LUIGI POLETTI (*)

Il contributo italiano alla Tavola dei numeri primi. Tavola dell'undicesimo milione. (**)

1. – I numeri primi di ordine naturale.

La « Association Française pour l'Avancement des Sciences (A.F.A.S.) » nel suo congresso di Nizza (9-12 settembre 1946) eleggeva un *Triumvirato internazionale* nelle persone dei Signori N. G. W. H. BEEGER (presidente), A. GÉRARDIN e L. POLETTI (membri), col compito di fissare le norme preliminari per estendere la tavola dei Numeri Primi (N.P.) al di là del limite raggiunto nella « List of Prime Numbers from 1 to 10 006 721 di D. H. LEHMER (1867-1938) (1). Tale « List of P.N. » è un estratto della « Factor table » dello stesso Autore, e questa è, alla sua volta, una sapiente e rigorosa esumazione e revisione dei precedenti lavori europei disseminati lungo i tre secoli che risalgono fino alle origini della moderna Teoria dei numeri (P. FERMAT, 1601-1665).

Sorvoliamo sull'elenco dettagliato di tali lavori per i quali rimandiamo alle introduzioni delle citate opere di LEHMER e ad altre fonti (2), ma non possiamo a meno di fissare la nostra attenzione su alcune posizioni storiche di maggiore rilievo, alle quali deve essere riferita la posizione *italiana* che è oggetto di

---

(*) Indirizzo: Via Cairoli 1, Pontremoli (Italia).

(**) Ricevuto il 16 marzo 1951.

(1) D. H. LEHMER, *List of Prime Numbers from* 1 *to* 10 006 721 (Carnegie Instit. of Washington, Publ. No. **165**, pp. XVI+133, Washington 1914); *Factor table for the first ten millions containing the smallest factor of every number not divisible by* 2, 3, 5, *or* 7 *between the limits* 0 *and* 10 017 000 (Idem, Publ. No. **105**, pp. X+478, Washington 1909).

(2) L. E. DICKSON, *History of the theory of numbers*, Carnegie Instit. of Washington, Publ. No. **256**, pp. XII+486, Washington 1919. A. GÉRARDIN, *Factorisation quadratique et primalité*, Sphinx-Oedipe, Vol. **27**, pp. 96, 1932 (cfr. pp. 35-44). D. H. LEHMER, *Guide to tables in the theory of numbers*, Publ. National Reserach Council, pp. XIV+177, Washington 1941. G. PALAMÀ, *Una grande impresa: continuazione della tavola dei numeri primi di Lehmer a mezzo delle tavole del Kulik, del Poletti e del Porter*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) **5**, 343-360 (1950).

questa relazione. Si tratta di alcuni nomi eminenti che punteggiano, per così dire, le fasi culminanti di queste ricerche sui N.P.. Essi sono:

1º) J. PH. KULIK (1773-1836), di Leopoli, assistente all'Osservatorio astronomico di Ilmecia in Moravia, ed in seguito professore all'Università di Praga, Egli, *da solo, e nel giro di soli* 20 *anni*, è riuscito a compiere la grande impresa di scomporre, al fattor minimo, tutti i numeri, non divisibili per 2, 3 e 5, compresi fra 3 030 000 e 100 330 201. Tali numeri, entro quei limiti, sono circa 26 000 000 e comprendono circa 5 540 000 N.P., e cioè *oltre otto volte* la massa dei N.P. dati dalla «List of N.P.». Quest'opera enorme, che porta il titolo espressivo di *Magnus canon divisorum*, è di otto Volumi manoscritti di 4 212 pagine complessive, ciascuna delle quali è un casellario di cm. 37×29: ogni casella o è in bianco e rappresenta un N.P., o è occupata dal divisore minimo competente alla casella, e il divisore non è scritto in cifre arabiche ma in simboli letterali (due al massimo per ogni divisore). Per somma jattura quest'opera insigne, che è depositata dal 1867 presso l'Accademia delle Scienze di Vienna, manca del volume 2º che va da 12 642 599 a 22 852 801, smarrito o trafugato nella prima decade del secolo. Questa mutilazione, i molti errori (oltre 200 nel solo 10º milione, rilevati dal LEHMER), la sua stesura in lettere e non in cifre, e le difficoltà di accesso a Vienna, ne rendono quasi impossibile la consultazione. Malgrado ciò essa resta una miniera inesauribile: più che l'opera di un uomo in un ventennio, essa appare come lo sforzo di generazioni. Il LEHMER operò saggiamente quando chiese ed ottenne di poterne eseguire una fotografia estesa alle pagine 302-417 del Volume 1º da 10 009 200 a 12 642 600, da lui depositata presso l'Istituto Carnegie di Washington.

2º) J. C. BURCKARDT, con la scomposizione dei *primi tre milioni* (Parigi, 1814-1817).

3º) J. GLAISHER, con la scomposizione dei *tre milioni successivi* (Londra, 1879-1883).

4º) Z. DASE, con la scomposizione dei *tre milioni successivi* (Amburgo, 1862-1865).

5º) Z. DASE e R. ROSENBERG, col 10º milione (Berlino, in ms.).

Accanto a questi maggiori si hanno altri nomi. Ogni nazione civile vanta uno o più di questi studiosi, ma purtroppo si cerca fra essi invano un *nome italiano*, se facciamo un'eccezione puramente decorativa per LEONARDO FIBONACCI (1175-?) che nel suo famoso *Liber Abaci* (1202) dà la serie dei N.P. entro 100, per P. A. CATALDI (1548-1626) che nel suo *Trattato dei numeri perfetti* dà quelli compresi entro 600, e per il contemporaneo G. PAGLIERO [3] la

---

[3] G. PAGLIERO, *I numeri primi da* 100 000 000 *a* 100 005 000. Atti Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. **46**, 776-770 (1911).

la cui esplorazione entro i primi 5 000 numeri oltre i 100 000 000 ebbe il solo scopo di rilevare alcuni errori attribuiti a W. DAVIS e già fatti oggetto di ricerche da parte di CUNNINGHAM e WOODALL.

