Giorgio Sestini (*)

Esistenza di una soluzione in problemi analoghi a quello di Stefan.

1. - Introduzione.

I problemi di conduzione del calore in corpi che cambiano di stato fisico, con conseguente assorbimento od emissione di calore (*calore latente*), hanno notevole interesse per le pratiche applicazioni.

Rientra in questo tipo di problemi, come è ben noto, lo studio dello stato termico di un corpo il quale, raggiunta una conveniente temperatura, o cambia struttura cristallina o, ad es., se solido fonde.

Uno dei primi studi sull'argomento è dovuto a Stefan e si riferisce alla ricerca della velocità di formazione naturale del ghiaccio ([31], [32], [33]) (1). È questa la ragione della denominazione di *problema di* Stefan data a problemi di questo tipo oggi comunemente usata.

Subito si palesò la difficoltà analitica del problema, in quanto le due fasi, ad es. liquida e solida, restano separate da una incognita superficie variabile col tempo, attraverso alla quale si manifesta l'assorbimento o l'emissione di calore.

Per quanto siano assai notevoli i contributi specialmente delle Scuole Russa ed Americana ([2] a [7], [9], [12], [13], [14], [16], [19] a [29]), il problema nella sua generalità non è risolto, in quanto tutti gli studi si riferiscono al caso unidimensionale, con particolare riguardo a quello del muro indefinito a faccie piane parallele. Lo scopo cui tendono molti dei lavori citati è quello di dare formule, magari approssimate, per il calcolo, ad un certo istante, e della temperatura in un punto di una delle due fasi e della ascissa del piano di separazione tra queste. La diversità dei metodi usati dai diversi Autori tende a dare formule di soluzione atte a rendere il calcolo effettivo il più semplice possibile.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma (Italia).

(1) I numeri in parentesi quadra si riferiscono alla bibliografia posta al termine del lavoro.

Le moderne macchine calcolatrici permettono oggi l'esecuzione assai rapida anche di calcoli lunghi e complicati, così che può considerarsi non più prevalente la preoccupazione di costruire formule approssimate, in ipotesi magari particolarmente onerose, ma assai maneggevoli per il calcolo della soluzione, nei confronti delle questioni esistenziali e di unicità, in ipotesi le più generali possibili, che pertanto acquistano nuovamente di importanza.

Del resto le questioni esistenziali portano il più delle volte alla istituzione di algoritmi di successive approssimazioni, che possono assai bene prestarsi per il calcolo della ricercata soluzione.

Recentemente il sig. EVANS II [7] ha stabilito un teorema di esistenza ed unicità per il problema di STEFAN nel caso del muro indefinito, di spessore l, limitato da due piani paralleli, nell'ipotesi che il cambiamento di stato sia causato da un flusso costante di calore, uniformemente generato su una delle due faccie, essendo l'altra isolata, quando si supponga inizialmente il muro costituito da una unica fase tenuta alla *temperatura critica*. Con tale ipotesi una delle due fasi, quella iniziale, si mantiene costantemente alla temperatura critica, che viene supposta uguale a zero. Assunto quale asse delle x la retta normale alle faccie del muro e come origine un punto della faccia su cui viene generato il flusso di calore, l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema è assicurata, per ogni x in $(0, l)$, nell'intervallo $(0, 1/4)$ per la variabile adimensionale τ legata al tempo t. In tale intervallo la soluzione risulta calcolabile mediante la valutazione dei coefficienti di uno sviluppo in serie, secondo un calcolo già istituito da EVANS II, ISAACSON, MACDONALD [6].

Lo scopo di questo lavoro è, come vedremo, di dimostrare l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema di STEFAN, in un caso assai più generale di quello del sig. EVANS II. Un accorgimento mi ha permesso di rendere valida la dimostrazione per un intervallo di tempo, che, nel caso particolare trattato dal sig. EVANS II, porta ad assegnare alla variabile τ l'intervallo $(0, 1-)$, aperto a destra, anzichè l'intervallo $(0, 1/4)$ richiesto dalla dimostrazione in [7].

Una limitazione per il tempo non può sorprendere. Infatti l'esistenza della soluzione del nostro problema non può sicuramente essere ricercata al di là del tempo necessario a trasformare tutto il mezzo, cui ci si riferisce, nella fase opposta a quella iniziale.

In un secondo lavoro, che sarà pubblicato nel prossimo fascicolo di questa *Rivista*, verranno estesi i risultati di questo e quindi, come caso particolare, quelli del [7] al problema di STEFAN relativo a campi a più dimensioni, dotati di simmetria.

Una parte di questo secondo lavoro verrà riassunta in una comunicazione che terrò ad Istanbul, nel corso dell'ottavo Congresso Internazionale di Meccanica pura e applicata.

2. – Posizione del problema.

Nell'impostazione del problema e nella sua trattazione ci riferiremo, tanto per fissare le idee, ad un mezzo omogeneo di densità ϱ_2, calore specifico c_2 e di costanti di *diffusività* e di *conduzione* k_2 e h_2 rispettivamente, inizialmente allo stato solido, occupante lo strato indefinito di spessore a, compreso tra due piani paralleli.

