porremmo cioè $F(P_0) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} F(P_i)$, e stabilendo inoltre che la $F(P)$ vari linearmente in ciascun triangolo $T_i \equiv P_0 P_i P_{i+1}$, $(i = 1, 2, ..., N)$, $P_{N+1} \equiv P_1$, tra i valori che essa ha nei tre vertici (la rappresentazione, grafica della funzione $z = F(P)$ in corrispondenza del quadrato q_{rs} è una superficie poliedrica continua a facce triangolari). La funzione $F(P)$ è così definita in tutto q_{rs}. Porremo inoltre $F(P) = f(P)$ in C. La funzione $F(P)$ risulta così definita in tutto S.

La continuità della funzione $F(P)$ in S può essere provata esattamente con lo stesso ragionamento usato da LEBESGUE (4).

4. - Sia $\omega(t)$, $t > 0$, una funzione continua non decrescente, concava verso il basso, infinitesima per $t \to 0$ e supponiamo che $f(P)$, $P \in C$, verifichi la relazione $|f(P) - f(P')| \leqslant \omega(\overline{PP'})$ per ogni coppia di punti P, P' di C. In questo numero dimostrerò che $F(P)$ verifica una analoga relazione in S. Allo scopo mi varrò delle due seguenti proprietà della funzione $\omega(t)$:

a) $\qquad 0 < \omega(t) \leqslant \omega(t')$ per ogni $0 < t < t'$,

b) $\qquad \omega(at) \leqslant a\omega(t)$ per ogni $t > 0$, $a \geqslant 1$.

Sia P_i, $(i = 1, 2, ..., N)$, uno dei punti considerati più sopra, di q^*_{rs}. Il

---

(4) Cfr. loc. cit. in (1). Vedasi anche: L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, Vol. I, Zanichelli, Bologna 1921; cfr. pag. 383.

punto P_i appartiene oltre che a q_{rs}, ad altri quadrati (ad altri tre se P_i è un vertice di q_{rs}, ad altri due se P_i non è un vertice) e pertanto P_i appartiene ad un quadrato $q_{r's'}$, con r' massimo ($r' \geqslant r$), cioè di lato minimo $1/2^{r'-1}$. Tale quadrato è contenuto in un quadrato $p_{r'-1,s}$ della divisione $D_{r'-1}$ di lato $1/2^{r'-2}$, che non è un quadrato $q_{r'-1,s}$ (e questo per la definizione stessa dei quadrati q_{rs}) e inoltre $p_{r'-1,s}$ non può essere contenuto in qualunque altro quadrato q_{rs} di lato maggiore. Segue che il quadrato $p_{r'-1,s}$ deve contenere almeno un punto Q_i di C, così che $\overline{Q_iP_i} \leqslant \sqrt{2}/2^{r'-2}$. Pertanto $F(P_i) = f(Q_i)$, ove Q_i è un punto di C con $\overline{Q_iP_i} \leqslant \sqrt{2}/2^{r'-2}$, $r' \geqslant r$, $P_i \in q^*_{r's'}$.

Se P_i, P_j sono due qualunque degli N punti considerati avanti di q^*_{rs}, allora $P_i \in q^*_{r's'}$, $P_j \in q^*_{r''s''}$, $r' \geqslant r$, $r'' \geqslant r$ (r', r'' massimi) ed esistono due punti Q_i, Q_j di C tali che $F(P_i) = f(Q_i)$, $F(P_i) = F(Q_j)$ con $\overline{P_iQ_i} \leqslant \sqrt{2}/2^{r'-2}$, $\overline{P_jQ_j} \leqslant \sqrt{2}/2^{r''-2}$. Dal quadrangolo $Q_iQ_jP_iP_j$ si trae $\overline{Q_iQ_j} \leqslant \overline{P_iP_j} + \overline{P_iQ_i} + \overline{P_jQ_j}$ e inoltre si ha $\overline{P_iP_j} \leqslant \sqrt{2}/2^{r-1}$ (il segno uguale sussiste se P_i, P_j sono vertici opposti di q_{rs}). Pertanto

$$|F(P_i) - F(P_j)| = |f(Q_i) - f(Q_j)| \leqslant \omega(\overline{Q_iQ_j}) \leqslant \omega(\overline{P_iP_j} + \overline{P_iQ_i} + \overline{P_jQ_j}).$$

