GIUSEPPE PALAMÀ (*)

Contributo alla ricerca di relazioni fra classici polinomi. (**)

Sono noti vari trattati che si occupano di classiche funzioni, ma non ci risulta vi sia un lavoro con lo studio sistematico delle relazioni fra tali classiche funzioni. È manifesto l'interesse di un simile studio che consente di trasferire i risultati relativi ad una funzione ad altra funzione e di stabilire così per questa formule o teoremi non ancora conosciuti o di ritrovare più agevolmente altri noti.

Questo lavoro ha appunto lo scopo di dare un contributo a tale studio, per *le funzioni numeriche del secondo ordine di* LUCAS, per *i polinomi di* CAUCHY, per *i polinomi ultrasferici*, per *le funzioni sferiche generalizzate* studiate dall'HOBSON, per *i polinomi di* GEGENBAUER, *di* LEGENDRE, *di* JACOBI, *di* LAGUERRE *e di* HERMITE.

Lavori analoghi a questo nostro sono citati in seguito.

§ 1. - Polinomi di Jacobi, ultrasferici, di Laguerre e di Hermite.

1. - Nella equazione differenziale di GAUSS

$$x(1-x)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\alpha\beta y=0\,, \tag{1}$$

si ponga

$$x=\frac{a}{t}\,,\qquad\qquad \beta=-n$$

e si cambi α in $-\alpha-n$, si ha così l'equazione

$$\frac{t-a}{a}\,t^2\,\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\left[\frac{2}{a}\,t(t-a)-\frac{\gamma}{a}\,t^2+(-\alpha-2n+1)t\right]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-(\alpha+n)ny=0\,,$$

(*) Indirizzo: Via Sepolcri Messapici 20, Lecce (Italia).
(**) Ricevuto il 2-VII-1951.

che, assumendo

$$a = -\frac{1}{\varepsilon}, \qquad y = t^{-n}u$$

e facendo tendere ε a zero, alla sua volta diventa

$$tu'' + (\alpha - t + 1)u' + nu = 0 .$$

Quest'ultima è l'equazione differenziale cui soddisfa

$$u = L_n^{(\alpha)}(t) ,$$

essendo $L_n^{(\alpha)}(t)$ il polinomio di LAGUERRE generalizzato.

Ma un integrale particolare di (1) è la funzione ipergeometrica di GAUSS, quindi deve esistere una relazione del tipo

$$L_n^{(\alpha)}(x) = cx^n \lim_{\varepsilon\to 0} F\left(-n, \ -\alpha - n, \ \frac{1}{\varepsilon}, \ -\frac{1}{\varepsilon x}\right), \tag{2}$$

con c costante opportuna. Eguagliando i coefficienti dei termini di grado più alto in (2), si ha

$$c = \frac{(-1)^n}{n!} .$$

Pertanto sussiste la notevole formula limite

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(-1)^n}{n!} x^n \lim_{\varepsilon\to 0} F\left(-n, -\alpha - n, \frac{1}{\varepsilon}, -\frac{1}{\varepsilon x}\right). \tag{3}$$

2. – Si noti che

$$F_n(\alpha, \gamma, x) = F(-n, \alpha, \gamma, x)$$

sono i polinomi ipergeometrici attribuiti da alcuni Autori a JACOBI che però ha studiato i polinomi [1]

$$\mathcal{F}_n(\alpha, \gamma, x) = F_n(\alpha + n, \gamma, x).$$

---

[1] C. G. J. JACOBI, *Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrichen Reihe*, J. Reine Angew. Math. **56**, 149-175 (1859).

Va inoltre notato che altri Autori ([2]) dicono di JACOBI i polinomi definiti dalla

$$J_n(x, \lambda, \mu) = (x+1)^{-\lambda}(x-1)^{-\mu} D_x^n (x+1)^{\lambda+n} \cdot (x-1)^{\mu+n}, \tag{4}$$

ove D_x^n sta per d^n/dx^n.

L. TOSCANO ([3]) stabilisce le seguenti formule di passaggio:

$$J_n(x, \lambda, \mu) = (-1)^n 2^n (\lambda+1, n) F_n\left(\lambda+\mu+n+1,\ \lambda+1,\ \frac{x+1}{2}\right), \tag{5}$$

$$F_n(\beta, \gamma, x) = \frac{(-1)^n}{(\gamma, n)2^n} J_n(2x-1,\ \gamma-1,\ \beta-\gamma-n). \tag{6}$$

Noi qui segnaliamo le altre formule seguenti, analoghe a (5),

$$J_n(x, \lambda, \mu) = (\mu+1, n)(x+1)^n F_n\left(-\lambda-n,\ \mu+1,\ \frac{x-1}{x+1}\right), \tag{7}$$

$$J_n(x, \lambda, \mu) = (\lambda+1, n)(x-1)^n F_n\left(-\mu-n,\ \lambda+1,\ \frac{x+1}{x-1}\right), \tag{8}$$

$$J_n(x, \lambda, \mu) = (\mu+1, n)2^n F_n\left(\lambda+\mu+n+1,\ \mu+1,\ \frac{1-x}{2}\right). \tag{9}$$

Dalle (7), (8), (9) si hanno subito rispettivamente queste altre, analoghe a (6),

$$F_n(\lambda, \mu, x) = \frac{(x-1)^n}{2^n(\mu, n)} J_n\left(\frac{x+1}{x-1},\ \mu-1,\ -\lambda-n\right),$$

$$F_n(\lambda, \mu, x) = \frac{(1-x)^n}{2^n(\mu, n)} J_n\left(\frac{1+x}{1-x},\ -\lambda-n,\ \mu-1\right),$$

$$F_n(\lambda, \mu, x) = \frac{1}{2^n(\mu, n)} J_n(1-2x,\ \lambda-\mu-n,\ \mu-1 .$$

([2]) Cfr. L. TOSCANO, *Su i polinomi ipergeometrici*, Boll. Un. Mat. Ital. (2) **1**, 224-229 (1939); cfr. pure i lavori richiamati in tale Nota. Il TOSCANO dice che G. POLYA e G. SZEGÖ chiamano polinomi di JACOBI i seguenti

$$\frac{1}{(2n)!!} J_n(x, \lambda, \mu).$$

([3]) Cfr. loc. cit. in ([2]).