Assumeremo come piano yz di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale uno dei due piani limitanti lo strato. L'asse delle x risulta allora normale ai due piani. Fisseremo tra un momento il verso positivo di questo asse.

Assegnata la temperatura iniziale del nostro mezzo quale funzione della sola distanza dal piano $x = 0$, pensiamo di creare sulla faccia $x = 0$ una uniforme distribuzione di sorgenti di calore di rendimento variabile col tempo, atte a creare entro il mezzo un flusso di calore attraverso alla superficie stessa, mentre l'altra faccia verrà coperta con un perfetto isolante. Se la distribuzione iniziale di temperatura è tale che su $x = 0$ si abbia la temperatura di fusione del mezzo, non appena su tale faccia il flusso di calore generato uguaglia almeno il calore latente di fusione del mezzo, ha inizio la fusione e, se il flusso di calore continua, la fusione avanza in modo che, ad un certo istante, il mezzo risulta composto di due fasi, una solida ed una liquida, quest'ultima di densità ϱ_1, calore specifico c_1 e costanti di *diffusività* e *conduzione* k_1 e h_1 rispettivamente.

Assumeremo d'ora in avanti come verso positivo dell'asse delle x quello secondo cui avanza la fusione, o, ciò che è lo stesso, quello che va dalla fase liquida alla solida. Nell'ipotesi in cui ci siamo messi, la temperatura al tempo t, in ciascuna delle due fasi, risulta funzione del posto soltanto per tramite della distanza x del punto considerato dal piano $x = 0$.

Indicheremo con $u_1(x, t)$ la temperatura della fase liquida, $u_2(x, t)$ quella della fase solida, con u_1 e u_2 simboli di funzioni con derivate prime continue, e con L il calore latente di fusione del mezzo. Sempre in conseguenza delle ipotesi, la superficie di separazione tra le due fasi è, in ogni istante, un piano parallelo alle faccie dello strato, di equazione $x = \alpha(t)$, con $\alpha(t)$ funzione derivabile da determinarsi.

È evidente che non si perde in generalità a supporre uguale a zero la temperatura critica del nostro mezzo, con che, indicata con $f(x)$ la distribuzione iniziale di temperatura, supporremo $f(0) = 0$. Riterremo inoltre trascurabili, durante il fenomeno, le variazioni di volume.

È ben noto che attraverso $x = \alpha(t)$ si ha una discontinuità nel flusso di calore (cioè tra le derivate prime rispetto ad x delle temperature delle due fasi), in quanto una parte del calore che attraversa la superficie di separazione delle due fasi, viene impiegata nel lavoro di fusione, mentre le temperature delle due fasi risultano, per $x = \alpha(t)$, uguali alla temperatura critica e quindi tra loro.

La discontinuità del flusso è subito valutata scrivendo l'equilibrio termico attraverso a $x = \alpha(t)$, cioè

$$\left[h_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} - h_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}\right]_{x=\alpha(t)} = \varrho_2 L \frac{d\alpha}{dt}. \tag{1}$$

Assegnate le costanti fisiche del nostro mezzo nelle due fasi, il calore latente di fusione, la distribuzione iniziale di temperatura $f(x)$ e il flusso $H(t)$, generato uniformemente al tempo t su $x = 0$, il problema è quello di determinare, in ogni istante ed in ogni punto, le temperature $u_1(x, t)$ ed $u_2(x, t)$ delle due fasi e la legge $x = \alpha(t)$ con cui avanza il piano di separazione tra queste.

Matematicamente le nostre tre funzioni incognite $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$, $\alpha(t)$ devono soddisfare alla (1) e ai due sistemi differenziali alle derivate parziali

$$(\mathrm{A}_1)\ \begin{cases} k_1 \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u_1}{\partial t}, & 0 < x < \alpha(t); \\ h_1 \left[\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right]_{x=0} = -H(t), & \\ u_1[\alpha(t), t] = 0, & \alpha(0) = 0; \end{cases} \qquad (\mathrm{A}_2)\ \begin{cases} k_2 \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u_2}{\partial t}, & \alpha(t) < x < a; \\ u_2(x, 0) = f(x), & \\ u_2[\alpha(t), t] = 0, & \alpha(0) = 0, \\ \left[\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right]_{x=a} = 0. & \end{cases}$$

Fatte sulle due funzioni $f(x)$ ed $H(t)$ alcune ipotesi fisicamente plausibili, o addirittura necessarie, mostreremo che i due sistemi (A_1) e (A_2) ammettono una ed una sola soluzione, per ogni t appartenente ad un conveniente intervallo $(0, T)$, che sarà successivamente precisato (n. 7).

3. – Ipotesi sulle funzioni $f(x)$ e $H(t)$.

