VITTORIO CHECCUCCI (*)

Funzioni olomorfe di più matrici e sistemi di equazioni lineari del primo ordine ai differenziali totali. (**)

Di recente più Autori si sono interessati del problema di determinare in termini finiti le soluzioni di un sistema di equazioni lineari ai differenziali totali del primo ordine a coefficienti costanti. Il problema è stato ultimamente risolto da B. PINI (1) nelle condizioni più generali; ma da tutti questi Autori, a me sembra, non è stato posto sistematicamente nell'ambiente che gli è più naturale, quello del simbolismo e del calcolo in matrici. Senza l'uso di un tale algoritmo non solo si perde in semplicità e chiarezza, rendendo così disagevole l'impiego dei risultati ottenuti nelle applicazioni, ma si perde anche la possibilità di quelle generalizzazioni che, pur mantenendo inviariato il metodo di trattazione, ne allargano considerevolmente il campo di applicazione.

Il metodo qui seguito è l'estensione al caso di più variabili di quello impiegato da S. CHERUBINO per la risoluzione dei sistemi di equazioni differenziali lineari (2) e si appoggia al concetto di funzione olomorfa di più matrici, introdotta da detto Autore (3). Esso consente di impostare il problema in modo che l'integrazione del sistema si effettua, formalmente, in modo del tutto analogo al caso di una sola equazione ad una sola variabile (scalare) incognita.

(*) Indirizzo: Istituto Matematico LEONIDA TONELLI, Università, Pisa (Italia).

(**) Ricevuto il 30-VI-1951.

(1) B. PINI, *Sui sistemi di equazioni lineari del primo ordine ai differenziali totali.* Boll. Un. Mat. Ital. (3) **5**, 255-264 (1950).

(2) a) S. CHERUBINO, *Applicazione delle funzioni olomorfe di matrici ai sistemi di equazioni differenziali lineari* (Nota I, Nota II). Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) **25**, 541-547, 686-690 (1937).

b) Idem, *Integrale di Volterra e funzioni olomorfe di matrici.* Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) **7**, 313-328 (1938).

(3) a) S. CHERUBINO, *Funzioni olomorfe di matrici.* Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) **6**, 41-70 (1937).

b) Idem, *Estensione di un lemma di Goursat e funzioni olomorfe di più matrici.* Ann. Mat. Pura Appl. (4) **29**, 293-299 (1949).

1. – Sia $\mathcal{A}$ un'algebra complessa di matrici, che supponiamo contenga la matrice identica I, $\mathcal{C}$ la sottoalgebra *centrale* di $\mathcal{A}$ (cioè costituita da tutte le matrici di $\mathcal{A}$ permutabili con ogni altra di $\mathcal{A}$), pertanto $\mathcal{C}$ contiene tutte le matrici scalari, cioè del tipo ϱI, con ϱ variabile complessa scalare.

Una matrice y di $\mathcal{A}$ funzione olomorfa delle matrici $x_1, x_2, \ldots, x_n$ variabili in certi insiemi $J_1, J_2, \ldots, J_n$ di $\mathcal{C}$ e dotati (rispetto a $\mathcal{C}$) di soli punti interni, è una matrice le cui coordinate (in $\mathcal{A}$) sono funzioni olomorfe delle coordinate di $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (in $\mathcal{C}$). Ricordiamo che le derivate parziali di una funzione olomorfa, così il suo differenziale, appartengono ad $\mathcal{A}$, ed è facile rendersi conto che nel suo campo di olomorfismo la $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ possiede derivate di tutti gli ordini (appartenenti pure ad $\mathcal{A}$) e che vale per queste il teorema di inversione delle derivate successive; in particolare si ha

(1) $$\frac{\partial^2 y}{\partial x_r \partial x_s} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_s \partial x_r}.$$