La (3) può pertanto scriversi anche facendosi intervenire al posto degli F_n, o gli $\mathcal{F}_n$ od i J_n.

3. – Se nella (3) poniamo $\alpha = 1/2$, $\alpha = -1/2$ e teniamo presente che è

$$L_n^{(1/2)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!\,\sqrt{2x}}\, H_{2n+1}(\sqrt{2x}) ,$$

$$L_n^{(-1/2)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\, H_{2n}(\sqrt{2x}) ,$$

ove $H_n(x)$ è il polinomio d'HERMITE per il quale si ha

$$H_n'(x) = nH_{n-1}(x) ,$$

si ricavano, rispettivamente, le relazioni limiti

$$H_{2n+1}(x) = x^{2n+1} \lim_{\varepsilon \to 0} F_n\left(-\frac{1}{2} - n,\ \frac{1}{\varepsilon},\ -\frac{2}{\varepsilon x^2}\right),$$

$$H_{2n}(x) = x^{2n} \lim_{\varepsilon \to 0} F_n\left(\frac{1}{2} - n,\ \frac{1}{\varepsilon},\ -\frac{2}{\varepsilon x^2}\right),$$

che possono fondersi nell'unica

$$H_n(x) = x^n \lim_{\varepsilon \to 0} F_{[n/2]}\left((-1)^n \frac{1}{2} - n,\ \frac{1}{\varepsilon},\ -\frac{2}{\varepsilon x^2}\right).$$

4. – La (3) può stabilirsi anche più rapidamente.

Basta infatti che la

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)x^{n-m}}{m!\,(n-m)!\,\Gamma(\alpha + n - m + 1)} ,$$

si scriva

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{n!\,m!} (-\alpha - n,\ m)(-n,\ m)x^{n-m}, \tag{10}$$

tenendo presente che è

$$\frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(\alpha + n - m + 1)} = (-1)^m(-\alpha - n,\ m), \qquad (n-m)! = \frac{(-1)^m n!}{(-n,\ m)} ,$$

per ricavare dalla (10) la (3).

5. – Prima di fare qualche applicazione della (3), ritroviamo qui una formula già nota, cioè la

$$D^n_{1/y} z = (-1)^n y^{n+1} D^n_y y^{n-1} z \,,$$

ove z è funzione di y.

Perciò teniamo presente che è ([4])

$$\frac{d^s}{dx^s} f(y(x)) = \sum_{\alpha=0}^{s} \frac{1}{\alpha!} \frac{d^\alpha f(y)}{dy^\alpha} \sum_{r=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{r} (-y)^{\alpha-r} \frac{d^s}{dx^s} y^r \,. \tag{11}$$

Se in essa assumiamo

$$y = \frac{1}{x} \,,$$

si ha

$$D^s_{1/y} f(y) = \sum_{k=0}^{s} \frac{1}{k!} D^k_y f(y) \sum_{r=0}^{k} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} y^{k-r} D^s_{1/y} y^r \,,$$

ossia, poichè

$$D^s_{1/y} y^r = D^s_x x^{-r} = -r(-r-1) \dots (-r-s+1) x^{-r-s} = (-1)^s s! \binom{r+s-1}{s} y^{r+s} \,,$$

$$D^s_{1/y} z = (-1)^s s! \;\; y^{s+1} \sum_{k=0}^{s} \frac{(-1)^k}{k!} y^{k-1} D^k_y z \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{k}{r} \binom{r+s-1}{s} \,, \tag{11'}$$

ove z sta per $f(y)$.

Ma essendo ([5])

$$\sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{k}{r} \binom{r+s-1}{s} = (-1)^k \binom{s-1}{k-1} \,, \tag{12}$$

la (11′) a mezzo della (12) si riduce facilmente alla formula che si voleva stabilire ([6]).

([4]) Per notizie bibliografiche relative alla (11) del testo cfr.: A. Mambriani, *Sulla derivazione di ordine superiore delle funzioni composte* (Nota II), Boll. Un. Mat. Ital. (1) **13**, 284-288 (1934).

([5]) Cfr. A. Mambriani, *Sugli sviluppi, dati dallo Schwatt, di* $\sec^p x$ *e* $\operatorname{tg}^p x$, Boll. Un. Mat. Ital. (1) **10**, 17-20 (1931). Il Mambriani nota però che la (12) del testo era stata già data dallo Schwatt.

([6]) Cfr. loc. cit. in ([2]) e le notizie bibliografiche contenute in: L. Koschmieder, *Beispiele des Gebrauchs gewisser Ableitungsformeln von Liouville, Spitzer und Schlömlich*, Revista Mat. Hisp.-Amer. (4) **6**, 240-248 (1946).

6. – Applichiamo ora la (3) per ritrovare due note formule. Nella notissima

$$F_n(\beta,\gamma,x)=\frac{1}{(\gamma,n)}\,x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\beta+n}D_x^n x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\beta-\gamma}\,, \tag{13}$$

ponendo

$$\beta=-\alpha-n\,,\qquad \gamma=\frac{1}{\varepsilon}\,,\qquad x=-\frac{t}{\varepsilon}\,,$$

si ha

$$F_n\left(-\alpha-n,\ \frac{1}{\varepsilon},\ -\frac{t}{\varepsilon}\right)=\frac{t^{1-1/\varepsilon}}{(1/\varepsilon,\,n)}\left(1+\frac{t}{\varepsilon}\right)^{(1/\varepsilon)+\alpha+2n}D_t^n t^{(1/\varepsilon)+n-1}\left(1+\frac{t}{\varepsilon}\right)^{-\alpha-n-1/\varepsilon}$$

e quindi la (3), a mezzo di quest'ultima, dà subito (7)

$$L_n^{(\alpha)}\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{(-1\ )^n}{n!}\,t^{\alpha+n+1}e^{1/t}D_t^n\,\frac{e^{-1/t}}{t^{\alpha+1}}\,.$$

Se invece nella (13) poniamo

$$\beta=-\alpha-n\,,\qquad \gamma=\frac{1}{\varepsilon}\,,\qquad x=\frac{1}{\varepsilon}\,,$$

la (3) e la formula stabilita al n. 5 dànno facilmente la notissima

$$L_n^{(\alpha)}(t)=\frac{t^{-\alpha}}{n!}\,e^tD_t^n t^{\alpha+n}e^{-t}\,.$$

7. – Stabiliamo due interessanti relazioni limiti fra i polinomi d'HERMITE e gli ultrasferici (8) $P^{\nu,n}(x)$.