L'America si assegnò poi il formidabile compito di sistemare la massa controllabile dei risultati raggiunti entro il limite rotondo dei primi *dieci milioni*, raccogliendo in un testo di *esattezza assoluta* la scomposizione dei numeri non divisibili per 2, 3, 5, 7 ed il relativo elenco dei N.P.. L'opera monumentale, promossa dalla « Carnegie Institution of Washington », diffusa gratuitamente ai maggiori centri scientifici del mondo, apparve con le due date 1909 e 1914 sotto i due citati titoli « Factor tables » e « List of Prime Numbers », e vi sono consacrati i nomi e le opere di tutti i precedenti calcolatori. Ma, come dicevamo, manca il nome dell'Italia.

Ora la Tavola dei N.P. è la base della teoria dei numeri e quindi di tutto l'edifizio delle Scienze esatte, e la sua costruzione si impone quindi come un dovere non inferiore e non dissimile a quello per altri grandi lavori come il catalogo stellare, le carte orografiche e sottomarine, meteorologiche ed isodinamiche, a cui ogni paese civile porta un perenne contributo. È strano dunque che proprio l'Italia, culla del Rinascimento e, da quel tempo in poi, sede tradizionale di alta cultura, sia rimasta assente da un'attività scientifica che s'inquadra in quel regime sperimentale a cui GALILEO aveva dato il proprio nome. Mi si permetta ora di asserire che un oscuro cittadino ha sentito così al vivo questa deficienza italiana da impegnare la propria vita per riscattarla. È sorto così il *Contributo italiano alla Tavola dei N.P.* che ora mi propongo di illustrare.

La mia prima idea, all'apparire della Tavola americana, e coll'intento di fare almeno una modesta affermazione nazionale, fu quella di rendermi conto delle difficoltà tecniche inerenti ad un'applicazione pura e semplice del « Crivello di ERATOSTENE » che, come si sa, consiste nelle due operazoni: a) rappresentazione dei numeri da scomporsi, b) iscrizione del divisore minimo a fronte d'ogni numero rappresentato. Il lavoro procedeva con lenta nomotonìa, quando mi avvidi che poteva invece essere dimostrato ed applicato ad esso il seguente

Principio. *La serie naturale dei numeri interi può essere isolata dai multipli di qualsiasi gruppo di divisori, senza che i numeri rimanenti opportunamente disposti, perdano la possibilità di essere trattati col crivello.*

Questo principio ha dato luogo ad un dispositivo che ho chiamato *Neocribrum* [4]. Esso è un « casellario » *rappresentante* virutualmente tutti i numeri interi non divisibili per 2, 3, 5, ed *indicante* quelli divisibili per 7, 11, 13.

---

[4] L. POLETTI, « *Neocribrum* » *ad numeros partiendos juxta factorem minimum*. Bertocchi, Pontremoli 1948. (In deposito presso U. Hoepli, Milano).

Per la prima proprietà il Neocribrum è disposto su *otto* colonne centrali intestate ai numeri 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 (primi con 30 e minori di 30), lungo le quali si svolgono otto progressioni aritmetiche di forma $30h + r$ (essendo $r = 1, 7, 11, \dots, 29$): la 1ª colonna serve per la rappresentazione dei numeri, ed è la serie illimitata dei multipli di 30; i numeri si leggono col concorso della 1ª colonna e della testata, e perciò risultano primi con 2, 3 e 5.

Per la seconda proprietà il Neocribrum è formato su tredici pagine costituenti un «fascicolo» o *ciclo* lungo il quale il divisore 13 ha *posizioni costanti*: in ogni pagina sono costanti le posizioni di 11, ed in ogni scomparto di 7 righe successive sono costanti le posizioni del 7; globalmente quindi 7, 11 e 13 hanno posizioni fisse nell'intero fascicolo.

Il Neocribrum però suppone la serie naturale spartita in una successione illimitata di intervalli di 30 030 numeri consecutivi a partire rispettivamente da 0 (1° ciclo), 30 030 (2° ciclo), 60 060 (3° ciclo), ..., essendo $30\,030 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13$.

È questa la condizione per cui la fissità di tali divisori risulta valida sino all'infinito.

Inoltre sapendosi che in ogni funzione lineare $ax + b$, dove a e b siano primi fra loro, ogni divisore p primo *apparisce una ed una sola volta* entro p valori consecutivi della funzione, il Neocribrum soddisfa anche alla condizione di prestarsi al Crivello di ERATOSTENE.

Ogni *ciclo* così definito, col numero iniziale rappresentato da $30\,030h + 1$ ha come numero d'ordine il numero $h - 1$.

Infine, come ultima e principale proprietà del Neocribrum osserviamo che siccome, secondo la funzione indicatrice di GAUSS, i numeri non divisibili per 2, 3, 5, 7, 11 e 13 risultano: $\varphi(30\,030) = (2-1)(3-1)(5-1)(7-1)(11-1)(13-1) = 24\,270$, la differenza $30\,030 - 24\,270 = 5\,760$ esprime il numero dei numeri sottoposti alla scomposizione, e cioè meno di 1/6 di 30 030.

L'uso del Neocribrum richiede però un'altra operazione preliminare, per potere applicare ad esso l'azione del Crivello, e cioè quella di calcolare su ogni colonna le posizioni di partenza (*posizioni fondamentali*) per ciascun divisore p da 17 in avanti e per ciascun Ciclo. A questo ha egregiamente provveduto, su questa stessa Rivista (Vol. 1, pp. 85-98, anno 1950), il prof. ing. G. PALAMÀ con un'accurata Tabella fino a $p = 3\,547$ per le «posizioni iniziali» (cioè dal Ciclo 1), e con gli opportuni algoritmi per le «posizioni fondamentali» dei Cicli successivi.

Con tale strumento mi posi all'opera nel 1911.