Appartiene inoltre ad $\mathcal{A}$ ed è olomorfo rispetto ad x ed y l'integrale

(2) $$\int_{x^0}^{x} f(u, y)\, \mathrm{d}u ,$$

l'integrale essendo esteso ad una (qualunque) curva di JORDAN Γ semplice, continua, rettificabile, appartenente a $\mathcal{C}$ e congiungente x^0 ad x. L'integrale (2) non dipende da Γ, e vale la regola di derivazione sotto il segno:

(3) $$\frac{\partial}{\partial y} \int_{x^0}^{x} f(u, y)\, \mathrm{d}u = \int_{x^0}^{x} \frac{\partial f}{\partial y}\, \mathrm{d}u .$$

Una espressione del tipo

(4) $$\sum_1^n {}_r\, A^{(r)}\, \mathrm{d}x_r ,$$

dove le $A^{(r)}$ sono funzioni olomorfe di $x_1, x_2, \ldots, x_n$ che appartengono ad una stessa algebra $\mathcal{A}$, mentre le differenze $\mathrm{d}x_r = x'_r - x_r$, $(r = 1, 2, \ldots, n)$ appartengono, insieme ad x_r ed x'_r, alla centrale $\mathcal{C}$, si dirà *espressione differenziale lineare*. Se per $r = 1, 2, \ldots, n$ è possibile determinare in $\mathcal{C}$ un intorno di x_r^0 [diremo con ciò che si ha un intorno di $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$], nel quale è definita una funzione olomorfa $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ che appartiene ad $\mathcal{A}$ ed ha la (4) come differenziale totale, diremo che la (4) è un *differenziale esatto* nell'intorno di $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Ragionando come per le variabili scalari, si prova facilmente che condizione necessaria e sufficiente perchè la (4) sia un differenziale esatto nell'intorno di $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, è che in detto intorno si abbia

$$\frac{\partial A^{(r)}}{\partial x_s} = \frac{\partial A^{(s)}}{\partial x_r}, \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

e si può prendere y nella forma

$$y = \sum_r \int_{x_r^0}^{x_r} A^{(r)}(x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}, u_r, x_{r+1}^0, \ldots, x_n^0)\, \mathrm{d}u_r\,. \tag{6}$$

La y è dunque funzione olomorfa delle x_r e appartiene ad $\mathcal{A}$; con ovvio significato dei simboli la indicheremo anche come appresso:

$$y = \int_{(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)}^{(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \sum_r A^{(r)}\, \mathrm{d}u_r = \int_{(x_1^0, \ldots, x_n^0)}^{(x_1, \ldots, x_n)} \mathrm{d}y\,. \tag{7}$$

2. – Consideriamo l'equazione in matrici

$$\mathrm{d}z = \Big(\sum_{1}^{n}{}_r\, A^{(r)}\, \mathrm{d}x_r\Big)z \tag{8}$$

dove le $A^{(r)}$ sono funzioni di $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ che appartengono ad una algebra *commutativa* $\mathcal{A}$ dotata di modulo, definite ed olomorfe in un intorno di $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ [4].

Come è noto, se y varia in una algebra commutativa $\mathcal{A}$, la serie

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \ldots \tag{9}$$

definisce una funzione olomorfa della y, che appartiene ad $\mathcal{A}$, e per la quale si ha

$$\mathrm{d}e^y = e^y \cdot \mathrm{d}y = \mathrm{d}y \cdot e^y\,; \tag{10}$$

in essa la y può essere funzione olomorfa di più matrici nella stessa $\mathcal{A}$.