È nota la formula (9)

$$P^{\nu,2n+1}(x)=\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(\nu)}\,\Gamma(\nu+n+1)2xF_n\left(\nu+n+1,\frac{3}{2},\ x^2\right)\,,$$

che, se vi poniamo

$$\nu=\frac{1}{\varepsilon}-n-1\,,\qquad x=\sqrt{\varepsilon t}\,,$$

---

(7) Cfr. loc. cit. in (2).

(8) Per tali polinomi cfr.: N. NIELSEN, *Théorie des fonctions métasphériques*, Gauthier-Villars, Paris 1911, (VII+212 pp.).

(9) Cfr. la pag. 94 di loc. cit. in (8).

diventa

$$F_n\left(\frac{1}{\varepsilon}, \frac{3}{2}, \varepsilon x\right) = \frac{(-1)^n n!\, \Gamma((1/\varepsilon)-n-1)}{2\Gamma(1/\varepsilon)\sqrt{\varepsilon x}}\, P^{(1/\varepsilon)-n-1,2n+1}(\sqrt{\varepsilon x}). \tag{14}$$

Ma d'altra parte è, come è noto

$$\frac{n!}{(\alpha+1,\ n)} L_n^{(\alpha)}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} F_n\left(\frac{1}{\varepsilon},\ \alpha+1,\ \varepsilon x\right),$$

ed essa, per $\alpha=1/2$, a mezzo della corrispondente formula di Szegö e della (14), dà le relazioni limiti

$$H_{2n-1}(x\sqrt{2}) = \frac{(2n-1)!}{2^{n-1/2}} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{P^{(1/\varepsilon)-n,2n-1}(x\sqrt{\varepsilon})}{((1/\varepsilon)-n,\ n)\sqrt{\varepsilon}}, \tag{15}$$

$$H_{2n}(x\sqrt{2}) = \frac{(2n)!}{2^n} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{P^{(1/\varepsilon)-n,\,2n}(x\sqrt{\varepsilon})}{((1/\varepsilon)-n,\ n)}.$$

La (15) e quest'ultima possono rispettivamente scriversi

$$\frac{2^{n-1/2}}{(2n-1)!} H_{2n-1}(x\sqrt{2}) = \lim_{a\to\infty} \frac{\sqrt{a}\,P^{a-n,\,2n-1}(x/\sqrt{a})}{(a-n,\ n)}, \tag{16}$$

$$\frac{2^n}{(2n)!} H_{2n}(x\sqrt{2}) = \lim_{a\to\infty} \frac{P^{a-n,\,2n}(x/\sqrt{a})}{(a-n,\ n)}. \tag{17}$$

8. – Allo scopo di fare un'applicazione delle (16), (17), richiamiamo una relazione fra i polinomi di Jacobi e gli ultrasferici che crediamo nota, cioè la

$$P^{\nu,n}(x) = \frac{(2\nu,n)J_n(x,\ \nu-1/2,\ \nu-1/2)}{(2n)!!\,(\nu+1/2,\ n)}; \tag{18}$$

essa per $\nu=1/2$ diventa semplicemente

$$(2n)!!\,P_n(x) = J_n(x, 0, 0),$$

ove $P_n(x)$ è il polinomio di Legendre.

La (18), a mezzo della (4), dà subito la seguente celebre fornula di Jacobi [10]

$$P^{\nu,n}(x) = \frac{(-1)^n 2^n \Gamma(\nu+n)\Gamma(2\nu+n)}{n!\,\Gamma(\nu)\Gamma(2\nu+2n)} (1-x^2)^{-\nu+1/2} D_x^n (1-x^2)^{\nu+n-1/2}. \tag{19}$$

[10] Per notizie bibliografiche relative alla (19) del testo cfr. pag. 101 di loc. cit. in [8].

Ora se vi cambiamo n in $2n$ e vi assumiamo poi

$$\nu = a - n\,, \qquad x = \frac{t}{\sqrt{a}}\,,$$

otteniamo

$$P^{a-n,\,2n}\left(\frac{t}{\sqrt{a}}\right) = \frac{(2a-2n,\ 2n)a^n}{(4n)!!\,(a-n+1/2,\ 2n)}\left(\frac{t^2}{a}-1\right)^{-a+n+1/2} \mathrm{D}_t^{2n}\left(\frac{t^2}{a}-1\right)^{a+n-1/2},$$

da cui per la (17), si trae facilmente la nota

$$H_{2n}(t) = e^{t^2/2}\mathrm{D}_t^{2n}e^{-t^2/2}.$$

In modo analogo, servendosi della (16), si ottiene subito la formula relativa ad $H_{2n-1}(t)$.

9. – L'elegante formuletta che lega i $P^{\nu,n}(x)$ con le funzioni trigonometriche

$$P^{(1/2)-2n,2n}(i\ \mathrm{tg}\ \theta) = \frac{\binom{4n-1}{2n}\cos 2n\theta}{2^{2n-1}\cos^{2n}\theta}\,, \quad i = \sqrt{-1}\,,$$

si può ricavare agevolmente.