Se $\overline{P_iP_j} > 1/2^{r-1}$ allora

$$\begin{aligned} |F(P_i) - F(P_j)| &\leqslant \omega(\sqrt{2}/2^{r-1} + \sqrt{2}/2^{r'-2} + \sqrt{2}/2^{r''-2}) = \\ &= \omega(\sqrt{2}/2^{r-1} + 2\sqrt{2}/2^{r'-1} + 2\sqrt{2}/2^{r''-1}) \leqslant \omega(\sqrt{2}/2^{r-1} + 2\sqrt{2}/2^{r-1} + 2\sqrt{2}/2^{r-1}) \leqslant \\ &\leqslant 5\sqrt{2}\,\omega(1/2^{r-1}) \leqslant 5\sqrt{2}\,\omega(\overline{P_iP_j}). \end{aligned}$$

Se $\overline{P_iP_j} \leqslant 1/2^{r-1}$ (in tale ipotesi P_i, P_j si trovano su uno stesso lato di q_{rs}) allora, avendosi $\overline{P_iP_j} \geqslant 1/2^{r'-1}$, $\overline{P_iP_j} \geqslant 1/2^{r''-1}$, risulta

$$\begin{aligned} |F(P_i) - F(P_j)| &\leqslant \omega(\overline{P_iP_j} + \sqrt{2}/2^{r'-1} + \sqrt{2}/2^{r''-2}) \leqslant \\ &\leqslant \omega(\overline{P_iP_j} + 2\sqrt{2}\ \overline{P_iP_j} + 2\sqrt{2}\ \overline{P_iP_j}) \leqslant 5\sqrt{2}\,\omega(\overline{P_iP_j}). \end{aligned}$$

In ogni caso:

$$|F(P_i) - F(P_j)| \leqslant 5\sqrt{2}\,\omega(\overline{P_iP_j}), \qquad (i, j = 1, 2, 3, \ldots, N).$$

Abbiamo già indicato con P_0 il centro di q_{rs} e si è posto $F(P_0) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} F(P_i)$. Segue che per ogni h, ($h = 1, 2, 3, \ldots, N$),

$$\begin{aligned} |F(P_0) - F(P_h)| &= \left| \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} F(P_i) - F(P_h) \right| = \frac{1}{N}\left| \sum_{i=1}^{N} \{F(P_i) - F(P_h)\} \right| \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} 5\sqrt{2}\omega(\overline{P_iP_h}) \leqslant 5\sqrt{2}\,\omega(\sqrt{2}/2^{r-1}) \leqslant 20\,\omega(1/2^r) \leqslant 20\,\omega(\overline{P_0P_h}). \end{aligned}$$

Concludendo

$$|F(P_0) - F(P_h)| \leqslant 20\omega(\overline{P_0P_h}), \qquad (h = 1, 2, 3, \dots, N).$$

5. - Sia $T_i \equiv P_0P_iP_{i+1}$, $(i = 1, 2, 3, \dots, N)$, $P_{N+1} \equiv P_1$, uno qualunque dei triangoli in cui è diviso q_{rs} dai segmenti P_0P_1, P_0P_2, ..., P_0P_N e siano P, P' due punti qualunque di T_i. Sia P quello dei due punti P, P' che è più vicino alla retta P_0P_i e, nel caso che siano alla stessa distanza, sia P quello dei due suddetti punti che è più vicino a P_0. Per P conduciamo la parallela alla retta P_0P_i e per P' la parallela alla retta P_iP_{i+1} e sia Q il punto comune a queste due ultime rette. Il triangolo PQP' è completamente contenuto in T_i e $\overline{PQ} \leqslant \overline{P_0P_i}$, $\overline{QP'} \leqslant \overline{P_iP_{i+1}}$. Per essere $F(P)$ lineare in T_i, risulta

$$\frac{|F(P) - F(Q)|}{\overline{PQ}} = \frac{|F(P_0) - F(P_i)|}{\overline{P_0P_i}},$$

ossia

$$|F(P) - F(Q)| = \frac{\overline{PQ}}{\overline{P_0P_i}}|F(P_0) - F(P_i))| \leqslant 20\omega(\overline{P_0P_i})\frac{\overline{PQ}}{\overline{P_0P_i}} =$$

$$= 20\omega\left(\frac{\overline{P_0P_i}}{\overline{PQ}}\cdot\overline{PQ}\right)\frac{\overline{PQ}}{\overline{P_0P_i}} \leqslant 20\omega(\overline{PQ}).$$