Per la commutatività dell'algebra $\mathcal{A}$, è facile rendersi conto che nella (8) $\sum_{1}^{n}{}_r\, A^{(r)}\, \mathrm{d}x_r$ deve essere un differenziale esatto. Infatti la (8) può scriversi

$$\mathrm{d}z = \sum_{1}^{n}{}_r\, A^{(r)} z \cdot \mathrm{d}x_r \tag{8'}$$

---

[4] Siccome l'algebra $\mathcal{A}$ è commutativa, la centrale $\mathcal{C}$ coincide con $\mathcal{A}$.

e quindi equivale alle

$$\frac{\partial z}{\partial x_r} = A^{(r)} z\,, \qquad (r = 1, 2, \dots, n)\,. \tag{11}$$

Derivando ambo i membri rispetto ad x_s e supponendo, come faremo, che z sia una soluzione non degenere, appartenente ad $\mathcal{A}$, ed olomorfa nelle x_r, si ha, tenendo conto del teorema di inversione delle derivate successive,

$$\frac{\partial A^{(r)}}{\partial x_s} + A^{(r)} A^{(s)} = \frac{\partial A^{(s)}}{\partial x_r} + A^{(s)} A^{(r)}; \tag{12}$$

siccome l'algebra $\mathcal{A}$ è commutativa, e quindi le $A^{(r)}$ sono permutabili tra loro a due a due, ne seguono le (5), e perciò $\sum_1^n{}_r A^{(r)} x_r$ deve essere un differenziale esatto nell'intorno considerato di $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$.

Dal confronto della (8) con la (10) segue immediatamente che $z = e^y$, dove y è data dalla (6), soddisfa la (8). Siccome questa soluzione diventa la matrice identica nel punto $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ e quindi è non degenere nell'intorno di detto punto, se z è un'altra soluzione della (8), anche essa olomorfa ed appartenente all'algebra $\mathcal{A}$, può porsi $z = e^y u$, dove u è univocamente determinata da z, ed e^y è la soluzione suddetta. Segue dalla (8) che $\mathrm{d}u$ è identicamente nullo e quindi che u è una matrice costante [5]. D'altra parte $e^y\, c$, con c matrice costante arbitraria soddisfa, insieme ad e^y, la (8), dunque

$$z = e^y c = c e^y \tag{13}$$

dà, al variare della matrice costante e non degenere c in $\mathcal{A}$, tutte le soluzioni non degeneri della (8) che appartengono ad $\mathcal{A}$ e sono olomorfe.

Nell'ipotesi che l'algebra $\mathcal{A}$ cui appartengono le $A^{(r)}$ sia commutativa, la (13) soddisfa, oltre la (8), anche la

$$\mathrm{d}z = z\left(\sum_1^n{}_r A^{(r)}\, \mathrm{d}x_r\right). \tag{14}$$

3. – Se nella (8) le $A^{(r)}$ sono funzioni olomorfe di $x_1, x_2, \dots, x_n$ che appartengono ad un'algebra $\mathcal{A}$ dotata di modulo, ma non più necessariamente commutativa, e sono definite ed olomorfe in un intorno (appartenente alla centrale $\mathcal{C}$) di $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ e se in detto intorno $\sum_r A^{(r)} \mathrm{d}x_r$ è un differenziale esatto, segue dalla (12) che le matrici $A^{(r)}$ sono in detto intorno a due a due

---

(5) Vedasi loc. cit. in (3), a): cfr. in tale lavoro il n. 12.

permutabili tra loro. Ma ciò non è sufficiente per concludere che le $A^{(r)}$ variano in un'algebra commutativa $\mathcal{A}'$ contenente la centrale $\mathcal{C}$ di $\mathcal{A}$.

Ad ogni modo, anche in questo caso è possibile assegnare una soluzione della (8) la quale, appartenendo ad un'algebra non più necessariamente commutativa, non soddisferà in generale anche alla (14).