Conviene fissare subito le ipotesi sulle due funzioni $f(x)$ e $H(t)$. Supporremo $f(x)$ continua insieme alle sue derivate prima e seconda, soddisfacente alle condizioni $f'(x) \leqslant 0$ e $f''(x) \geqslant 0$ per ogni x in $(0, a)$ e tale da risultare $f(0) = 0$ e $f'(a) = 0$, con che $f(x) \leqslant 0$. A queste ipotesi soddisfa, ad es., la distribuzione della temperatura in una sbarra allo stato di regime, quando i due estremi, abbastanza lontani, siano tenuti a diversa temperatura ([2]). Nella dimostrazione della esistenza si deve poi supporre valida per $f'(0)$ la seguente limitazione

$$\frac{ah_2}{k_2}\,|f'(0)| < \varrho_2 L\,. \tag{2}$$

È questa una limitazione insita nella natura stessa del fenomeno in studio, come faremo subito vedere. Osserviamo infatti che, in stato di regime iniziale, ogni unità di superficie, parallela alle faccie del muro, viene attraversata in media, nell'unità di tempo, da una quantità di calore Q, espressa dal prodotto del gradiente termico medio, nel senso delle temperature crescenti, per il coefficiente di *conduzione* h_2, legato alla *diffusività* k_2 dalla relazione $h_2 = \varrho_2 c_2 k_2$. Sulla faccia $x = 0$ e per $t = 0$ tale quantità di calore uguaglia il flusso creato inizialmente sulla stessa faccia per unità di superficie nell'unità di tempo, cioè $H(0) = -h_2\left[\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right]_{\substack{x=0\\t=0}}$. Indicata con U_a la temperatura della faccia $x = a$, essendo zero quella su $x = 0$, si ha ([3])

$$-h_2\left[\frac{\partial u_2}{\partial x}\right]_{\substack{x=0\\t=0}} = -h_2\,\frac{U_a}{a},$$

e quindi

$$\frac{h_2 a\,|f'(0)|}{k_2} = |U_a|\,\varrho_2 c_2 = \overline{Q}\,.$$

La grandezza $\overline{Q}$ esprime manifestamente la quantità di calore posseduta in media, per $t = 0$, dall'unità di volume del mezzo in esame allo stato solido per effetto del salto termico $|U_a|$. La limitazione (2) impone quindi che $\overline{Q}$ risulti minore del calore necessario per fondere l'unità di volume dello stesso mezzo, cosa questa necessaria se vogliamo che esista il problema della propagazione della fusione e non ci si trovi, fin dall'inizio, di fronte ad una massa completamente fusa.

Quanto alla funzione $H(t)$ supporremo che essa sia continua insieme alla sua derivata prima e non decrescente. Quest'ultima ipotesi, che come vedremo (n. 9) può essere sostituita con l'altra più generale che $H(t)$ sia a variazione limitata in $(0, T)$, mette al sicuro circa la possibilità di arresti nell'avanzamento della fusione, qualora il flusso $H(t)$, decrescendo, non fosse più capace di fornire alla fase solida almeno la quantità di calore necessaria per fondere.

([2]) Cfr. [**17**], pp. 627-628.
([3]) Cfr. [**17**], pp. 622-627.

4. – Relazione fondamentale tra le incognite del problema.

Integriamo, nei due campi piani definiti il primo dalle disuguaglianze $0 \leqslant \tau \leqslant t$ e $0 \leqslant x \leqslant \alpha(t)$ e il secondo dalle disuguaglianze $0 \leqslant \tau \leqslant t$ e $\alpha(t) \leqslant \leqslant x \leqslant a$, rispettivamente le due equazioni

$$k_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial u_1}{\partial t} = 0 , \qquad k_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0 ,$$

tenendo conto delle condizioni iniziali e al contorno, fissate per u_1 e u_2. Si ottiene facilmente

$$h_1 \int_0^t \left[\frac{\partial u_1}{\partial x}\right]_{x=\alpha(\tau)} \mathrm{d}\tau = \frac{h_1}{k_1} \int_0^{\alpha(t)} u_1(x, t)\, \mathrm{d}x - \int_0^t H(\tau)\, \mathrm{d}\tau , \tag{3}$$

$$h_2 \int_0^t \left[\frac{\partial u_2}{\partial x}\right]_{x=\alpha(\tau)} \mathrm{d}\tau = \frac{h_2}{k_2} \int_0^a f(x)\, \mathrm{d}x - \frac{h_2}{k_2} \int_{\alpha(t)}^a u_2(x, t)\, \mathrm{d}x . \tag{4}$$

Integrando la (1) nell'intervallo $(0, t)$ e tenendo conto di (3) e (4), si ottiene

$$L\varrho_2 \alpha(t) = \int_0^t H(\tau)\, \mathrm{d}\tau + \frac{h_2}{k_2} \int_0^a f(x)\, \mathrm{d}x - \frac{h_1}{k_1} \int_0^{\alpha(t)} u_1(x, t)\, \mathrm{d}x - \frac{h_2}{k_2} \int_{\alpha(t)}^a u_2(x, t)\, \mathrm{d}x,$$

e quindi, posto

$$F(t) = \frac{1}{\varrho_2 L} \int_0^t H(\tau)\, \mathrm{d}\tau , \qquad B_0 = \frac{h_2}{L\varrho_2 k_2} \int_0^a f(x)\, \mathrm{d}x , \tag{5}$$

$$B_1 = \frac{h_1}{L\varrho_2 k_1} , \qquad B_2 = \frac{h_2}{L\varrho_2 k_2} ;$$

$$\alpha(t) = F(t) + B_0 - B_1 \int_0^{\alpha(t)} u_1(x, t)\, \mathrm{d}x - B_2 \int_{\alpha(t)}^a u_2(x, t)\, \mathrm{d}x , \tag{6}$$

che è la *relazione fondamentale cercata*. La dimostrazione del teorema di esistenza ed unicità consiste in sostanza nell'applicare un conveniente schema di approssimazioni successive alla (6) e nel mostrare che tale algoritmo converge verso la ricercata soluzione.