Analogamente

$$|F(P') - F(Q)| = \frac{\overline{P'Q}}{\overline{P_iP_{i+1}}}|F(P_i) - F(P_{i+1})| \leqslant 5\sqrt{2}\,\omega(\overline{P_iP_{i+1}})\frac{\overline{P'Q}}{\overline{P_iP_{i+1}}} =$$

$$= 5\sqrt{2}\,\omega\left(\frac{\overline{P_iP_{i+1}}}{\overline{P'Q}}\cdot\overline{P'Q}\right)\frac{\overline{P'Q}}{\overline{P_iP_{i+1}}} \leqslant 5\sqrt{2}\,\omega(\overline{P'Q}).$$

Sia M la proiezione ortogonale di P sulla retta QP', H il punto del segmento PP' tale che $H\widehat{Q}P' = \pi/4$ e K la proiezione ortogonale di H sulla retta QP'. Si ha intanto $\overline{PQ} \leqslant \sqrt{2}\,\overline{PM} \leqslant \sqrt{2}\,\overline{PP'}$. Si osservi ora che se i punti M, Q, P', si seguono in questo ordine, allora $\overline{QP'} \leqslant \overline{MP'} \leqslant \overline{PP'}$; se si seguono nell'ordine Q, M, P' allora K è tra M e P' e $\overline{QK} = \overline{KH} \leqslant \overline{MP}$, $\overline{QP'} = \overline{QM} + \overline{MP'} \leqslant \leqslant \overline{QK} + \overline{MP'} \leqslant \overline{MP} + \overline{MP'} \leqslant 2\overline{PP'}$. Infine se gli stessi punti si seguono nell'ordine Q, P', M allora K si trova ancora tra M e P' e inoltre $\overline{QK} = \overline{KH} \leqslant \overline{MP}$, $\overline{QP'} \leqslant \overline{QK} \leqslant \overline{MP} \leqslant \overline{PP'}$. In ogni caso

$$\overline{PQ} \leqslant \sqrt{2}\,\overline{PP'}, \qquad \overline{QP'} \leqslant 2\overline{PP'},$$

e pertanto

$$|F(P)-F(P')|\leqslant|F(P)-F(Q)|+|F(Q)-F(P')|\leqslant 20\omega(\overline{PQ})+5\sqrt{2}\,\omega(\overline{P'Q})\leqslant$$
$$\leqslant 20\omega(\sqrt{2}\,\overline{PP'})+5\sqrt{2}\,\omega(2\overline{PP'})\leqslant 5\sqrt{2}\,(4+2)\omega(\overline{PP'})<45\omega(\overline{PP'}),$$

per ogni coppia di punti P, P' di T_i.

6. - Siano ora P, P', due punti qualsiansi del quadrato q_{rs} appartenenti a triangoli diversi: P appartenga al triangolo $T_i\equiv P_0P_iP_{i+1}$ e P' al triangolo $T_j\equiv P_0P_jP_{j+1}$. Supponiamo che sia $i<j$ e che P_i, P_{j+1} appartengano a uno stesso lato di q_{rs} e per fissare le idee sia P' quello dei due punti P e P' che è più vicino alla retta P_iP_{j+1}; sia poi PQP' il triangolo ottenuto conducendo il segmento P_0PQ e la parallela QP' per P' al lato P_iP_{j+1}.