I risultati si rivelarono ben presto notevoli. Ebbi su ciò, nel 1911, un colloquio con l'eminente storico delle Matematiche prof. GINO LORIA che mi esortò a proseguire e mi suggerì di rivolgermi al suo collega prof. GIULIO

VIVANTI. Oggi debbo riconoscere che senza l'assistenza e l'incoraggiamento di questi due Matematici ogni mio sforzo sarebbe forse stato vano. Ebbi poi la possibilità di avere rapporti con altri Matematici quali C. TORELLI, M. CIPOLLA, F. SEVERI, G. CASTELNUOVO, G. SANSONE, L. BERZOLARI, M. A. BEDARIDA, C. COLONNETTI, A. PERNA, A. COMESSATTI, ecc..

Nel 1920 la massa dei risultati raggiunti parve degna al LORIA ed al VIVANTI di figurare come « un primo notevole contributo italiano », ed il LORIA si offrì di presentarli con una Nota storica. Il volume apparve sotto il titolo *Tavole di N.P. entro limiti diversi e tavole affini* (5), ebbe subito favorevole accoglienza in Italia e all'estero, e venne recensito dallo stesso LEHMER (6). Tale opera contiene fra l'altro:

a) La serie dei N.P. entro 100 000 n. succ. oltre *dieci* milioni.

b) » » » » » 10 000 » » *cento* » .

c) » » » » » 100 000 » » *mille* » .

d) Diverse serie di 1 692 N.P. fra 32 ed 80 milioni.

e) La scomposizione dei primi 50 000 n. non divisibili per 2, 3 e 5.

In seguito anche la zona dei 100 milioni venne estesa all'intero intervallo di 100 000 n. succ. con la collaborazione dell'ing. E. STURANI (7).

Da questo primo saggio che prescindeva dalla continuazione pura e semplice della Tavola americana, traspare invece il disegno di presentare una piattaforma metodica per i rilievi di frequenza dei N.P. di ordine naturale mettendo a nudo successivi intervalli abbastanza vasti (di 100 000 n. succ.) situati ciascuno a distanza decupla dal precedente, in modo da convalidare gli indici di frequenza almeno fino al limite dell'ultimo intervallo (nel caso nostro, il primo miliardo).

L'idea piacque, e recentemente i Sigg. M. KRAITCHIK ed S. HOPPENOT sfiorarono il primo trilione (limitandosi a soli 1 000 n. succ. di quella vetta), talchè oggi è possibile presentare questo quadro:

(5) L. POLETTI, *Tavole di N.P. entro limiti diversi e tavole affini* (pp. XVIII+294), Manuali Hoepli, Milano 1920.

(6) Bull. Amer. Math. Soc. 28 (1922).

(7) L. POLETTI e E. STURANI, *La serie dei N.P. entro i primi centomila n. succ. oltre cento milioni, e la serie dei N.P. da* 14 285 787 *a* 14 299 991, Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend. Cl. Sci. Mat. Nat. 62, 723-750 (1929).

Entro *diecimila* n. succ. esistono:

			N. P.	fonti
oltre	0	milioni	959	tavole note
»	10	»	624	POLETTI
»	100	»	541	POLETTI-STURANI
»	1 000	»	483	POLETTI
»	10 000	»	?	—
»	100 000	»	?	—
»	1 000 000	»	410 (circa)	KRAITCHIK-HOPPENOT.

Questi dati panoramici dettero luogo ad importanti rilievi anche in altri campi. Se ne ha un documento in una interessante Memoria del prof. G. POLVANI nella quale la «legge del caso» è intesa sotto il punto di vista della «totalità dei N.P.» che popolano un dato intervallo [8]. Il POLVANI prendendo le mosse da un grafico cartesiano disegnato dal LORIA [9] sugli elementi di fatto che affiorano oltre 0, 10, 100, 1 000 milioni, ed impostandoli sull'intervallo unitario di 10 000 n. succ., li dispone su venti zone, ed istituendo una geniale trama di *medie* atta a smussare gli scarti troppo vistosi con cui si passa da zona a zona, riesce a mettere in evidenza un giuoco di fluttuazioni tali che il filamento di ogni zona sembra gravitare attorno alla detta legge del caso, «a somiglianza, egli dice, di una ciocca di capelli annodata sull'origine degli assi e distesa lungo la curva di GAUSS»! Ad un dato punto poi l'algoritmo dei calcoli sembra convergere verso il misterioso intervento di π, né ciò deve meravigliare, perchè una tale aderenza è già implicita nella nota formula di GAUSS relativa alla costruibilità elementare dei poligoni regolari di un numero *primo* di lati. Si potrebbe forse aggiungere che questo nesso, appena accennato, preludia ad altri e più profondi connubi fra i due enti π e i N.P., sepolti per ora sotto i velami dell'alta analisi, al modo stesso che nella celebre sintesi di EULERO, i cinque enti fondamentali *unità positiva*, *unità negativa*, *unità immaginaria*, *numero* π, *numero* e si incontrano quasi ad un supremo convegno nella relazione $e^{\pi i} = -1$.

---

[8] G. POLVANI, *Sulla frequenza dei numeri primi*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, **7** (1933).

[9] G. LORIA, *Intorno alla frequenza dei numeri primi*, Atti Soc. Ligustica Sci. Lett. Genova **10**, fasc. 4 (1931).

Posta così in evidenza la necessità di dati empirici per la teoria dei N.P., devo ricordare che nel gennaio 1946 comunicai alla «Deputazione di Storia Patria per le provincie parmensi (sezione di Pontremoli)» che nei tre anni precedenti avevo condotto a termine i seguenti lavori:

1°) La Tavola di scomposizione dei numeri da 10 milioni a 10 200 000.

2°) La Tavola delle «radici riducenti» per la soluzione delle congrurnze quadratiche a modulo primo p, fino a $p = 401$.

3°) Un Atlante di 100 000 N.P. di ordine quadratico entro *cinque miliardi.*

2. – I numeri primi di ordine quadratico.

Anche queste ricerche convergono verso la teoria dei N.P., giacchè, oltre ai problemi di natura quadratica, esse hanno lo scopo di utilizzare le proprietà quadratiche per la scomposizione generale dei numeri: esse infatti hanno già raggiunto importanti sviluppi in virtù di operatori quali CUNNINGHAM, GÉRARDIN, BEEGER, H. LEHMER e molti altri.