5. – Relazioni e limitazioni relative alle successive approssimazioni di $\alpha(t)$.

Per evitare confusioni nel significato degli indici, d'ora in avanti scriveremo $u^{(i)}(x, t)$, $(i = 1, 2)$, al posto di $u_i(x, t)$, riservando l'indice in basso per indicare l'ordine delle successive approssimazioni. Spesso, per semplicità, tralasceremo l'indicazione delle variabili x e t.

Posto

$$\alpha_0(t) = F(t)\,, \tag{7}$$

assumeremo come ennesima approssimazione per $\alpha(t)$ la relazione

$$\alpha_n(t) = F(t) + B_0 - B_1 \int_0^{\alpha_{n-1}} u^{(1)}_{n-1}(x, t)\,\mathrm{d}x - B_2 \int_{\alpha_{n-1}}^{a} u^{(2)}_{n-1}(x, t)\,\mathrm{d}x\,, \tag{8}$$

dove $u^{(1)}_{n-1}(x, t)$ e $u^{(2)}_{n-1}(x, t)$ sono soluzioni dei sistemi differenziali ottenuti da (A_1) ed (A_2) rispettivamente, sostituendo $\alpha(t)$ con $\alpha_{n-1}(t)$, cioè

$$(A^{(1)}_{n-1})\begin{cases} k_1 \dfrac{\partial_2 u^{(1)}_{n-1}}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u^{(1)}_{n-1}}{\partial t}, \quad 0 < x < \alpha_{n-1}\,; \\[2ex] h_1 \left[\dfrac{\partial u^{(1)}_{n-1}}{\partial x}\right]_{x=0} = -H(t)\,, \\[2ex] u^{(1)}_{n-1}[\alpha_{n-1}(t), t] = 0\,, \quad \alpha_{n-1}(0) = 0\,; \end{cases} \qquad (A^{(2)}_{n-1})\begin{cases} k_2 \dfrac{\partial^2 u^{(2)}_{n-1}}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u^{(2)}_{n-1}}{\partial t}, \quad \alpha_{n-1} < x < a\,; \\[2ex] u^{(2)}_{n-1}(x, 0) = f(x)\,, \\[2ex] \left[\dfrac{\partial u^{(2)}_{n-1}}{\partial x}\right]_{x=a} = 0\,, \\[2ex] u^{(2)}_{n-1}[\alpha_{n-1}(t), t] = 0\,, \quad \alpha_{n-1}(0) = 0\,; \end{cases}$$

Per questi sistemi sono ben noti i teoremi di esistenza ed unicità, nonchè i metodi per il calcolo delle relative soluzioni [4].

Cominceremo dal mostrare che le $\alpha_n(t)$ sono funzioni monotone non decrescenti di t, cioè faremo vedere che si ha $\dot{\alpha}_n(t) \geqslant 0$, indicando, come è d'uso, il punto sovrapposto la derivazione rispetto al tempo.

Derivando la (8) rispetto a t, tenuto conto di $(A^{(1)}_{n-1})$ e $(A^{(2)}_{n-1})$, si

---

[4] Cfr. [8], pp. 287-320.

ottiene

$$\dot{\alpha}_n(t) = \frac{1}{\varrho_2 L} H(t) - B_1 \int_0^{\alpha_{n-1}} \frac{\partial u_{n-1}^{(1)}}{\partial t} dx - B_2 \int_{\alpha_{n-1}}^{a} \frac{\partial u_{n-1}^{(2)}}{\partial t} dx =$$

$$= \frac{1}{\varrho_2 L} H(t) - B_1 k_1 \int_0^{\alpha_{n-1}} \frac{\partial^2 u_{n-1}^{(1)}}{\partial x^2} dx - B_2 k_2 \int_{\alpha_{n-1}}^{a} \frac{\partial^2 u_{n-1}^{(2)}}{\partial x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{\varrho_2 L} H(t) - \frac{B_1 k_1}{h_1} H(t) - B_1 k_1 \left[\frac{\partial u_{n-1}^{(1)}}{\partial x}\right]_{x=\alpha_{n-1}} + B_2 k_2 \left[\frac{\partial u_{n-1}^{(2)}}{\partial x}\right]_{x=\alpha_{n-1}} .$$

Da questa, ricordando le (5),

$$\dot{\alpha}_n(t) = - B_1 k_1 \left[\frac{\partial u_{n-1}^{(1)}}{\partial x}\right]_{x=\alpha_{n-1}} + B_2 k_2 \left[\frac{\partial u_{n-1}^{(2)}}{\partial x}\right]_{x=\alpha_{n-1}} . \tag{9}$$