Difatti lo sviluppo di $F_n(\alpha, \beta, x)$ dà subito la seguente relazione

$$F\left(-n,\ n+1,\ \frac{1}{2},\ x^2\right) + 2nx^2F\left(-n+1,\ n+1,\ \frac{3}{2},\ x^2\right) = F\left(-n,\ n,\ \frac{1}{2},\ x^2\right),$$

ed essa a mezzo delle [11]

$$\text{(20)} \qquad P^{\nu,2n}(x) = \frac{(-1)^n\Gamma(\nu+n)}{n!\ \Gamma(\nu)}\,F\left(-n,\ \nu+n,\ \frac{1}{2},\ x^2\right),$$

$$\text{(21)} \qquad P^{\;,2n\;\;1}(x) = \frac{(-1)^{n-1}\Gamma(\nu+n)2x}{(n-1)!\ \Gamma(\nu)}\,F\left(-n+1,\ \nu+n,\ \frac{3}{2},\ x^2\right),$$

$$P^{\nu,2n}(\cos\theta) = \frac{(-1)^n\Gamma(\nu+2n)(2\ \mathrm{sen}\ \theta)^{2n}}{(2n)!\ \Gamma(\nu)}\,F\left(-n,\ \frac{1}{2}-\nu-n,\ 1-\nu-2n,\ \frac{1}{\mathrm{sen}^2\theta}\right),$$

---

[11] Cfr. loc. cit. in [8], pp. 94 e 106.

se vi assumiamo rispettivamente

$$\nu = 1; \qquad \nu = 1; \qquad \nu = \frac{1}{2} - 2n, \qquad \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = x,$$

dà

$$P^{1,2n}(x) - xP^{1,2n-1}(x) = \frac{2^{2n-1}x^{2n}}{\binom{4n-1}{2n}} P^{(1/2)-2n,2n}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right), \tag{22}$$

ossia, ponendovi

$$x = \cos\theta$$

e tenendo presente la ([12])

$$P^{1,n}(\cos\theta) = \frac{\operatorname{sen}(n+1)\theta}{\operatorname{sen}\theta},$$

dopo elementari trasformazioni, la formuletta che si cercava.

10. – Altrove abbiamo stabilito la ([13])

$$\lim_{\alpha\to\infty}\left[\left(\frac{x}{\alpha}\right)^n L_n^{(r\alpha+\beta)}\left(\frac{a\alpha}{x}\right)\right] = \frac{(rx-a)^n}{n!};$$

ora è facile verificare che si ha anche

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(-\varepsilon)^n L_n^{(k+a/\varepsilon)}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{n!}(x-a)^n,$$

cui può darsi subito la forma più generale

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(-1)^n\varepsilon^{kn} L_n^{(a/\varepsilon^k + b/\varepsilon^{k-1} + \dots + l)}\left(\frac{x}{\varepsilon^k}\right) = \frac{1}{n!}(x-a)^n,$$

ove k è un intero positivo arbitrario.

([12]) Cfr. loc. cit. in ([8]), pag. 99.

([13]) Cfr. G. Palamà, *Su alcune relazioni limiti relative a classici polinomi*, Boll. Un. Mat. Ital. (2) 4, 99-109 (1942). Un risultato analogo (a me non noto nel 1942) si trova anche in: G. Szegö, *Orthogonal polynomials*, New York 1939; cfr. pag. 372.

11. – Analoghi ai polinomi ultrasferici sono i polinomi $A^{\nu,n}(x)$ di GEGENBAUER [14]. Difatti dalla [15]

$$P^{\nu,n}(x)=\frac{(2\nu,n)}{n!}x^nF\left(-\frac{n}{2},\frac{1-n}{2},\nu+\frac{1}{2},\frac{x^2-1}{x^2}\right),$$

e dalla [16]

$$A^{\nu,n}(x)=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu)x^n}{\Gamma(\nu+1/2)}F\left(-\frac{n}{2},\frac{1-n}{2},\nu+\frac{1}{2},\frac{x^2-1}{x^2}\right),$$

confrontando, si ha

$$A^{\nu,n}(x)=\frac{\Gamma^2(\nu)\,2^{2\nu-1}n!}{\Gamma(2\nu+n)}P^{\nu,n}(x)\,. \tag{23}$$

d'accordo con il NIELSEN [17].

Invece il TRICOMI [18] assume per tali polinomi, che indica con $C_n^\nu(x)$, come per lo più si fa, la seguente definizione:

$$C_n^\nu(x)=\frac{\Gamma(2\nu+n)}{\Gamma(2\nu)n!}F\left(-n,\,2\nu+n,\,\nu+\frac{1}{2},\,\frac{1-x}{2}\right),$$

ma è [19]

$$P^{\nu,n}(1+t)=\frac{\Gamma(2\nu+n)}{\Gamma(2\nu)n!}F\left(-n,\,2\nu+n,\,\nu+\frac{1}{2},\,-\frac{t}{2}\right), \tag{24}$$

e quindi si ha

$$C_n^\nu(x)=P^{\nu,n}(x)\,,$$

per qualunque ν e non soltanto per $\nu=1/2$ come ricava il TRICOMI [20].

---

[14] Cfr. loc. cit. in [8], pp. 89 e 90, pp. 193-194. Notizie bibliografiche relative ai polinomi di GEGENBAUER si trovano in: P. APPELL et J. KAMPÉ DE FÉRIET, *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques, Polynomes d'Hermite*, Paris 1926, cfr. pag. 422; F. TRICOMI, *Trasformazioni funzionali e polinomi ortogonali, in ispecie sferici*, Boll. Un. Mat. Ital. (1) **14**, 213-218 (1935); L. GEGENBAUER, *Über die Function* $C_n^\nu(x)$, Sitzungsber. Akad. Wien **100**, 745-746 (1891).

[15] Cfr. P. APPEL et J. KAMPÉ DE FÉRIET, loc. cit. in [14], vedasi pag. 389, ove il simbolo $V_n^{(s)}$ sta esattamente per il nostro $P^{\nu,n}$, purchè però nelle formule ove c'è s si ponga 2ν.