Con ragionamento analogo a quello tenuto nel n. 5 si trova $\overline{PQ}\leqslant\sqrt{2}\,\overline{PP'}$, $\overline{P'Q}\leqslant 2\overline{PP'}$ e, se U_s, $(s=i+1,\ i+2,\dots,\ j)$, è il punto intersezione di P_0P_s con QP', allora $\overline{QP'}=\overline{QU}_{i+1}+\overline{U_{i+1}U}_{i+2}+\dots+\overline{U_jP'}$, $|F(P)-F(Q)|<45\omega(\overline{PQ})$, $|F(Q)-F(U_{i+1})|\leqslant 5\sqrt{2}\,(\overline{QU}_{i+1})$, $|F(U_s)-F(U_{s+1})|\leqslant 5\sqrt{2}\,\omega(\overline{U_sU}_{s+1})$; $|F(U_j)-F(P')|\leqslant 5\sqrt{2}\,\omega(\overline{U_jP'})$, $(s=i+1,\ i+2,\dots,\ j-1)$. Se $j=i+1$, allora $|F(Q)-F(P')|\leqslant|F(Q)-F(U_{i+1})|+|F(U_j)-F(P')|\leqslant 5\sqrt{2}\,\omega(\overline{QU}_{i+1})+5\sqrt{2}\,\omega(\overline{U_jP'})\leqslant 5\sqrt{2}\,\omega(\overline{QP'})+5\sqrt{2}\,\omega(\overline{QP'})=10\sqrt{2}\,\omega(\overline{QP'})$. Analogamente se $j=i+2$ si trova: $|F(Q)-F(P')|\leqslant 15\sqrt{2}\omega(\overline{QP'})$. Se $j>i+2$, occorre considerare il triangolo $T'\equiv P_0P_{i+1}P_j$ ed osservare che $F(P)$ è lineare sui due segmenti P_0P_{i+1}, P_0P_j. Definiamo una funzione ausiliare $\varphi(P)$, $P\in T'$, lineare in T', coincidente con $F(P)$ in P_0, P_{i+1}, P_j. Segue che la $\varphi(P)$ coincide con la funzione $F(P)$ in P_0P_{i+1} e in P_0P_j; ragionando come in precedenza si trova

$$|F(U_{i+1})-F(U_j)|=|\varphi(U_{i+1})-\varphi(U_j)|\leqslant 5\sqrt{2}\,\omega(\overline{U_{i+1}U_j}).$$

Pertanto

$$|F(Q)-F(P')|\leqslant|F(Q)-F(U_{i+1})|+|F(U_{i+1})-F(U_j)|+|F(U_j)-F(P')|\leqslant$$
$$\leqslant 5\sqrt{2}\,\omega(\overline{QU}_{i+1})+5\sqrt{2}(\overline{U_{i+1}U_j})+5\sqrt{2}\,\omega(\overline{U_jP'})\leqslant 15\sqrt{2}\,\omega(\overline{QP'}).$$

Dunque in tutti i casi

$$|F(P)-F(Q)|<45\omega(\overline{PQ}),\qquad |F(Q)-F(P')|\leqslant 15\sqrt{2}\,\omega(\overline{QP'}).$$

Segue

$$|F(P)-F(P')|\leqslant|F(P)-F(Q)|+|F(Q)-F(P')|<$$
$$<45\omega(\overline{PQ})+15\sqrt{2}\,\omega(\overline{QP'})\leqslant 45\omega(\sqrt{2}\,\overline{PP'})+15\sqrt{2}\,\omega(2\overline{PP'})\leqslant$$
$$\leqslant(45\sqrt{2}+30\sqrt{2})\omega(\overline{PP'})<107\omega(\overline{PP'}).$$

Se i punti P, P' non si trovano nelle condizioni suddette, esiste certamente sul segmento PP' un punto P'' tale che i punti P, P'' e così pure i punti P', P'' si trovano in condizioni analoghe dei punti P, P' di cui sopra. Pertanto

$$|F(P)-F(P')|\leqslant|F(P)-F(P'')|+|F(P'')-F(P')|<$$
$$<107\omega(\overline{PP''})+107\omega(\overline{P''P'})\leqslant 107\omega(\overline{PP'})+107\omega(\overline{PP'})=214\omega(\overline{PP'})\,.$$