Per determinare il segno di $\dot{\alpha}_n(t)$ occorre valutare il segno rispettivamente di $\left[\frac{\partial u_{n-1}^{(1)}}{\partial x}\right]_{x=\alpha_{n-1}}$ e di $\left[\frac{\partial u_{n-1}^{(2)}}{\partial x}\right]_{x=\alpha_{n-1}}$. Per far questo converrà invocare un noto teorema sugli estremi delle soluzioni delle equazioni paraboliche ([5]). Dato che dovremo più volte, nel corso delle successive dimostrazioni, riferirci a questo teorema, nel seguito lo citeremo con la sigla T. E. Questo teorema, soddisfatte nel campo di definizione le condizioni di regolarità da parte della soluzione di una equazione alle derivate parziali del secondo ordine di tipo parabolico, con assegnate condizioni iniziali e al contorno, e alcune ipotesi sui coefficienti dell'equazione e sui valori iniziali ed al contorno assegnati alla funzione incognita, permette di decidere del segno e dei valori estremi della soluzione della equazione nell'interno del campo, dal segno e dai valori assunti dalla stessa soluzione sulla frontiera del campo stesso.

Cominciamo a studiare il segno di $\left[\frac{\partial u_{n-1}^{(1)}}{\partial x}\right]_{x=\alpha_{n-1}}$. La $u_{n-1}^{(1)}(x,t)$ e il sistema $(A_{n-1}^{(1)})$ soddisfano alle ipotesi di T. E.. Per $x = \alpha_{n-1}(t)$ si ha $u[\alpha_{n-1}(t), t] = 0$; la $u_{n-1}^{(1)}$ non può annullarsi anche per $x = 0$; ciò infatti per T. E. condurrebbe ad affermare che $u_{n-1}^{(1)}$ sarebbe nulla in tutto il campo, cosa questa impossibile, essendo la $\frac{\partial u_{n-1}^{(1)}}{\partial x}$ non identicamente nulla per $x = 0$. La $u_{n-1}^{(1)}$ non può essere poi negativa per $x = 0$. Questa ipotesi porterebbe infatti all'esistenza di un minimo negativo di $u_{n-1}^{(1)}$ internamente al campo, cosa questa non consentita da T. E.. Dovendo allora risultare $u_{n-1}^{(1)} > 0$ su $x = 0$, e quindi internamente al campo, dovrà di necessità aversi $\left[\frac{\partial u_{n-1}^{(1)}}{\partial x}\right]_{x=\alpha_{n-1}} \leqslant 0$.

([5]) Cfr. [18], pp. 694-715.

Per il segno di $\left[\dfrac{\partial u^{(2)}_{n-1}}{\partial x}\right]_{x=\alpha_{n-1}}$ ragioniamo in questo modo. Ribaltiamo il campo ove è definita la $u^{(2)}_{n-1}$ attorno alla retta $x = a$. Nel nuovo campo consideriamo il seguente sistema differenziale

$$k_2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial W}{\partial t} = 0\,, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T\,, \qquad \alpha_{n-1} < x < 2a - \alpha_{n-1}\,;$$

$$W[\alpha_{n-1}(t), t] = W[2a - \alpha_{n-1}(t), t] = 0\,,$$

$$W[x, 0] = \bar{f}(x)\,, \quad \text{con} \quad \bar{f}(x) = f(x) \quad \text{per} \quad x \leqslant a\,, \quad \bar{f}(x) = f(2a - x) \quad \text{per} \quad x \geqslant a.$$

La sua soluzione $W(x, t)$ in $0 \leqslant t \leqslant T$ e $\alpha_{n-1}(t) < x < a$ coincide con $u^{(2)}_{n-1}$ e, essendo $\left[\dfrac{\partial u^{(2)}_{n-1}}{\partial x}\right]_{x=a} = 0$, soddisfa alle condizioni di regolarità richieste da T. E.. Risultando la $W(x, t) \leqslant 0$ sulla frontiera del campo, per T. E. essa risulta tale anche internamente al campo. Questo porta a concludere che anche $u^{(2)}_{n-1}$ è negativa internamente al campo di definizione ed essendo $u^{(2)}_{n-1}[\alpha_{n-1}(t), t] = 0$, ne viene di conseguenza $\left[\dfrac{\partial u^{(2)}_{n-1}}{\partial x}\right]_{x=\alpha_{n-1}} \leqslant 0.$

Osserviamo ora che $-h_1 \left[\dfrac{\partial u^{(1)}_{n-1}}{\partial x}\right]_{x=\alpha_{n-1}}$ rappresenta la quantità di calore che, in $x = \alpha_{n-1}(t)$, entra nell'unità di tempo attraverso alla unità di superficie normale ad x nello straterello fondente, mentre $-h_2 \left[\dfrac{\partial u^{(2)}_{n-1}}{\partial x}\right]_{x=\alpha_{n-1}}$ rappresenta la quantità di calore uscita dallo stesso straterello, attraverso alla unità di superficie normale all'asse x nell'unità di tempo. Dato che vi è stato assorbimento di calore per la fusione, in assenza di sorgenti in seno allo strato fondente, il flusso di calore uscente deve essere minore di quello entrante, con che, ricordando le (5),

$$-B_1 k_1 \left[\frac{\partial u^{(1)}_{n-1}}{\partial x}\right]_{x=\alpha_{n-1}} > -B_2 k_2 \left[\frac{\partial u^{(2)}_{n-1}}{\partial x}\right]_{x=\alpha_{n-1}}$$

e quindi

(10) $$\dot{\alpha}_n(t) > 0\,,$$

cioè, come volevamo dimostrare, le $\alpha_n(t)$ sono funzioni monotone crescenti di t.