Poniamo $\mathrm{d}y = \sum_r A^{(r)}\mathrm{d}x_r$, dopo di che y è data dalla (7), ed osserviamo che, se z è tale che $\mathrm{d}z = \mathrm{d}y\cdot u$ (oppure $z = u\cdot\mathrm{d}y$), anche $\mathrm{d}y\cdot z$ (oppure $z\cdot\mathrm{d}y$) è un differenziale esatto; infatti si ha

$$\frac{\partial}{\partial x_s}(A^{(r)}z) = \frac{\partial A^{(r)}}{\partial x_s}z + A^{(r)}A^{(s)}u = \frac{\partial A^{(s)}}{\partial x_r}z + A^{(s)}A^{(r)}u = \frac{\partial}{\partial x_r}(A^{(s)}z)\,,$$

ed analogamente per $z\cdot\mathrm{d}y$). Consideriamo le serie

$$(15)\qquad {}^*V[\mathrm{d}y]_{(x_1^0,\dots,x_n^0)}^{(x_1,\dots,x_n)} = I + S_1 + S_2 + \dots\,,$$

$$(16)\qquad V^*[\mathrm{d}y]_{(x_1^0,\dots,x_n^0)}^{(x_1,\dots,x_n)} = I + D_1 + D_2 + \dots\,,$$

dove abbiamo posto

$$S_1 = D_1 = \int_{(x_1^0,\dots,x_n^0)}^{(x_1,\dots,x_n)} \mathrm{d}y = y\,, \qquad S_2 = \int_{(x_1^0,\dots,x_n^0)}^{(x_1,\dots,x_n)} \mathrm{d}y\cdot S_1\,, \qquad D_2 = \int_{(x_1^0,\dots,x_n^0)}^{(x_1,\dots,x_n)} D_1\cdot\mathrm{d}y\,,$$

e poi

$$S_{r+1} = \int_{(x_1^0,\dots,x_n^0)}^{(x_1,\dots,x_n)} \mathrm{d}y\cdot S_r\,, \qquad D_{r+1} = \int_{(x_1^0,\dots,x_n^0)}^{(x_1,\dots,x_n)} D_r\cdot\mathrm{d}y\,.$$

La (15) e la (16) risultano convergenti e funzioni olomorfe delle x_r ([6]); inoltre sono differenziabili termine a termine e si ha:

$$(17)\qquad \mathrm{d}^*V[\mathrm{d}y]_{(x_1^0,\dots,x_n^0)}^{(x_1,\dots,x_n)} = \mathrm{d}y\cdot{}^*V[\mathrm{d}y]_{(x_1^0,\dots,x_n^0)}^{(x_1,\dots,x_n)}\,,$$

$$(18)\qquad \mathrm{d}V^*[\mathrm{d}y]_{(x_1^0,\dots,x_n^0)}^{(x_1,\dots,x_n)} = V^*[\mathrm{d}y]_{(x_1^0,\dots,x_n^0)}^{(x_1,\dots,x_n)}\cdot\mathrm{d}y\,.$$

Per $x_r = x_r^0$, $(r = 1, 2,\dots, n)$, la (15) e la (16) si riducono alla matrice identica e quindi sono non degeneri in un intorno del punto $(x_1^0, x_2^0,\dots, x_n^0)$; dalla (17) e (18) segue che la (15) e la (16) sono soluzioni non degeneri rispettivamente della (8) e della (14), con la condizione iniziale di coincidere con la

([6]) Vedasi loc. cit. in ([2], b): cfr. in tale lavoro il § 3 per il caso di una sola variabile.

matrice identica per $x_r = x_r^0$, $(r = 1, 2, \ldots, n)$; se come condizione iniziale si prende $z = c$, si avrà $z = {}^*V[\mathrm{d}y] \cdot c$ e rispettivamente $z = c \cdot V^*[\mathrm{d}y]$.

Se, al variare di $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nell'intorno di $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, $y = \int \sum_r A^{(r)} \mathrm{d}x_r$ varia in una sottoalgebra commutativa di $\mathcal{A}$, contenente $\mathcal{C}$ [7], si vede facilmente che

(19) $$ {}^*V[\mathrm{d}y] = V^*[\mathrm{d}y] = e^{\int_{(x_1^0, \ldots, x_n^0)}^{(x_1, \ldots, x_n)} \sum_r A^{(r)} \cdot \mathrm{d}x_r}, $$

e si ricade così nella soluzione del numero precedente.