Siano ora P, P' due punti qualunque di $S-C$, ma appartenenti ad una retta parallela all'asse x (o all'asse y). Il segmento PP' appartiene allora ad un certo numero finito od infinito di quadrati (e può contenere altresì punti di C). Se PP' appartiene al più a tre quadrati, allora esso non contiene punti di C e con ragionamento analogo ai precedenti si trova: $|F(P)-F(P')|<$ $<3\times 214\omega(\overline{PP'})$. Se il numero dei quadrati a cui appartiene PP' è maggiore di tre, indichiamo con P_1, P_2 i due punti del segmento PP' più vicini a P e P' e appartenenti alle rette di divisione. Allora se $P_1\in q^*_{rs}$, $P_2\in q^*_{r's'}$, con r, r' massimi, sarà certamente $\overline{P_1P_2}>1/2^{r-1}$, $\overline{P_1P_2}>1/2^{r'-1}$ ed esistono certi punti Q_1, Q_2 di C, $P'_1\in q^*_{rs}$, $P'_2\in q^*_{r's'}$ tali che

$$F(P'_1)=f(Q_1)\,,\qquad F(P'_2)=f(Q_2)\,,$$
$$\overline{Q_1P'_1}\leqslant\sqrt{2}/2^{r-2},\qquad \overline{Q_2P'_2}\leqslant\sqrt{2}/2^{r'-2},\qquad \overline{P_1P'_1}\leqslant\sqrt{2}/2^{r}\,,\qquad \overline{P_2P'_2}\leqslant\sqrt{2}/2^{r'},$$

e perciò

$$|F(P)-F(P_1)|<214\omega(\overline{PP_1})\leqslant 214\omega(\overline{PP'})\,,$$
$$|F(P_1)-F(P'_1)|<214\omega(\overline{P_1P'_1})\leqslant 214\omega(\sqrt{2}/2^{r})\leqslant 214\omega(1/2^{r-1})\leqslant$$
$$\leqslant 214\omega(\overline{P_1P_2})\leqslant 214\omega(\overline{PP'})\,,$$

e analogamente

$$|F(P')-F(P_2)|<214\omega(\overline{PP'}),\qquad |F(P_2)-F(P'_2)|<214\omega(\overline{PP'}).$$

Combinando tali relazioni si ha

$$|F(P)-F(P')|\leqslant|F(P)-F(P_1)|+|F(P_1)-F(P'_1)|+|F(P'_1)-F(P'_2)|+$$
$$+|F(P'_2)-F(P_2)|+|F(P_2)-F(P')|<4\times 214\omega(\overline{PP'})+|f(Q_1)-f(Q_2)|,$$

e ricordando che $|f(Q_1)-f(Q_2)|\leqslant\omega(\overline{Q_1Q_2})$ si può scrivere

$$|F(P)-F(P')<856\omega(\overline{PP'})+\omega(\overline{Q_1Q_2})\leqslant$$
$$\leqslant 856\omega(\overline{PP'})+\omega(\overline{Q_1P_1}+\overline{P_1P_2}+\overline{P_2Q_2})\leqslant$$
$$\leqslant 856\omega(\overline{PP'})+\omega(4\sqrt{2}/2^{r-2}+\overline{P_1P_2})<$$
$$<856\omega(\overline{PP'})+(8\sqrt{2}+1)\omega(\overline{PP'})\,,$$

e in definitiva

$$|F(P) - F(P')| < 869\omega(\overline{PP'}) .$$

Tale ragionanento vale, con semplici modificazioni, anche se dei due punti, P, P' uno è in $S - C$ e l'altro è in C.