Proveremo subito che, qualunque sia n, si ha, per ogni $t \geqslant 0$,

(11) $$\alpha_n(t) \leqslant \alpha_0(t)\,.$$

Posto infatti $\varphi(t) = \alpha_n(t) - \alpha_0(t)$, dalla (8) per le (5), si ha $\varphi(0) = 0$. Derivando la $\varphi(t)$ rispetto al tempo, procedendo come abbiamo fatto per stabilire la (9), si ottiene:

$$\dot{\varphi}(t) = -\frac{1}{\varrho_2 L}\left\{H(t) - \left[-h_1 \frac{\partial u^{(1)}_{n-1}}{\partial x} + h_2 \frac{\partial u^{(2)}_{n-1}}{\partial x}\right]_{x=\alpha_{n-1}}\right\}.$$

Come abbiamo sopra osservato $\left[-h_1 \frac{\partial u^{(1)}_{n-1}}{\partial x} + h_2 \frac{\partial u^{(2)}_{n-1}}{\partial x}\right]_{x=\alpha_{n-1}}$ rappresenta il flusso totale, relativo all'unità di tempo, che attraversa l'unità di superficie normale all'asse x, per $x = \alpha_{n-1}(t)$, nel senso delle x crescenti, a partire dall'istante t. Tale flusso, non essendovi nel mezzo sorgenti di calore, non può superare il flusso di calore immesso, a partire dall'istante t nell'unità di tempo e per unità di superficie normale ad x, nel mezzo, cioè non può superare $H(t)$. Si ha quindi $\dot{\varphi}(t) \leqslant 0$ e perciò, essendo $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t) \leqslant 0$, con che, come volevamo, $\alpha_n(t) \leqslant \alpha_0(t)$.

Vogliamo adesso stabilire alcune relazioni tra le successive approssimazioni di $\alpha(t)$.

Siano α_n ed α_{n-1} due successive approssimazioni di $\alpha(t)$ e consideriamo le due precedenti α_{n-1} e α_{n-2}. Queste ultime soddisferanno ad una delle due relazioni: $\alpha_{n-2} \leqslant \alpha_{n-1}$ o $\alpha_{n-2} > \alpha_{n-1}$. Vogliamo far vedere che α_n e α_{n-1} *soddisfano alla disuguaglianza opposta*. Dalla (8) si ha

$$(12) \quad \alpha_n(t) - \alpha_{n-1}(t) = -B_1 \int_0^{\alpha_{n-1}} u^{(1)}_{n-1}(x, t)\, dx - B_2 \int_{\alpha_{n-1}}^{a} u^{(2)}_{n-1}(x, t)\, dx + \\ + B_1 \int_0^{\alpha_{n-2}} u^{(1)}_{n-2}(x, t)\, dx + B_2 \int_{\alpha_{n-2}}^{a} u^{(2)}_{n-2}(x, t)\, dx .$$

Esaminiamo il caso $\alpha_{n-2} \leqslant \alpha_{n-1}$ in quanto l'altro caso $\alpha_{n-2} > \alpha_{n-1}$ si tratta analogamente.

Dalla (12) si ha

$$(13) \quad \alpha_n(t) - \alpha_{n-1}(t) = B_1 \left[\int_0^{\alpha_{n-2}} (u^{(1)}_{n-2} - u^{(1)}_{n-1})\, dx - \int_{\alpha_{n-2}}^{\alpha_{n-1}} u^{(1)}_{n-1}\, dx\right] + \\ + B_2 \left[\int_{\alpha_{n-2}}^{a} (u^{(2)}_{n-2} - u^{(2)}_{n-1})\, dx + \int_{\alpha_{n-2}}^{\alpha_{n-1}} u^{(2)}_{n-2}\, dx\right].$$

Occorre valutare il segno delle funzioni integrande dei quattro integrali del secondo membro di (13). Abbiamo già rilevato che in tutto il campo di definizione è $u_{n-1}^{(1)} \geqslant 0$; con la solita riflessione del campo rispetto ad $x = a$, applicando a $(A_{n-2}^{(2)})$ il teorema T. E., si vede subito che è $u_{n-2}^{(2)} \leqslant 0$, per ogni t in $(0, T)$ e per x in (α_{n-2}, a). Per le altre due funzioni integrande facciamo le due seguenti posizioni:

$$Z^{(1)}(x, t) = u_{n-2}^{(1)} - u_{n-1}^{(1)} \quad \text{e} \quad Z^{(2)}(x, t) = u_{n-2}^{(2)} - u_{n-1}^{(2)} .$$