4. – Se $\mathcal{A}$ è l'algebra di tutte le matrici di un dato ordine p, dopo di che $\mathcal{C}$ è l'algebra delle matrici scalari xI (x variabile scalare complessa), risolvere la (8) con z matrice nòn degenere significa determinare un sistema fondamentale di integrali per il sistema di equazioni ai differenziali totali del primo ordine:

(20) $$ \mathrm{d}z_i = \sum_{rk} a_{ik}^{(r)} \cdot z_k \cdot \mathrm{d}x_r . $$

Se le $A^{(r)} = \| a_{ik}^{(r)} \|$ sono costanti, le (12) si riducono alle condizioni di permutabilità

$$ A^{(r)} A^{(s)} = A^{(s)} A^{(r)} $$

ed esiste sempre un'algebra commutativa e contenente l'identità, a cui esse appartengono. Siamo perciò nelle condizioni del n. 2, ed i possibili sistemi fondamentali di integrali delle (20) sono quindi le p colonne delle matrice

(21) $$ z = e^{\sum_r A^{(r)}(x_r - x_r^0)} \cdot Q_1 = e^{\sum_r A^{(r)} x_r} \cdot Q , $$

dove Q $(= e^{-\sum A^{(r)} x_r^0} \cdot Q_1)$ è una matrice costante arbitraria e non degenere di ordine p.

5. – Nel caso di due sole variabili indipendenti, se

(22) $$ \mathrm{d}z = A \cdot \mathrm{d}x + B \cdot \mathrm{d}y $$

è la nostra equazione, con A e B costanti e tra loro permutabili, è possibile

---

[7] Essa contiene certamente $\mathcal{C}$, se non è a sua volta contenuta in una sottoalgebra commutativa più ampia.

assegnare la soluzione z in forma particolarmente semplice ed espressiva, sfruttando l'arbitrarietà di Q nella (21).

Ricordiamo che, se X ed Y sono matrici permutabili, si ha

$$e^{X+Y} = e^X \cdot e^Y = e^Y \cdot e^X$$

e che, H essendo un'arbitraria matrice non degenere, può sempre porsi, per x ed y variabili scalari,

$$z = e^{xA+yB} \cdot Q = H \cdot e^{xH^{-1}AH+yH^{-1}BH} \cdot H^{-1} \cdot Q \,. \tag{23}$$

Scegliamo H in modo che $H^{-1}AH = C$ sia la forma canonica della matrice A; C risulta composta (8) mediante le matrici C_α, C_β,..., dove

$$C_\alpha = \left\{ \begin{array}{c|c|c|c} \alpha I_0 & I_0 \; 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \alpha I_1 & & \\ \hline \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \hline 0 & & & \alpha I_i \end{array} \right\} = \alpha I_\mu + J_\alpha \,,$$

essendo α radice caratteristica di A con molteplicità μ e segnatura $(h_0, h_1, \ldots, h_i)$, I_r la matrice identica di ordine h_r, ed J_α una matrice pseudonulla tale che $J_\alpha^{i+1} = 0$. Ossia in definitiva si ha

$$C = H^{-1}AH = D + J \,,$$

dove D è diagonale, composta mediante αI_μ, βI_ν,... ed J è pseudonulla, composta mediante J_α, J_β,...; sono quindi permutabili le matrici D e J.