Considerando che i risultati di tali lavori sono dati, per lo più, secondo il valore della variabile, senza un conveniente corredo di quadri statistici, e che non hanno in generale uno sviluppo metodico ed atto ad impostare i problemi di frequenza quadratica, quale si va già delineando, mi parve necessario fondere queste varie esigenze su lavori calcolati *ex novo*, e con l'intento che ne risultasse un'opera che avesse la netta fisionomia di un «Sussidiario quadratico» e di un Repertorio di N.P., oltre 10 milioni, tratti da risultati quadratici. Sorvolando su diversi saggi preparatori, questa esplorazione si può riassumere nelle tre fasi seguenti:

a) *Elenco di N.P.* fra 10 milioni e 500 milioni, estratti da serie quadratiche ([10]). Esso comprende 17 200 N.P. da 10 000 813 a 500 196 211, isolati da 29 serie quadratiche con due quadri statistici di frequenza.

b) *Atlante* di 60 000 *N.P.* fra 10 milioni e 3 miliardi (et ultra), da 10 000 813 a 3 035 844 743 tolti da 211 serie e diversi quadri statistici. È un manoscritto di cui la R. Accademia d'Italia fece eseguire una copia che venne depositata, in visione permanente, presso il Consiglio Naz. delle Ricerche pratiche in Roma nel 1938, dove trovasi tuttora. Su di esso la stessa Accademia pubblicò una Memoria descrittiva di ugual titolo ([11]). Nel 1939 l'atlante figurò

([10]) L. POLETTI, *Elenco di N.P. fra* 10 *milioni e* 500 *milioni, estratti da serie quadratiche*, Mem. Accad. Italia, Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. **2**, pp. 107 (1931).

([11]) L. POLETTI, *L'Atlante di oltre* 60 000 *fra* 10 *milioni e* 3 *miliardi* (*et ultra*), Atti Accad. Italia **11**, 275-749 (1940).

alla XXVIII riunione della Società Ital. per il Progr. delle Scienze, che alla unanimità ne propose la pubblicazione ([12]).

c) *Atlante di centomila N.P. di ordine quadratico entro* 5 *miliardi,* che è comprensivo dei precedenti. Su esso è necessario entrare in maggiori ragguagli, perchè esso è oggi *l'unico modello di Atlante quadratico* e anche *il maggiore repertorio di N.P. oltre* 10 *milioni.* Già preannunziato in molte pubblicazioni è atteso dagli studiosi: ad essi posso fornire intanto le seguenti notizie.

Come è noto, si dice «forma quadratica» l'espressione binaria omogenea

$$F = ax^2 + 2bx + cy^2 = (a, b, c)$$

introdotta nella Teoria dei numeri per lo studio della «rappresentabilità» generale dei numeri: la F si dice *primitiva* quando i coefficienti sono primi fra loro, e se supponiamo che il suo discriminante non sia nè zero nè quadrato perfetto, e che la coppia delle variabili assuma soltanto valori primi fra loro, la F possiede la proprietà di rappresentare N.P. in numero *illimitato* come è stato dimostrato da H. WEBER con criteri di Aritmetica analitica.

L'Atlante è costituito da forme dove $y = 1$, cioè di tipo

$$S = ax^2 + bx + c\,,$$

con coefficienti primi fra loro e con discriminante D che non sia nè zero nè quadrato perfetto, condizioni essenziali perchè la S rappresenti interi primi.

In esso sono elencati 116 914 N.P. da 10 000 813 a 5 101 683 361 dati da 291 serie S, di cui 14 *principali* (o *generatrici*), e 277 da esse dipendenti che, per la loro genesi diremo *serie-quozienti,* non ancora introdotte nella teoria delle forme quadratiche, di cui è necessario dare un cenno sommario per le loro conseguenze in seno alla teoria stessa.

A tal uopo poniamo la congruenza (essendo m qualunque)

$$S = ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod{m}\,.$$

Quando essa sia *possibile,* avremo come risultato *una, due* (se m è primo) o *più* (se m è composto) *radici risolventi*: se x' è una di tali radici, potremo scrivere

$$ax'^2 + bx' + c = mq\;;$$

([12]) Cfr. pp. 70 e 121 di «Atti Soc. Ital. Prog. Scienze», 28ª Riunione di Pisa (11-15 ottobre 1939), Roma 1940.

operando sulla S la sostituzione lineare $x = x' + my$, otterremo

$$S' = a(x' + my)^2 + b(x' + my) + c$$

equivalente alla S, e che rispetto alla nuova variabile possiede lo stesso discriminante ed ammette quindi gli stessi divisori primi della S. Eseguendo ora e semplificando sulla S' si ottiene

$$S' = am^2y^2 + m(2ax' + b)y + mq$$

che è divisibile per m; ed eseguendo tale divisione avremo infine

$$S'/m = amy^2 + (2ax' + b)y + q$$

che diremo *serie-quoziente* di S (mod m).

Diremo *monocorrente*, *bicorrente*, o *pluricorrente* un divisore m che ricorre una, due, o più volte lungo m termini della S, ed in correlazione diremo *monogenite*, *gemelle*, *plurigenite* le rispettive serie-quozienti.

Ma siccome l'Atlante rivela che *due* o *più* serie-quozienti di uguale modulo uscenti dalla medesima generatrice *presentano, asintoticamente, uguale frequenza di termini primi*, fatto assolutamente *nuovo* nel regime quadratico, converrà concedere una breve attenzione a questo importante fenomeno.

È noto che nel campo *lineare*, rappresentato dalla funzione $s = ax + b$, con b primo con a, e assumente tutti i $\varphi(a)$ (essendo φ la funzione indicatrice di GAUSS) valori minori di a, la s rappresenta *propriamente* tutti i N.P. della serie naturale, fissabili da determinate coppie di valori b e x (portando x fino all'infinito), e schierati lungo $\varphi(a)$ progressioni aritmetiche aventi a come ragione, e come primo termine ciascuno dei $\varphi(a)$ valori di b, nelle quali si verifica il fenomeno della equifrequenza di valori primi per ognuna delle progressioni (esclusi i divisori primi di a).