[16] Cfr. loc. cit. in [8], pag. 89.

[17] Cfr. loc. cit. in [8], pag. 194.

[18] Cfr. F. TRICOMI, loc. cit. in [14], pag. 218.

[19] Cfr. loc. cit. in [8], pag. 108.

[20] Cfr. loc. cit. in [18].

A mezzo della (23) e della (19), si trova la

$$A^{\nu,n}(x) = \frac{(-1)^n\sqrt{\pi}\Gamma(\nu)}{2^n\Gamma(\nu+n+1/2)}(1-x^2)^{-\nu+1/2}\mathrm{D}_x^n(1-x^2)^{\nu+n-1/2},$$

che fa vedere come gli $A^{\nu,n}(x)$ non coincidono completamente con i polinomi di GEGENBAUER, indicati con $\mathcal{P}(x, \alpha)$, e definiti, come fa qualche altro Autore ([21]), dalla

$$\mathcal{P}(x, \alpha) = (1-x^2)^{-\alpha}\mathrm{D}_x^n(1-x^2)^{\alpha+n},$$

perchè si ha

$$A^{\nu,n}(x) = \frac{(-1)^n\sqrt{\pi}\Gamma(\nu)}{2^n\Gamma(\nu+n+1/2)}\mathcal{P}\left(x, \nu-\frac{1}{2}\right).$$

Il confronto di quest'ultima con la (23) dà poi

$$\mathcal{P}\left(x, \nu-\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n n!\, 2^{2\nu+n-1}\Gamma(\nu)\Gamma(\nu+n+1/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(2\nu+n)}P^{\nu,n}(x).$$

12. - Cerchiamo infine la relazione che esiste fra i $P^{\nu,n}(x)$ e le funzioni sferiche generalizzate $P_n^m(x)$ studiate da E. W. HOBSON ([22]). Tali funzioni possono definirsi con la ([22'])

$$P_n^m(x) = \frac{(-1)^{m+n}}{2^n n!}(1-x^2)^{m/2}\mathrm{D}_x^{m+n}(1-x^2)^n,$$

ed il confronto di essa con la (19) dà formalmente

$$P^{\nu,n}(x) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(2\nu+n)}{2^{\nu-1/2}n!\,\Gamma(\nu)}(1-x^2)^{-(\nu/2)+(1/4)}P_{\nu+n-1/2}^{-\nu+1/2}(x), \quad n \text{ intero} > 0,$$

che coincide con l'analoga data da TRICOMI ([23]).

([21]) Cfr. loc. cit. in ([6]).
([22]) Cfr. E. W. HOBSON, *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics*, Cambridge 1931; ved. pag. 94.
([22']) Cfr. loc. cit. in ([22]).
([23]) Cfr. loc. cit. in ([18]).

§ 2. – Funzioni numeriche del secondo ordine. Polinomi di Cauchy e polinomi ultrasferici.

1. – Le funzioni numeriche del 2° ordine di LUCAS soddisfano alla formula ricorrente ([24])

$$u_n - pu_{n-1} + q = 0 .$$

Se si assumono le condizioni iniziali

$$u_0 = U_0 = 0 , \qquad u_1 = U_1 = 1 ;$$

$$u_0 = V_0 = 2 , \qquad u_1 = V_1 = p ,$$

si hanno rispettivamente la *funzione fondamentale* $U_n(p, q)$ e la *primordiale* $V_n(p, q)$ come le chiama il LUCAS.

Si noti che se a, b sono le radici della

$$x^2 - px + q = 0 ,$$

è

$$V_n(p, q) = a^n + b^n , \qquad U_n(p, q) = \frac{a^n - b^n}{a - b} . \tag{1}$$

Poichè ([25])

$$x^n V_n(x, -p) = n \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{p^k(n-k-1)!\, x^{2n-2k}}{k!\,(n-2k)!} , \tag{2}$$

e ([26])

$$P^{1,n}(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k(n-k)!}{k!\,(n-2k)!} (2x)^{n-2k} , \tag{3}$$

derivando la (2) e confrontando poi con (3), si trae

$$\mathrm{D}_x x^n V_n(x, p) = 2np^{n/2}x^{n-1}P^{1,n}\left(\frac{x}{2\sqrt{p}}\right) . \tag{4}$$

([24]) Cfr. E. LUCAS, *Théorie des nombres* (t. I), Paris 1891; ved. pp. 308-331. Tali funzioni sono state ampiamente studiate da G. CANDIDO, *Scritti matematici* (raccolti ed ordinari dai proff. ENEA BORTOLOTTI e E. NANNEI), Firenze 1948; ved. pp. 467-577 ove si trovano anche notizie storico-bibliografiche.

([25]) Cfr. E. LUCAS, loc. cit. in ([24]).

([26]) Cfr. loc. cit. in ([8]), pag. 94.

Analogamente partendo dalla

$$P^{m+1,n}(x) = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k (m+n-k)!}{k!\,(n-2k)!} (2x)^{n-2k}, \quad m \text{ intero} \geqslant 0 \,,$$

si perviene alla

$$\text{(5)} \qquad D_x^{m+1} x^{(n/2)+m} V_n(\sqrt{x}, p) = m!\, n x^{(n/2)-1} p^{n/2} P^{m+1,n}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{p}}\right).$$

Se ora teniamo presente la [27]

$$\text{(6)} \qquad D_x V_n(x, p) = n U_n(x, p) \,,$$

e si esegue nella (4) la derivazione si trae

$$\text{(7)} \qquad V_n(x, p) + x U_n(x, p) = 2p^{n/2} P^{1,n}\left(\frac{x}{2\sqrt{p}}\right),$$

che collega le tre funzioni V_n, U_n e $P^{1,n}$.