Per la permutabilità di B con A si ha che $B_1 = H^{-1}BH$ risulta composta mediante certe matrici B_α, B_β,... rispettivamente degli ordini di C_α, C_β,..., dove (9)

$$B_\alpha = \left\{ \begin{array}{c|c|c|c} B_{00} & B_{01} & \cdots & B_{0i} \\ \hline 0 & \begin{array}{c|c} B_{00} & 0 \\ \hline d_{10} & b_{11} \end{array} & \cdots & \begin{array}{c|c} B_{0,i-1} & 0 \\ \hline d_{1,i-1} & 0 \end{array} \\ \hline \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \hline 0 & & & \begin{array}{c|c|c} \begin{array}{c|c} B_{00} & 0 \\ \hline d_{10} & b_{11} \end{array} & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \cdots & \vdots \\ \hline d_{i,i-1} & & b_{ii} \end{array} \end{array} \right\} ,$$

essendo B_{00} di ordine h_0, b_{rr} di ordine $h_r - h_{r-1}$.

---

(8) È la forma conica data da S. CHERUBINO.

(9) S. CHERUBINO, *Matrici permutabili con una data*. Rend. Sem. Mat. Padova 7, 1-29 (1936).

Pertanto

$$|B-\varrho I| = |B_\alpha - \varrho I| \cdot |B_\beta - \varrho I| \dots ,$$

dove

$$|B_\alpha - \varrho I| = |B_{00} - \varrho I|^{i+1} \cdot |b_{11} - \varrho I|^{i} \dots |b_{ii} - \varrho I| ;$$

quindi ad ogni radice caratteristica α di A risultano associate $h_r - h_{r-1}$, ($r = 0, 1, \dots, i$), $h_{-1} = 0$, radici caratteristiche di B:

$$\sigma_1^{(r)}, \quad \sigma_2^{(r)}, \dots , \quad \sigma_{h_r - h_{r-1}}^{(r)}$$

non necessariamente distinte, ciascuna avente molteplicità $i+1-r$.

Se K_α, $K_\beta, \dots$ sono matrici canonizzanti rispettivamente B_α, $B_\beta, \dots$ e K è la matrice composta mediante queste, potrà porsi

$$K^{-1} \cdot B_1 K = D' + J' ,$$

dove D' è diagonale e J' è pseudonulla, composta mediante certe matrici pseudonulle degli ordini di C_α, $C_\beta, \dots$, onde ancora la loro permutabilità.

D'altra parte D, quindi e^{xD}, risulta permutabile con qualunque matrice composta mediante matrici degli ordini di C_α, $C_\beta, \dots$ rispettivamente, dunque e^{xD} è permutabile con K e xD lo è con yJ' e si può perciò scrivere

$$z = H \cdot e^{xJ} \cdot K \cdot e^{yJ'} \cdot e^{xD + yD'} \cdot Q' , \tag{24}$$

dove $Q' = K^{-1} H^{-1} Q$ è una matrice arbitraria non degenere che possiamo supporre coincidente con la matrice identica.

Il sistema fondamentale di integrali delle (22) dato dalla (24) risulta allora particolarmente espressivo: la matrice $H \cdot e^{xJ} \cdot K \cdot e^{yJ'}$, essendo J ed J' pseudonulle, è ad elementi polinomiali in x ed y che si determina facilmente, date A e B, tutto riducendosi a costruire matrici canonizzanti una data ([10]). I p integrali indipendenti delle (22) sono le p colonne di questa matrice moltiplicate per esponenziali del tipo $e^{\alpha x + \sigma y}$, α e σ essendo radici caratteristiche rispettivamente di A e B, tra loro associate nel modo indicato sopra. Nel caso particolare in cui A e B siano entrambe diagonalizzabili e solo allora, esiste una matrice H capace di portarle simultaneamente alla forma diagonale; la soluzione (24) assume allora la forma semplicissima $z = H \cdot e^{xD + yD'}$. Si hanno così in altra forma i risultati di B. PINI ([11]).

([10]) S. CHERUBINO, *Le matrici canonizzanti una data*. Boll. Un. Mat. Ital. (1) **15**, 105-108 (1936).

([11]) Cfr. loc. cit. in ([1]).