Supponiamo ora che i due punti P, P' siano punti qualunque di S. Considerato il punto Q di S tale che i segmenti PQ, QP' risultino paralleli rispettivamente agli assi x e y, si ha

$$|F(P) - F(P')| \leqslant |F(P) - F(Q)| + |F(Q) - F(P')| <$$
$$< 869\omega(\overline{PQ}) + 869\omega(\overline{QP'}) \leqslant 869\omega(\overline{PP'}) + 869\omega(\overline{PP'}) = 1738\omega(\overline{PP'}).$$

Concludendo:

Se $\omega(t)$, $t > 0$, è non decrescente, concava verso il basso e $\lim_{t \to +0} \omega(t) = 0$, se $f(P)$, $P \in C$, verifica la relazione $|f(P) - f(P')| \leqslant \omega(\overline{PP'})$ per ogni coppia di punti P, P' di C, allora esiste una funzione $F(P)$, $P \in S$ coincidente con $f(P)$ in C, quasi lineare in $S - C$ e tale che $|F(P) - F(P')| < 1738\omega(\overline{PP'})$ per ogni coppia di punti P, P' di S.

In particolare se $f(P)$ è lipschitziana in C, anche $F(P)$ è lipschitziana in S.

7. – Il procedimento originale di Lebesgue.

La costruzione originale di LEBESGUE [5] differisce da quella del n. 3 per il fatto che anzichè eseguire la suddivisione di ogni q_{rs} in triangoli T_i si procede come segue. Si definisce anzitutto la $F(P)$ nel contorno di q_{rs} in modo che essa vari linearmente tra i punti P_i in cui essa è già definita e, per quelli fra questi punti che si trovano sui lati del quadrato q_{rs} paralleli all'asse y, si conducono le parallele all'asse delle x; sui segmenti di queste parallele compresi nel quadrato, si definisce la $F(P)$ facendola variare linearmente. In tal modo q_{rs} risulta diviso in un numero finito di rettangoli R e, sul contorno di ciascuno di questi rettangoli si ha già il valore della $F(P)$; facendo ora variare linearmente la $F(P)$ rispetto alla y nell'interno di tutti i rettangoli si ha la $F(P)$ definita in tutto il quadrato q_{rs}.

Se $R \equiv [0, \gamma; 1, \delta]$ è uno qualunque dei rettangoli considerati di vertici opposti $(0, \gamma)$, $(1, \delta)$ e $r \equiv [\alpha, \gamma; \beta, \delta]$ è un rettangolo parziale di R tale che $F(P)$ vari linearmente su ciascuno dei segmenti $[\alpha \leqslant x \leqslant \beta,\ y = \gamma]$,

---

[5] Cfr. loc. cit. in [1] e [4].

$[\alpha \leqslant x \leqslant \beta,\ y = \delta]$, se $F(x, \gamma) = Ax + B$, $F(x, \delta) = Cx + D$, allora $F(x, y) = Ax + B + [(C - A)x + (D - B)](y - \gamma)/(\delta - \gamma)$ e perciò $F(P)$ è bilineare e non lineare in ciascuno dei rettangoli r di R.

Nelle righe seguenti dò un esempio di funzione $f(P)$, $P \in C$, lipschitziana nell'insieme chiuso $C \subset S$, tale che la funzione $F(P)$, $P \in S$, definita con il procedimento originale di LEBESGUE ora ricordato riesce non lipschitziana.

Sia $\Gamma_n = A_n B_n C_n D_n$ il contorno del quadrato, a lati paralleli agli assi x e y, di centro $P_n(x_n, y_n)$, $x_n = y_n = 5 \cdot 2^{-2n-1}$, e lato $2l_n = 2^{-2n} + 3 \cdot 2^{-4n}$, e di vertici $A_n \equiv (x_n - l_n,\ y_n - l_n)$, $B_n \equiv (x_n + l_n,\ y_n - l_n)$, $C_n \equiv (x_n + l_n,\ y_n + l_n)$, $D_n \equiv (x_n - l_n,\ y_n + l_n)$, $(n = 1, 2, \ldots,)$. Siano M_n, N_n punti di Γ_n di coordinate rispettivamente x_n, $y_n - l_n$; x_n, $y_n + l_n$, $(n = 1, 2, \ldots)$. Sia P_0 il punto di coordinate $x = y = 0$ e C l'insieme chiuso: $C = P_0 + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \ldots$. Sia $f(P)$, $P \in C$, la funzione così definita: $f(P_0) = 0$, $f(P) = \lambda_n = 2^{-2n}$ in tutti i punti del segmento $B_n C_n$ di Γ_n; $f(P) = 0$ in tutti i punti dei segmenti $M_n A_n$, $A_n D_n$, $D_n N_n$ di Γ_n; $f(P)$ vari linearmente sui segmenti $M_n B_n$, $N_n C_n$ di Γ_n tra i valori che essa ha negli estremi.