Se analogamente si confronta la [28]

$$U_{n+1}(x, p) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k (n-k)!\, p^k x^{n-2k}}{k!\,(n-2k)!} \,,$$

con la (3), si ricava

$$\text{(8)} \qquad U_{n+1}(2x, p^2) = p^n P^{1,n}\left(\frac{x}{p}\right),$$

che, se forse non è stata data sotto questa forma, pure è contenuta in noti risultati.

2. – Se nella (7), cioè meglio nella

$$V_n(2x, p^2) + 2x U_n(2x, p^2) = 2p^n P^{1,n}\left(\frac{x}{p}\right),$$

si elimina, mediante la (8), $U_n(2x, p^2)$, si ha

$$\text{(9)} \qquad V_n(2x, p^2) = -2xp^{n-1} P^{1,n-1}\left(\frac{x}{p}\right) + 2p^n P^{1,n}\left(\frac{x}{p}\right),$$

ove V_n è espresso mediante polinomi ultrasferici.

---

[27] Cfr. G. CANDIDO, loc. cit. in [24].
[28] Cfr. E. LUCAS, loc. cit. in [24].

Inoltre la (6) a meezo della (8), dà

$$D_x V_n(x, p^2) = np^{n-1}P^{1,n-1}\left(\frac{x}{2p}\right).$$

Altri risultati analoghi sono i seguenti

(10) $$\mathrm{D}_x^m x^{(n/2)+m} U_{n+1}(\sqrt{x}, p) = m!\,(px)^{n/2} P^{m+1,n}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{p}}\right), \quad m \geqslant 0,$$

(11) $$\mathrm{D}_x^m V_n(x, p^2) = (m-1)!\, np^{n-m} P^{m,n-m}\left(\frac{x}{2p}\right), \quad n \geqslant m,\ m \geqslant 0,$$

(12) $$\mathrm{D}_x^{m-1} U_{m+q}(x, p^2) = (m-1)!\, p^q P^{m,q}\left(\frac{x}{2p}\right), \quad m \geqslant 1,\ q \text{ intero } > 0.$$

Si noti poi che la (9) a mezzo della (22) del § 1, dà

$$V_{2n}(2x, p) = \frac{(2x)^{2n}}{\binom{4n-1}{2n}} P^{(1/2)-2n,2n}\left(\frac{\sqrt{x^2-p}}{x}\right),$$

in cui V_{2n} è espresso mediante un solo polinomio ultrasferico.

3. – La (8) poi, a mezzo delle (20), (21) del § 1, può anche scriversi rispettivamente cambiando n in $2n$ ed in $2n-1$

(13) $$U_{2n+1}(x, p) = (-p)^n F_n\left(n+1, \frac{1}{2}, \frac{x^2}{4p}\right),$$

$$U_{2n}(x, p) = (-p)^{n-1} nx F_{n-1}\left(n+1, \frac{3}{2}, \frac{x^2}{4p}\right).$$

D'altra parte si ottengono facilmente le

(14) $$P^{\nu,2n}(x) - xP^{\nu,2n-1}(x) = \frac{(-1)^n \Gamma(\nu+n)}{n!\,\Gamma(\nu)} F_n\left(\nu+n-1, \frac{1}{2}, x^2\right),$$

(15) $$P^{\nu,2n+1}(x) - xP^{\nu,2n}(x) = \frac{(-1)^n(2\nu+2n-1)\Gamma(\nu+n)}{n!\,\Gamma(\nu)} xF_n\left(\nu+n, \frac{3}{2}, x^2\right),$$

ossia, lo notiamo incidentalmente, le

(16) $$P^{\nu,2n}(x) - xP^{\nu,2n-1}(x) = \frac{\nu+n-1}{\nu-1} P^{\nu-1,2n}(x),$$

$$P^{\nu,2n+1}(x) - xP^{\nu,2n}(x) = \frac{2\nu+2n-1}{2(\nu-1)} P^{\nu-1,2n+1}(x),$$

che possono fondersi nell'unica

$$P^{\nu,n}(x) - xP^{\nu,n-1}(x) = \frac{2\nu+n-2}{2(\nu-1)} P^{\nu-1,n}(x).$$

Ma la (15) a mezzo della (29)

$$P^{\nu,2n}(\sqrt{1-x^2}) = \frac{\Gamma(2\nu+2n)}{(2n)!\,\Gamma(2\nu)} F_n\left(\nu+n,\ \nu+\frac{1}{2},\ x^2\right),$$

se in entrambe poniamo $\nu = 1$, dà per la (9)

$$V_{2n+1}(2x,\,p^2) = (-1)^n 2p^{2n} x P^{1,2n}\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{p^2}}\right), \tag{17}$$

che è analoga all'ultima del n. 2.

Invece la (15) per la (9), dà

$$V_{2n+1}(2x,\,p^2) = (-1)^n 2p^{2n}(2n+1)xF_n\left(n+1,\ \frac{3}{2},\ \frac{x^2}{p^2}\right). \tag{18}$$

Si noti poi che dal confronto della (22) del § 1 con la (16) per $\nu = 1$, si trae la seguente formula limite

$$\binom{4n-1}{2n} n \lim_{\nu\to 0}\left[\frac{1}{\nu} P^{\nu,2n}(x)\right] = 2^{2n-1}x^{2n}P^{(1/2)-2n,2n}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right),$$

dalla quale per $x = \cos\theta$ si ricade alla formula stabilita al n. 9 del § 1, quando si tenga presente la nota

$$\lim_{\nu\to 0}\left[\Gamma(\nu)P^{\nu,n}(\cos\theta)\right] = \frac{2\cos n\theta}{n}, \qquad n \geqslant 1,$$

4. – Stabiliamo ora alcune altre formule limiti.