Essendo le $u_s^{(1)}$ e le $u_s^{(2)}$, $(s = n-1,\ n-2)$, rispettivamente soluzioni dei sistemi $(A_s^{(1)})$ e $(A_s^{(2)})$, le due funzioni $Z^{(1)}$ e $Z^{(2)}$ soddisfano ai sistemi

$$\left\{\begin{array}{ll} k_1 \dfrac{\partial^2 Z^{(1)}}{\partial x^2} - \dfrac{\partial Z^{(1)}}{\partial t} = 0 , & \left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant t \leqslant T , \\ 0 < x < \alpha_{n-2} ; \end{array}\right. \\ \left[\dfrac{\partial Z^{(1)}}{\partial x}\right]_{x=0} = 0 , & \\ Z^{(1)}[\alpha_{n-2}, t] = -u_{n-1}^{(1)}[\alpha_{n-2}, t] \leqslant 0 , & \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ll} k_2 \dfrac{\partial^2 Z^{(2)}}{\partial x^2} - \dfrac{\partial Z^{(2)}}{\partial t} = 0, & \left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant t \leqslant T, \\ \alpha_{n-1} < x < a ; \end{array}\right. \\ \left[\dfrac{\partial Z^{(2)}}{\partial x}\right]_{x=a} = 0, & Z^{(2)}(x, 0) = 0 , \\ Z^{(2)}[\alpha_{n-1}, t] = u_{n-2}^{(2)}[\alpha_{n-1}, t] \leqslant 0. & \end{array}\right.$$

Essendo rispettivamente $\left[\dfrac{\partial Z^{(1)}}{\partial x}\right]_{x=0} = 0$ e $\left[\dfrac{\partial Z^{(2)}}{\partial x}\right]_{x=a} = 0$, operiamo una riflessione del campo relativo a $Z^{(1)}$ attorno alla retta $x = 0$ e del campo relativo a $Z^{(2)}$ attorno alla retta $x = a$. Consideriamo le due nuove funzioni $\bar{Z}^{(1)}$ e $\bar{Z}^{(2)}$ soddisfacenti rispettivamente ai due sistemi

$$(14) \quad \left\{\begin{array}{ll} k_1 \dfrac{\partial^2 \bar{Z}^{(1)}}{\partial x^2} - \dfrac{\partial \bar{Z}^{(1)}}{\partial t} = 0 , & \left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant t \leqslant T , \\ -\alpha_{n-2} < x < \alpha_{n-2} ; \end{array}\right. \\ \bar{Z}^{(1)}[-\alpha_{n-2}, t] = -u^{(1)}(\alpha_{n-2}, t] \leqslant 0 , & \\ \bar{Z}^{(1)}[\alpha_{n-2}, t] = -u^{(1)}(\alpha_{n-2}, t) \leqslant 0 ; & \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ll} k_2 \dfrac{\partial^2 \bar{Z}^{(2)}}{\partial x^2} - \dfrac{\partial \bar{Z}^{(2)}}{\partial t} = 0 , & \left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant t \leqslant T , \\ \alpha_{n-1} < x < 2a - \alpha_{n-1} ; \end{array}\right. \\ \bar{Z}^{(2)}(x, 0) = 0 , & \\ \bar{Z}^{(2)}[\alpha_{n-1}, t] = u_{n-2}^{(2)}(\alpha_{n-1}, t) \leqslant 0 , & \\ \bar{Z}^{(2)}[2a - \alpha_{n-1}, t] = u_{n-2}^{(2)}(\alpha_{n-1}, t) \leqslant 0 . & \end{array}\right.$$

Le due funzioni $\bar{Z}^{(1)}$ e $\bar{Z}^{(2)}$ coincidono con le funzioni $Z^{(1)}$ e $Z^{(2)}$ per $0 \leqslant t \leqslant T$ e, rispettivamente, per $0 < x < \alpha_{n-2}(t)$ e $\alpha_{n-1}(t) < x < a$. Potendosi applicare T. E. ai due sistemi (14), si ha $\bar{Z}^{(1)}(x, t) \leqslant 0$ e $\bar{Z}^{(2)}(x, t) \leqslant 0$ nei rispettivi campi di definizione. Si ha allora per $0 \leqslant t \leqslant T$,

$$u_{n-2}^{(1)} - u_{n-1}^{(1)} \leqslant 0 \quad \text{e} \quad u_{n-2}^{(2)} - u_{n-1}^{(2)} \leqslant 0$$

e quindi, dalla (13), come volevamo $\alpha_n(t) \leqslant \alpha_{n-1}(t)$. Con analogo procedimento si mostra che, ove sia $\alpha_{n-2} > \alpha_{n-1}$, è $\alpha_{n-1} < \alpha_n$. Resta quindi provato il seguente

Teorema: *Due approssimazioni successive per $\alpha(t)$, secondo la (8), soddisfano alla disuguaglianza opposta a quella che intercorre tra la coppia di approssimazioni di indici immediatamente precedenti.*

Da questo teorema seguono alcune conseguenze assai importanti.