L'equifrequenza lineare è un fenomeno ormai largamente acquisito che vogliamo qui illustrare con un esempio tratto dalla funzione lineare $30h + r$, con $r = 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$, sulla quale è modellato il *Neocribrum*. Risulta che entro l'intervallo da 1 a 300 000, dove, secondo la « List of Prime Numbers » di D. H. LEHMER, sono elencati 26 021 N.P., la funzione $30h + r$ precisa che esistono i seguenti quantitativi di N.P.:

3 237 ; 3 251 ; 3 248 ; 3 227 ; 3 266 ; 3 220 ; 3 250 ; 3 269 ,

ordinatamente per $r = 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$, e quindi in totale 26 018 N.P.. La differenza di tre unità dipende dal fatto che i tre N.P. 2, 3, 5 sono divisori di 30 e quindi non sono contenuti nella forma lineare $30\,h + r$. Da quanto si è ora detto seguono i rilievi seguenti:

I N.P. di forma	$10h + 1$	sono	. . . .	$3237 + 3248 = 6485$
» » »	$10h + 3$	»	. . . .	$3277 + 3250 = 6527$
» » »	$10h + 7$	»	. . . .	$3251 + 3266 = 6517$
» » »	$10h + 9$	»	. . . .	$3220 + 3269 = 6489$
		Totale	. . . .	26018.

I N.P. di forma	$6h + 1$	sono	$3277 + 3251 + 3277 + 3220 = 12985$
» » »	$6h + 5$	»	$3248 + 3366 + 3250 + 3269 = 13033$
		Totale	26018.

I N.P. di forma	$4h + 1$	sono	$3237 + 3277 + 3220 + 3269 = 13003$
» » »	$4h + 3$	»	$3251 + 3248 + 3266 + 3250 = 13015$
		Totale	26018.

Fenomeni analoghi sono copiosamente rivelati dall'Atlante nel campo quadratico. Così le due serie-gemelle (mod 41) della serie $E = x^2 + x + 41$, entro i loro primi 1850 termini, dànno rispettivamente 237 e 243 termini primi, e le quattro plurigenite (mod 65) della $D = 2x^2 + 2x + 1$ ne dànno rispettivamente 57, 51, 49 e 59 nell'intervallo unico entro cui sono sviluppate.

Ma qui importa istituire un altro parallelo fra i *divisori primi* ammessi da una serie *lineare* e quelli ammessi da una serie *quadratica.*

Abbiamo visto più sopra che le $\varphi(a)$ serie lineari di tipo $ax + b$, con a e b primi fra loro, rappresentano *propriamente* tutti i N.P. eccetto quelli che dividono a, e che quindi ciascuna di esse ne rappresenta $1/\varphi(a)$. Ricordiamo ora che la funzione quadratica

$$S = ax^2 + bx + c$$

per mezzo di facili trasformazioni può ridursi alla forma

$$4aS = (2ax + b)^2 - D\,, \qquad (D \text{ discriminante}),$$

da cui la congruenza

$$(2ax + b)^2 \equiv D \pmod{p}\,,$$

e risulta che il discriminante deve essere *resto quadratico* di p; perciò ogni divisore di S dovrà avere una delle forme lineari $hD + r$. Ma si sa che le forme ammesse sono $\varphi(a)/2$, da cui risulterà che la S ammetterà, come divisori primi, *la metà asintotica* della serie naturale dei N.P., come del resto è rivelato dall'Atlante per tutte le S ivi trattate.

Partendo da questo principio pratico, notiamo d'aver dimostrato altrove (13) un teorema così esprimibile:

« Se S_1, S_2 sono funzioni quadratiche (definite come sopra) di discriminanti « primi rispettivi D_1, D_2, e se S_3 è una funzione quadratica di discriminante « $D_3 = D_1 D_2$, la terna S_1, S_2, S_3 rispetto alla distribuzione dei divisori primi « dà luogo alla seguente proprietà selettiva: Ciascun elemento della terna « *ammette* soltanto i divisori primi *ammessi* dagli altri due od *esclusi* dagli altri « due; e vale la seguente proprietà cumulativa: La terna ammette globalmente tutti i divisori primi compreso il 2. »

Risulta da ciò che ogni coppia di funzioni S_1, S_2 spartisce la serie naturale dei N.P. in quattro masse asintoticamente uguali: 1°) quelli che dividono soltanto S_1; 2°) quelli che dividono soltanto S_2; 3°) quelli che le dividono entrambe; 4°) quelli che non dividono nessuna di esse.

Ma i dati dell'Atlante suggeriscono che il principio è anche più vasto:

« Date n funzioni quadratiche, definite come sopra, con discriminanti di« versi, e tali che nessuno sia il prodotto di due di essi, tutti i divisori primi « della serie naturale risultano spartiti in 2^n masse asintoticamente uguali ed « assegnabili: 1°) ad ogni singola funzione, 2°) ad ogni coppia di funzioni, « 3°) ad ogni terna di funzioni, e così via, in modo che la penultima massa « comprenda i divisori comuni a tutte le funzioni, e l'ultima quelli esclusi da « tutte le funzioni. »

Questo fenomeno è ampiamente illustrato dai dati dell'Atlante, e noi ne daremo un esempio tratto dalle quattro funzioni:

$$A = x^2 + x - 1\,, \quad B = x^2 + x + 1\,, \quad E = x^2 + x + 41\,, \quad F = x^2 + x + 17\,.$$

Divisori esclusivi di A . .	n. 75
» » » B . .	» 78
» » » E . .	» 78
» » » F . .	» 82
Gruppo (A, B)	» 87
» (A, E)	» 83
» (A, F)	» 76
» (B, E)	» 77
» (B, F)	» 81
» (E, F)	» 76.

Gruppo (A, B, E) . . .	n. 72
» (A, B, F) . . .	» 77
» (A, E, F) . . .	» 73
» (B, E, F) . . .	» 75
» (A, B, E, F) . .	» 65
Esclusi da A, B, E, F .	» 75
Totale	» 1230.