Poichè a mezzo della

$$\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\nu) = \Gamma(\nu)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)2^{2\nu-1},$$

si ha

$$\lim_{\nu\to 0}\frac{\Gamma(2\nu)}{\Gamma(\nu)} = \frac{1}{2},$$

(29) Cfr. loc. cit. in (8), pag. 106.

la (24) del § 1 dà, se vi poniamo $t = -x^2/2p$,

$$\lim_{\nu\to 0}\left[\Gamma(\nu)P^{\nu,n}\left(1-\frac{x^2}{2p}\right)\right] = \frac{2}{n}F_n\left(n, \frac{1}{2}, \frac{x^2}{4p}\right),$$

e quindi per la (14) e la (9)

$$V_{2n}(2x, p) = (-p)^n n \lim_{\nu\to 0}\left[\Gamma(\nu)P^{\nu,n}\left(1-\frac{2x^2}{p}\right)\right]. \tag{19}$$

Analogamente dalla (13) e dalla [30]

$$\frac{1}{\sqrt{1-t}}P^{\nu,2n+1}(\sqrt{1-t}) = \frac{\Gamma(2\nu+2n+1)}{(2n+1)!\,\Gamma(2\nu)}F_n\left(\nu+n+1, \nu+\frac{1}{2}, t\right)$$

si ricava la

$$U_{2n+1}(x, -p) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}p^{n+1/2}(2n+1)\lim_{\nu\to 0}\left[\Gamma(\nu)P^{\nu,2n+1}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Delta}{p}}\right)\right], \qquad \Delta = x^2+4p.$$

Si noti poi che la (18), per la (21) del § 1, dà

$$V_{2n+1}(2x, p^2) = p^{2n+1}(2n+1)\lim_{\nu\to 0}\left[\Gamma(\nu)P^{\nu,2n+1}\left(\frac{x}{p}\right)\right]. \tag{20}$$

Analogamente, con le (14), (9) e (20) del § 1, si trae

$$V_{2n}(2x, p^2) = p^{2n}\cdot 2n\lim_{\nu\to 0}\left[\Gamma(\nu)P^{\nu,2n}\left(\frac{x}{p}\right)\right],$$

e quest'ultima e la (20) dànno luogo all'unica

$$V_n(2x, p^2) = np^n\lim_{\nu\to 0}\left[\Gamma(\nu)P^{\nu,n}\left(\frac{x}{p}\right)\right].$$

5. – Ricaviamo qui delle relazioni integrali fra i polinomi di questo paragrafo.

Le (4), (5) per $m = 0$, (10) per $m = 1$, (11) per $m = 1$, (12) per $m = 2$, dànno subito di simili relazioni. Ad es. dalla (14) si ha

$$x^n V_n(x, p) = 2np^{n/2}\int_0^x x^{n-1}P^{1,n}\left(\frac{x}{2\sqrt{p}}\right)dx.$$

---

[30] Cfr. pag. 107 di loc. cit. in [8].

6. – Si noi poi la [31]

$$P^{\nu+(1/2),n}(x) = \frac{\Gamma(2\nu+n+1)}{\Gamma^2(\nu+1/2)n!\,2^{2\nu}}\int_0^\pi (x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^n \operatorname{sen}^{2\nu}\varphi\, d\varphi\,.$$

Essa per $\nu = 1/2$, quando si tenga presente la (8), dà

$$U_{n+1}(x,p) = \frac{n+1}{2^{n+1}}\int_0^\pi (x+\cos\varphi\sqrt{x^2-4p})^n \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\,,$$

a mezzo della quale si trae subito poi

$$(-1)^n U_{n+1}(-x,p) + U_{n+1}(x,p) = \frac{n+1}{2^{n+1}}\int_0^\pi V_n(2x,\ x^2\operatorname{sen}^2\varphi + 4p\cos^2\varphi)\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\,,$$

cioè

$$U_{n+1}(x,p) = \frac{n+1}{2^{n+2}}\int_0^\pi V_n(2x,\ x^2\operatorname{sen}^2\varphi + 4p\cos^2\varphi)\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\,,$$

da cui possono ottenersi numerose altre particolarizzando x e p.

In modo analogo si stabilisce la

$$\int_0^\pi U_n(2x,\ x^2\operatorname{sen}^2\varphi + 4p\cos^2\varphi)\operatorname{sen}2\varphi\, d\varphi = 0\,.$$

7. – La [32]

$$\int_0^\pi (1\pm x\cos\varphi)^n \operatorname{sen}^{2\nu-1}\varphi\, d\varphi = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu+1/2)}\, F\left(\frac{1-n}{2},\ -\frac{n}{2},\ \nu+\frac{1}{2},\ x^2\right)$$

dà subito quest'altra

$$\int_0^\pi V_n(2,\ 1-x^2\cos^2\varphi)\operatorname{sen}^{2\nu-1}\varphi\, d\varphi = \frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu+1/2)}\, F\left(\frac{1-n}{2},\ -\frac{n}{2},\ \nu+\frac{1}{2},\ x^2\right),$$

---

[31] Cfr. loc. cit. in [8], pag. 201, in cui vi sono però degli errori.
[32] Cfr. loc. cit. in [8], pag. 192.

che, per le ([33])

$$(1-x^2)^{n/2}P^{\nu,n}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{\Gamma(2\nu+n)}{n!\,\Gamma(2\nu)}\,F\left(\frac{1-n}{2},\ \frac{-n}{2},\ \nu+\frac{1}{2},\ x^2\right),$$

può scriversi

$$(21)\qquad \int_0^\pi V_n(2,\ 1-x^2\cos^2\varphi)\,\mathrm{sen}^{2\nu-1}\varphi\,d\varphi=\frac{\Gamma^2(\nu)2^{2\nu}n!}{\Gamma(2\nu+n)}\,(1-x^2)^{n/2}P^{\nu,n}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

Se poniamo per es. nella (21) $\nu=1/2$, si ha

$$\int_0^\pi V_n(2,\ 1-x^2\cos^2\varphi)\,d\varphi=2\pi(1-x^2)^{n/2}P_n\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

In modo analogo si stabiliscono altre, per es. le formule

$$\int_0^\pi U_n(2,\ 1-x^2\cos^2\varphi)\,\mathrm{sen}\,2\varphi\,\mathrm{sen}^{2\nu}\varphi\,d\varphi=0\,,$$

$$\int_0^\pi V_{2k+1}(2x\cos\varphi,\ x^2\cos^2\varphi-y^2)\,\mathrm{sen}^{2\nu-1}\varphi\,d\varphi=0\,,$$

$$\int_0^\pi V_{2k}(2x\cos\varphi,\ x^2\cos^2\varphi-y^2)\,\mathrm{sen}^{2\nu-1}\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu)y^{2k}}{\Gamma(\nu+1/2)}\,F\left(\frac{1}{2}-k,\ -k,\ \nu+\frac{1}{2},\ \frac{x^2}{y^2}\right).$$

8. – Facciamo infine qualche applicazione.