Poniamo $\varrho = |f(P) - f(P')| : \overline{PP'}$; $P \neq P'$; $P,\ P' \in C$. Se $P,\ P' \in \Gamma_n$ allora $\varrho \leqslant \lambda_n : l_n = 2^{-2n}(2^{-2n-1} + 3 \cdot 2^{-4n-1})^{-1} < 2^{-2n} \cdot 2^{2n+1} = 2$; se $P \equiv P_0$, $P' \in \Gamma_n$, allora $\varrho \leqslant \lambda_n : \overline{P_0 A_n} = 2^{-2n} \cdot 2^{-1/2}(5 \cdot 2^{-2n-1} - 2^{-2n-1} - 3 \cdot 2^{-4n-1})^{-1} < 2^{-2n} \cdot 2^{-1/2}(3 \cdot 2^{-2n-1})^{-1} = 2^{1/2} \cdot 3^{-1} < 2$; se $P \in \Gamma_n$, $P' \in \Gamma_{n+s}$, $s \geqslant 1$, allora $\varrho \leqslant \lambda_n : \overline{A_n C_{n+s}} = 2^{-2n} \cdot 2^{-1/2} \cdot (5 \cdot 2^{-2n-1} - 2^{-2n-1} - 3 \cdot 2^{-4n-1} - 5 \cdot 2^{-2n-2s-1} - 2^{-2n-2s-1} - 3 \cdot 2^{-4n-4s-1})^{-1} < 2^{-2n} \cdot 2^{-1/2}(3 \cdot 2^{-2n-1})^{-1} = 2^{1/2} \cdot 3^{-1} < 2$. Pertanto risulta $\varrho < 2$, ossia $|f(P) - f(P')| < 2\overline{PP'}$ per ogni coppia di punti P, P' di C.

Diciamo Q_n il quadrato concentrico a Γ_n di lato $2l'_n = 2^{-2n}$ e Q_{nt}, $(t = 1, 2, 3, \ldots, t_n)$, $t_n = 2^{2n+2} + 2^2$ i t_n quadrati adiacenti a Q_n, di lato $l''_n = 2^{-4n}$, formanti una corona attorno a Q_n. Tutti i quadrati Q_n, Q_{nt} $(t = 1, 2, 3, \ldots, t_n;\ n = 1, 2, 3, \ldots)$, sono quadrati della precedente costruzione e la funzione $F(P)$ risulta definita in tutti i vertici di essi. In particolare la $F(P)$ è definita nei punti seguenti con i valori a fianco indicati: $F(x_n,\ y_n + l'_n) = F(x_n - l'_n,\ y_n + l'_n) = F(x_n - l'_n,\ y_n + l'_n - l''_n) = 0$, $F(x_n + l'_n,\ y_n + l'_n) = F(x_n + l'_n,\ y_n + l'_n - l''_n) = \lambda_n = 2^{-2n}$. Perciò definendo $F(P)$ linearmente sul segmento $[x_n - l'_n \leqslant x \leqslant x_n + l'_n,\ \ y = y_n + l'_n - l''_n]$, risulta $F(x_n,\ y_n + l'_n - l''_n) = 2^{-2n-1}$ e infine $[F(x_n,\ y_n + l_n - l''_n) - F(x_n,\ y_n + l_n)] : l''_n = 2^{-2n-1} \cdot 2^{4n} = 2^{2n-1} \to +\infty$ quando $n \to \infty$.

Ciò assicura che $F(P)$ non è lipschitziana in S.

8. - Interpolazione lineare sulla funzione $F(P)$ di McShane.

Sia $f(P)$, $P \in C$, una funzione soddisfacente alla relazione $|f(P) - f(P')| \leqslant \omega(\overline{PP'})$ per ogni coppia di punti P, $P' \in C$, e sia $F(P)$, $P \in S$, la funzione costruita da MCSHANE (n. 1), allora $F(P) = f(P)$ per ogni $P \in C$ e $|F(P) - F(P')| \leqslant \omega(\overline{PP'})$ per ogni coppia di punti P, P' di S.