(13) Vedasi loc. cit. in (11).

Questi dati statistici sono relativi ai 1230 N.P. fra 2 e 10007.

Ed ora una osservazione. Il potere asserire, ad esempio, che esistendo una funzione quadratica come $B = x^2 + x + 1$ ammettente *soltanto* i divisori primi uscenti in 1 ed in 9, i quali sono numericamente *la metà* della serie dei N.P., *non può esistere* una funzione X che ammetta *l'altra metà* rappresentata da quelli uscenti in 3 ed in 7, ed il poter accertare che un gruppo n, per quanto grande, di funzioni diverse e a discriminante primo, *non potrà mai impegnare* globalmente tutta la serie dei numeri primi, perchè $1/2^n$ di essa sfuggirà sempre a tale reclutamento.

L'Atlante è il risultato di elementi statistici raccolti dalla scomposizione delle seguenti funzioni quadratiche:

Simbolo e forma delle *serie principali*		Limite della variabile	Numero delle *serie-quozienti*
$A = x^2 + x - 1 = x(x+1) - 1$		23056	11
$B = x^2 + x + 1 = x(x+1) + 1$		23056	14
$C = 2x^2 + 2x - 1 = 2x(x+1) - 1$		27567	39
$D = 2x^2 + 2x + 1 = 2x(x+1) + 1 = x^2 + (x+1)^2$		32429	66
$H = 3x^2 + 3x - 1 = 3x(x+1) - 1$		13000	5
$I = 3x^2 + 3x + 1 = 3x(x+1) + 1$		13000	6
$E = x^2 + x + 41$	(EULERO)	55102	43
$F = x^2 + x + 17$		16000	6
$G = 6x^2 + 6x + 31$		13015	11
$P = x^2 + 21x + 1$		15095	1
$L = x^2 + x + 19421$	(LEHMER)	32147	8
$B' = x^2 + x + 27941$	(BEEGER)	16356	—
$B'' = x^2 + x + 72491$	(»)	16345	—
$Z = x^2 + x + 146452961$	(LEHMER)	70400	67
Serie principali n. 14.		Serie-quozienti n.	277

All'Elenco dei N.P. formato su 234 pagine di 500 N.P. ciascuna, segue un *prospetto-indice* che, per ogni serie dà il simbolo e la forma di esse, il limite della variabile, la totalità dei termini primi entro ed oltre 10 milioni, le cifre finali in cui escono i N.P. di ogni serie ed i rapporti di proporzionalità secondo tali uscite, la massima sequenza in termini composti, la sua ubicazione, ed il più alto termine raggiunto da ciascuna serie.

Seguono un quadro che dà il gettito di ciascuna serie entro limiti unitari più ristretti, e diversi altri quadri che si interessano alla distribuzione dei divisori primi, ed infine un Elenco dei divisori primi di alcune serie, con la posizione della radice minore, entro i limiti dei primi 10000 N.P. della serie naturale.

Varie fra le serie trattate hanno molta importanza. Le prime sei, prese a due a due, sono rispettivamente il *prodotto*, il *doppio-prodotto*, il *triplo-prodotto* di due numeri consecutivi *meno o più* 1, e l'Atlante rivela che i N.P. dati dalla prima coppia stanno nel rapporto approssimativo dei due discriminanti, quelli della seconda in rapporto eguale fra loro, e quelli della terza nel rapporto di 4 a 5.

Notevole è la serie D che essendo la somma di due quadrati consecutivi ammette i soli divisori di forma $4h+1$, e poichè genera un numero illimitato di termini quadrati, si presenta come *il luogo di tutti i triangoli pitagorici* dove la differenza dei cateti è 1. I quadrati successivi della D sono dati dalla successione

$$1;\quad 5;\quad 29;\quad 169;\quad 985;\quad 5741;\quad \ldots$$

nella quale i termini, a partire dal terzo, si deducono con la legge di « moltiplicare il precedente per 6 e sottrarre l'antiprecedente ». Onde, tenendo presente l'eguaglianza pitagorica $z^2 = x^2 + (x+1)^2$, si può comporre il quadro:

ipotenusa . . .	z	1	5	29	169	985	5741	...,
cateto	x	0	3	20	119	696	4059	...,
»	$x+1$	1	4	21	120	697	4060	...,

dove i termini x si deducono con la legge di « moltiplicare per 4 il termine di z sovrastante il precedente, ed aggiungere l'antiprecedente di x », come dall'esempio $696 = 4 \times 169 + 20$.

La E è la famosa serie scoperta da EULERO (14) che chiude il misterioso gruppo delle cinque funzioni, di tipo $x^2 + x + p$,

$$x^2+x+3, \quad N = x^2+x+5, \quad x^2+x+11, \quad F = x^2+x+17, \quad E = x^2+x+41,$$

caratterizzate dai seguenti fatti:

1°) Il termine indipendente p è primo, ed i primi p termini della funzione sono primi.

2°) Il discriminante è primo.

3°) $p+2$ è primo.

4°) Entro i primi p termini la forma binaria (1, 1, 41) ammette soltanto termini primi (con dimostrazione di FROBENIUS (15), estensibile agli altri quattro termini indipendenti).

---

(14) L. EULER, Mém. de Berlin pour 1772 (cfr. pag. 3).

(15) Sitzungberichte Akad. Wissen. **40** (1912).

5°) Il gruppo dei p, nell'ordine 3, 5, 11, 17, 41, dà luogo a questi rilievi: la somma degli estremi è quadrupla del medio, e quella degli adiacenti agli estremi è doppia del medio.

6°) Non risulta l'esistenza di un p maggiore di 41.

7°) Al gruppo appartiene la N che ha la seguente importante proprietà: « L'integrale numerico di N termini consecutivi di ogni funzione quadratica « è divisibile per il corrispondente valore di N ».