Per es. le serie dei numeri di FIBONACCI possono rappresentarsi mediante $P^{1,n}$. Si ha cioè che tali serie sono date da

$$(-1)^{(n-1)/2}P^{1,n-1}\left(\frac{1}{2i}\right),\qquad (n=0,1,2,\ldots;\quad i=\sqrt{-1});$$

$$i^n\left[2P^{1,n}\left(\frac{1}{2i}\right)+iP^{1,n-1}\left(\frac{1}{2i}\right)\right],\quad (n=0,1,2,\ldots;\quad i=\sqrt{-1}).$$

([33]) Cfr. loc. cit. in ([8]), pag. 108.

Naturalmente invece delle U_n e V_n come ha fatto G. CANDIDO [34], possono applicarsi all'analisi indeterminata di secondo grado, i $P^{1,n}$.

Così, per es., se λ, μ, $(\mu \neq 0)$, è la soluzione intera positiva e minima della

$$x^2 - \delta y^2 = 1\,,$$

con δ intero positivo non quadrato, tutte le sue soluzioni son date da

$$x_n = P^{1,n}(\lambda) - \lambda P^{1,n-1}(\lambda)\,, \qquad y_n = \mu P^{1,n-1}(\lambda)\,.$$

9. – Analoghi ai polinomi studiati precedentemente sono quelli di CAUCHY [35]. Tali polinomi che indichiamo con $\Psi_n(x)$ possono essere definiti con le

$$\Psi_0 = 2, \qquad \Psi_n = \sum_{s=0}^{n} \frac{2n(2n-s-1)!}{(2n-2s)!\, s!\, 2^{2s}}\, x^{n-s}\,.$$

Tenendo allora presente lo sviluppo di $P^{1,2n}(x)$, si ha subito

$$nx^{n-1}P^{1,2n}(i\sqrt{x}) = (-1)^n 2^{2n-1} \mathrm{D}_x x^n \Psi_n(x)\,,$$

da cui per la (8)

$$nx^{n-1}U_{2n+1}(2i\sqrt{x},\, 1) = (-1)^n 2^{2n-1} \mathrm{D}_x x^n \Psi_n(x)\,.$$

In modo analogo si ottiene la

$$V_{2n}(2\sqrt{x},\, -p) = (4p)^n \Psi_n\left(\frac{x}{p}\right). \tag{22}$$

10. – Un'altra elegante formula di passaggio dai V_n ai Ψ_n si ricava tenendo presente che le formule ricorrenti rispetto all'indice dei Ψ_n e V_n sono rispettivamente

$$\Psi_{n+1}(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right)\Psi_n(x) + \frac{1}{2^4}\Psi_{n-1}(x) = 0\,, \qquad \Psi_0 = 2\,, \qquad \Psi_1 = x + \frac{1}{2}\,;$$

$$V_{n+1}(p, q) - pV_n(p, q) + qV_{n-1}(p, q) = 0\,, \qquad V_0 = 2\,, \qquad V_1 = p\,,$$

---

(34) Cfr. G. CANDIDO, loc. cit. in (24).

(35) Cfr. A. CAUCHY, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* (t. I), Paris 1821; ved. pag. 350. Cfr. inoltre N. NIELSEN, *Traité élémentaire des nombres de Bernoulli*, Paris 1923; ved. pp. 101-105.

che coincidono per

$$p = x + \frac{1}{2}, \qquad q = \frac{1}{2^4},$$

quindi è

$$\Psi_n(x) = V_n\left(x + \frac{1}{2}, \frac{1}{2^4}\right). \tag{23}$$

Il confronto di quest'ultima con la (22) dà

$$(4p)^n V_n\left(x + \frac{1}{2}, \frac{1}{2^4}\right) = V_{2n}(2\sqrt{px}, -p), \tag{24}$$

ossia l'elegante formula

$$2^{2n} V_n\left(x + \frac{1}{2}, \frac{1}{2^4}\right) = V_{2n}(2\sqrt{x}, -1),$$

che non sembra sia stata ancora notata.

La (24) dà poi la

$$V_{2qn}(x, p) = (-1)^n 2^{2n} p^{qn} V_n(-V_{2q}(x, p)/(4p^q), 1/2^4),$$

in cui $q = 2^{m-1}$, m intero arbitrario $\geqslant 1$.

11. – Se si vuole qualche altra relazione fra Ψ_n e $P^{\nu,n}$, basta osservare per esempio che dagli sviluppi di tali polinomi si ha subito:

$$\Psi_n(-x^2) = \frac{(-1)^n n}{2^{2n-1}} \lim_{\nu \to 0} [\Gamma(\nu) P^{\nu,2n}(x)],$$

cioè

$$\Psi_n(-\cos^2\theta) = (-1)^n 2^{1-2n} \cos 2n\theta,$$

e quindi

$$\Psi_n(-\operatorname{sen}^2\theta) = 2^{1-2n} \cos 2n\theta.$$

Per un'applicazione della (23) si noti per es. che dall'equazione differenziale

$$(x^2 - 4p) V_n''(x, p) + x V_n'(x, p) - n^2 V_n(x, p) = 0,$$

cui soddisfa $V_n(x, p)$, si trae subito la formula

$$2x(1 + x)\Psi_n''(x) + (2x + 1)\Psi_n'(x) - 2n^2\Psi_n(x) = 0,$$

relativa ai $\Psi_n(x)$.