Sia $\{q_{rs}\}$ la famiglia di tutti i quadrati $q_{rs} \subset S - C$ costruiti nel n. 3 e per ogni q_{rs} sia $\{T_i\}$ la famiglia dei triangoli, in numero finito, in cui abbiamo diviso q_{rs} nel n. 3. Poniamo $F_0(P) = F(P) = f(P)$ per ogni punto $P \in C$ e $F_0(P) = F(P)$ per ogni punto P vertice di triangoli $T_i \in \{T_i\}$, $T_i \in q_{rs}$, $q_{rs} \in \{q_{rs}\}$. Sia q_{rs} uno qualunque dei quadrati considerati, P_0 il centro di q_{rs} e P_i, $(i = 1, 2, 3, \ldots, N)$, i vertici dei triangoli T_i che sono sul contorno di q_{rs}. Si ha $|F_0(P_i) - F_0(P_j)| = |F(P_i) - F(P_j)| \leqslant \omega(\overline{P_iP_j})$; $|F_0(P_0) - F_0(P_h)| \leqslant \omega(\overline{P_0P_h})$.

Definiamo ora $F_0(P)$ su ogni triangolo T_i stabilendo che $F_0(P)$ vari linearmente su ciascun triangolo T_i. In tal modo $F_0(P)$ è definita in tutto S ed è quasi lineare in $S - C$. I ragionamenti del n. 5 possono essere ripetuti con ovvie modificazioni e si ha successivamente

$$|F_0(P) - F_0(Q)| \leqslant \omega(\overline{PQ}), \qquad |F_0(Q) - F_0(P')| \leqslant \omega(\overline{QP'})$$

e infine

$$|F_0(P) - F_0(P')| \leqslant \omega(\overline{PQ}) + \omega(\overline{QP'}) \leqslant \omega(\sqrt{2}\,\overline{PP'}) + \omega(2\overline{PP'}) \leqslant$$
$$\leqslant (2 + \sqrt{2})\omega(PP') < \frac{7}{2}\,\omega(\overline{PP'}),$$

per ogni coppia di punti P, P' di T_i. Nello stesso modo possono essere ripetutti i ragionamenti del n. 6 e si trova, per ogni coppia di punti P, P' di q_{rs}, o

$$|F_0(P) - F_0(Q)| \leqslant \omega(\overline{PQ}), \qquad |F_0(Q) - F_0(P')| < \frac{7}{2}\,\omega(\overline{QP'}),$$

$$|F_0(P) - F_0(P')| < \omega(\overline{PQ}) + \frac{7}{2}\,\omega(\overline{QP'}) \leqslant \omega(\sqrt{2}\,\overline{PP'}) + \frac{7}{2}\,\omega(2\overline{PP'}) \leqslant$$
$$\leqslant (7 + \sqrt{2})\omega(\overline{PP'}) < 9\omega(\overline{PP'}),$$

oppure

$$|F_0(P) - F_0(P')| < 18\omega(\overline{PP'}).$$

Si ha poi

$$|F_0(P) - F_0(P')| < 72\omega(\overline{PP'}) + (8\sqrt{2} + 1)\omega(\overline{PP'}) < 85\omega(\overline{PP'})$$

per ogni coppia di punti P, $P' \in S - C$, oppure $P \in S - C$, $P' \in C$, con PP' parallelo all'asse x o all'asse y, e in definitiva $|F_0(P) - F_0(P')| < 170\omega(\overline{PP'})$ per ogni coppia di punti P, P' di S. È così dimostrato che se la funzione $f(P)$, $P \in C$, verifica la relazione $|f(P) - f(P')| \leqslant \omega(PP')$ per ogni coppia di punti P, P' di C, allora la funzione $F_0(P)$, $P \in S$, ora costruita coincide con $f(P)$ in C, è quasi lineare in $S - C$ e verifica la relazione $|F_0(P) - F_0(P')| < 170\omega(\overline{PP'})$ per ogni coppia di punti P, P' di S.