L'esistenza e l'importanza di funzioni quadratiche di tipo $x^2 + x + h$ capaci di escludere tutti i divisori primi da 2 a p, indussero l'illustre aritmologo D. H. LEHMER a studiarne il problema per mezzo di una geniale macchina calcolatrice, per valori di p superiori a 41. Egli stabilì questo elenco [16]:

$L = x^2 + x +$	19 421	esclud.	fino a	43	$x^2 + x +$	12 899 891	fino a	71
»	333 491	»	»	47	»	24 073 871	»	79
»	601 037	»	»	59	»	28 537 121	»	83
»	5 237 651	»	»	61	»	67 374 467	»	103
»	9 063 641	»	»	67	$Z = x^2 + x +$	146 452 961	»	107.

A fronte delle 10 funzioni Lehmeriane, il Sig. BEEGER mi comunicò, nel 1938, le due serie

$$B' = x^2 + x + 27\,941\,, \qquad B'' = x^2 + x + 72\,941$$

da lui calcolate ed escludenti i divisori fino a 43, nonchè una lista di 9 funzioni analoghe alle Lehmeriane ma con h *negativo*, delle quali i termini indipendenti sono rispettivamente: -1, -13, -43, -73, -109, $-2\,293$, $-6\,163$, $-16\,523$, $-52\,509$, escludenti rispettivamente tutti i divisori fino a 3, 5, 11, 13, 17, 23, 29, 31, 59.

L'ambiente di queste funzioni dove l'esclusione dei divisori minori di p può, teoricamente, spingersi fino a qualsiasi limite di p, lascia prevedere che coll'innalzarsi di p debbano diradarsi i termini *composti*, ed addensarsi invece i termini primi, come è dimostrato dalla storica serie di EULERO che, nell'Atlante rivela 18 667 termini primi entro i primi 55 102 termini della serie.

Per questo ed anche in seguito a viva istanza degli illustri scopritori accettai di scomporre le serie L, B', B'', Z, e di includerne i risultati nello stesso Atlante. Da questi lavori risulta, ad esempio, che la $Z = x^2 + x + 146\,452\,961$ sviluppata nell'Atlante fino a $x = 70\,400$, e recentemente fino a $x = 75\,000$, tiene il primato assoluto su tutte le serie quadratiche, e lo conserverà forse per secoli, giacchè la sua successiva che dovrebbe escludere anche $p = 113$ presenta difficoltà quasi insuperabili alla sua identificazione, poichè secondo

(16) Sphinx 6, 212-214 (1936).

lo stesso LEHMER dovrebbe avere un termine indipendente maggiore di 1 250 000 000., ed un discriminante di 6 miliardi.

3. – L'opera del Triumvirato.

Il Triumvirato, con sede ufficiale in Amsterdam presso il presidente Sig. BEEGER ([17]), uno fra i più eminenti aritmologi, appena investito del mandato affidatogli dalla A.F.A.S., prese atto che esistevano *in inedito* i seguenti lavori oltre 10 *milioni*:

1°) La Tavola di KULIK, non consultabile in Vienna ma fotografata dal LEHMER, per l'intervallo delle ultime 44 pagine del 1° Vol., da 10 009 200 a 12 642 600, documento fotografico presso l'Istituto Carnegie di Washington.

2°) La Tavola dell'11° e 12° milione di V. GOLUBEV, presso l'Istituto Stekloff di Mosca, diretto dal Sig. VINOGRADOV.

3°) La Tavola da 10 milioni a 10 200 000 di L. POLETTI, in Pontremoli.

4°) La Tavola del 16° milione di W. P. DURFEE presso l'Am. Math. Soc. in Filadelfia.

In base a tali disponibilità la Commissione decise di dedicarsi, come oggetto preliminare, alla edizione della Tavola dell'11° e 12° milione, curandola con quella *esattezza assoluta* che ha reso immortale l'opera di D. H. LEHMER.

A questo punto è necessario avvertire che il membro francese Sig. GÉRARDIN, non avendo potuto prender parte ai lavori per ragioni di salute, fu assunto in sua vece il membro aggiunto Sig. A. GLODEN dell'Ateneo di Luxembourg, di reputazione internazionale per numerosi ed ammirati lavori nella teoria dei numeri primi.

Il Sig. BEEGER scrisse all'Istituto Carnegie che mandò subito un microfilm, ricavato dalla citata fotografia, che fu tosto ingrandito al naturale, parte a spese del presidente Sig. BEEGER, parte a spese del Municipio di Luxembourg, ed i relativi lavori di trascizione in cifre arabiche e dei successivi controlli coi citati manoscritti inediti, rimasero così divisi in parti uguali fra il BEEGER ed il GLODEN. Il BEEGER scrisse pure al Sig. VINOGRADOV a Mosca, ma questi, in una risposta lungamente attesa, rifiutò la collaborazione, allegando che la Russia intendeva di pubblicare *per conto proprio* il lavoro di GOLUBEV. Allora io, come membro italiano, allo scopo di assicurare il programma dell'11° e 12° milione, mi offrii immediatamente di sostituire il mancato apporto russo. Così oggi, per mezzo del *Neocribrum*, ho potuto spingere la mia Tavola fino a 12 642 630, invadendo quasi due terzi del 13° milione; in pari tempo ho pensato di interessarmi anche del 16° milione di DURFEE, ed in vista di un eventuale controllo di quella Tavola, collegato al progetto,

---

([17]) Indirizzo: Nicolaas Witsenkade 10, Amsterdam (C), Olanda.

da me proposto, di *ricostruire il 2° Volume perduto di* KULIK, ho inviato a Filadelfia i primi quattro fascicoli-Neocribrum che vanno da 14 984 970 a 15 105 090.

I lavori del Triumvirato procedono nel modo seguente.

I Sigg. BEEGER e GLODEN trascrivono in simboli arabici il testo fotografico di KULIK, in attesa del testo di POLETTI che giunge colà in plichi periodici di 4 oppure 5 fascicoli-Neocribrum (spediti dal Municipio di Pontremoli che con tale atto intende anche di adeguarsi agli esempi di Amsterdam e di Luxembourg). Dal confronto KULIK-POLETTI deve scaturire il risultato *rigorosamente esatto*, data la trascurabile probabilità che i due calcolatori siano incorsi in un medesimo errore. Ma avviene in molti casi che il testo di KULIK risulti illeggibile, o per difettosità originale o per deficienze dovute alla duplice riproduzione fotografica. A dissipare questa difficoltà giunse in buon punto la notizia che uno studioso inglese, il Dr. R. J. PORTER di Hull, aveva costruito la Tavola dell'11° milione. Il BEEGER postosi in relazione con lui, gli propose la collaborazione come membro aggiunto. In seguito a tale fortunata coincidenza, il Triumvirato su mia proposta deliberò di pubblicare quanto prima la *Tavola dei N.P. dell'11° milione* sotto la sigla KULIK-POLETTI-PORTER e si rivolse ai governi di Francia, Inghilterra, Italia, Olanda e Lussemburgo, paesi d'origine dei cinque collaboratori, onde avere da ciascuno di essi un contributo di 200 fiorini olandesi per le spese editoriali. Quest'opera è già in corso di pubblicazione presso un editore di Amsterdam.

4. – Il bilancio del contributo italiano.

Facciamo ora un po' di bilancio riassuntivo del « Contributo italiano ai lavori pratici sui N.P. » lungo il quarantennio che intercede dalla pubblicazione della grande opera americana.

Regioni numeriche	*Totale dei numeri primi calcolati*
1°) 11° milione	61 938
2°) Intervallo dei 100 000 numeri oltre 100 milioni .	5 410
3°) Idem oltre 1 000 milioni	4 833
4°) Da 32 a 80 milioni	1 692
5°) Da 14 287 717 a 14 299 991	861
6°) 12° milione	61 545
7°) 13° milione (22 ciclo-fascicoli)	41 501
8°) 16° milione (7 ciclo-fascicoli)	12 806
N.P. di ordine naturale n.	190 586
» » » quadratico n.	116 914
Totale generale n.	307 500.

Se questo insieme di N.P. fosse schierato lungo le colonne della « List of Prime Numbers » (che copre 133 pagine in ragione di 5 000 N.P. per pagina) vi occuperebbe 61 pagine e cioè l'intervallo numerico di oltre *quattro milioni* di numeri consecutivi, superando — *ad personam* — i singoli contributi francese, inglese e tedesco, nei classici nomi di BURCKARDT, GLAISHER, DASE, fioriti in quel 1800 che passa come il secolo d'oro di tali lavori. Se poi pensiamo che questo blocco di risultati è situato in gran parte verso centinaia e migliaia di milioni, non può sembrare nè arrischiato nè irriverente anche un raffronto con la stessa Tavola americana, la quale ha bensì il pregio della vastità e della perfezione, ma è, in fondo, una revisione delle altrui fatiche, mentre qui siamo di fronte ad esplorazioni interamente condotte su terreno vergine. Solo davanti all'opera di KULIK si smarrisce ogni velleità di paragoni: più che l'opera di un uomo nel breve corso della sua vita, essa appare come lo sforzo di generazioni, anzi come una inesauribile miniera a cui la scienza, in tempi più maturi, si riserbava di attingere.

Per i quali tempi sembra giunta finalmente l'ora propizia, dal momento che l'A.F.A.S. propone una campagna numerica senza assegnazione di limiti, che non potrebbe essere condotta senza l'intervento di quella gigantesca riserva, ma il valore di questa non potrebbe essere realizzato senza controllare ciò che resta del 1° Volume oltre 11 milioni e senza ricostruire con pari rigore il 2° Volume mancante. Soltanto dopo ciò il colossale lavoro di KULIK potrà assumere la sua funzione definitiva di controllo entro l'intervallo « rotondo » di cento milioni. In questo senso ho fatto una formale proposta in seno al Triumvirato, ed ho l'onore di rinnovarla in questa « Rivista di Matematica ».

Noto qui di passaggio che il compimento del 1° Volume non implica nessuna difficoltà dal momento che la mia Tavola giunge già a 12 642 630 e che per il 2° Volume è pronta la Tavola del 16° milione di DURFEE a fronte della quale esiste la mia avanzata fino al limite di 15 105 090: per il resto del 2° Volume si potrebbe pensare ad una collaborazione internazionale diffondendo il *Neocribrum* od un tracciato analogo che elimini i divisori 2, 3, 5, 7, 11, 13.

Questo rendiconto statistico, e quindi obiettivo, mentre risponde alla domanda, posta al principio di questo scritto, circa il titolo sotto il quale anche l'Italia viene finalmente accolta fra i benemeriti in queste esplorazioni numeriche, vuol essere davanti alla scienza una resa di conti sulla entità del materiale acquisito. È risultato, infatti, che in Italia sono consultabili:

1°) Un *Atlante di oltre* 100 000 *N.P. di ordine quadratico entro cinque miliardi*, al di là di 10 milioni, con dati vasti e preziosi, in relazione ai fenomeni tuttora oscuri delle frequenze quadratiche.

2°) La più vasta raccolta (sempre in detto Atlante) di N.P. oltre 10 milioni, in massima parte sconosciuti, ed utili per eventuali confronti con elementi noti o calcolabili delle classiche serie di FIBONACCI, FERMAT, FRENICLE, ..., nonchè a quelli della massiccia Tavola di KULIK, di fronte alla quale sono ivi allineati oltre 40 000 N P. entro lo spazio fra 10 milioni e 100 milioni.

3°) La più estesa Tavola di soluzioni quadratiche sotto il titolo « Tavola delle radici riducenti » per le congruenze quadratiche a modulo primo p entro $p = 401$.

Dopo questo resoconto, ed a titolo di conclusione, non sembra inutile rilevare che, alle volte, i risultati di un lavoro scientifico non sono dovuti del tutto al puro istinto per cui l'uomo si sente polarizzato verso le alte verità, ma che spesso, e non è male, interviene in essi una componente sentimentale, a cui uno scienziato di gran nome, il PASTEUR, non dubitò di assegnare una funzione eminente quando disse: « La Scienza non ha Patria, ma i suoi cultori ne hanno una! »