Essendo per (11) $\alpha_1 \leqslant \alpha_0$, si ha $\alpha_2 \geqslant \alpha_1$ e quindi la relazione

$$\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \alpha_0 .$$

Per α_3 si ha intanto $\alpha_3 \leqslant \alpha_2 \leqslant \alpha_0$. È facile dimostrare che è anche $\alpha_3 \geqslant \alpha_1$. Infatti dalla (8) si ha

$$\alpha_3(t) - \alpha_1(t) = B_1 \left[\int_0^{\alpha_2} (u_0^{(1)} - u_2^{(1)})\, dx + \int_{\alpha_2}^{\alpha_0} u_0^{(1)}\, dx \right] + B_2 \left[\int_{\alpha_0}^{a} (u_0^{(2)} - u_2^{(2)})\, dx - \int_{\alpha_2}^{\alpha_0} u_2^{(2)}\, dx \right] ;$$

e, ragionando come per la dimostrazione del precedente teorema, per T. E. si ha subito $\alpha_3 - \alpha_1 \geqslant 0$, con che $\alpha_3 \geqslant \alpha_1$. Procedendo per induzione, ammettiamo che sia $\alpha_{2n} \leqslant \alpha_{2n-2}$ e proviamo che corrispondentemente si ha

$$\alpha_{2n+1} \geqslant \alpha_{2n-1} .$$

Ancor qui, scritto dalla (8)

$$\alpha_{2n+1}(t) - \alpha_{2n-1}(t) = B_1 \left[\int_0^{\alpha_{2n}} (u_{2n-2}^{(1)} - u_{2n}^{(1)})\, dx + \int_{\alpha_{2n}}^{\alpha_{2n-2}} u_{2n-2}^{(1)}\, dx \right] +$$
$$+ B_2 \left[\int_{\alpha_{2n-2}}^{a} (u_{2n-2}^{(2)} - u_{2n}^{(2)})\, dx - \int_{\alpha_{2n}}^{\alpha_{2n-2}} u_{2n}^{(2)}\, dx \right] ,$$

col solito ragionamento, per T. E., si ottiene come volevamo $\alpha_{2n+1} - \alpha_{2n-1} \geqslant 0$, e quindi $\alpha_{2n+1} \geqslant \alpha_{2n-1}$.

Come conseguenza di queste disuguaglianze possiamo concludere: le successive approssimazioni, secondo la (8), per $\alpha(t)$ sono *tutte minori o uguali di* $\alpha_0(t)$. Le *approssimazioni di indice pari formano una successione monotona non crescente limitata inferiormente da* $\alpha_1(t)$; le *approssimazioni di indice dispari formano una successione monotona non decrescente, limitata superiormente da una qualunque approssimazione di indice pari.*

Quanto precede assicura che ciascuna delle successioni formate dalle approssimazioni di $\alpha(t)$, rispettivamente di indice pari o di indice dispari, *ammette limite determinato e finito, per* $n \to \infty$.

6. – Limitazioni per le funzioni $u_n^{(1)}(x, t)$ e $u_n^{(2)}(x, t)$.

Conviene ora stabilire le limitazioni cui devono soddisfare le $u_n^{(1)}(x, t)$ e $u_n^{(2)}(x, t)$.

Operiamo su $(A_n^{(1)})$ il cambiamento di funzione incognita, ponendo

$$u_n^{(1)}(x, t) = V^{(1)}(x, t) - \frac{1}{h_1} xH(t) . \tag{15}$$

La $V^{(1)}(x, t)$ soddisfa allora al sistema

$$(A') \quad \begin{cases} k_1 \dfrac{\partial^2 V^{(1)}}{\partial x^2} - \dfrac{\partial V^{(1)}}{\partial t} = -\dfrac{1}{h_1} x\dot{H}(t) , \quad 0 \leqslant t \leqslant T , \quad 0 < x < \alpha_n \quad ; \\ \left[\dfrac{\partial V^{(1)}}{\partial x}\right]_{x=0} = 0 , \\ V^{(1)}[\alpha_n, t] = \dfrac{1}{h_1} \alpha_n H(t) . \end{cases}$$

Riflettendo il campo rispetto a $x = 0$, essendo $\left[\dfrac{\partial V^{(1)}}{\partial x}\right]_{x=0} = 0$, si può applicare T. E.. Ricordando le ipotesi fatte su $H(t)$, si ha $x\dot{H}(t) \geqslant 0$ (⁶) e $\alpha_n H(t) \geqslant 0$ e quindi per $V^{(1)}$ la limitazione

$$V^{(1)}(x, t) \leqslant \frac{1}{h_1} \alpha_n(t) H(t) .$$

Dalla (15) segue subito per $u_n^{(1)}$ la limitazione cercata

$$0 \leqslant u_n^{(1)}(x, t) \leqslant \frac{1}{h_1} [\alpha_n(t) - x] H(t) . \tag{16}$$

Per trovare una limitazione per $u^{(2)}$ operiamo sul sistema $(A_n^{(2)})$ il cambiamento di funzione

$$- u_n^{(2)}(x, t) = V^{(2)}(x, t) - f(x) . \tag{17}$$

(⁶) *Si osservi* che solo in questo punto usiamo l'ipotesi della non decrescenza di $H(t)$.

Ricordando le ipotesi su $f(x)$, la $V^{(2)}$ soddisfa al sistema

$$\begin{cases} k_2 \dfrac{\partial^2 V^{(2)}}{\partial x^2} - \dfrac{\partial V^{(2)}}{\partial \tau} = k_2 f''(x)\,, \quad t \leqslant \tau \leqslant T\,, \quad t \geqslant 0, \quad \alpha_n < x < a\,; \\ V^{(2)}(x, 0) = 0\,, \\ \left[\dfrac{\partial V^{(2)}}{\partial x}\right]_{x=a} = 0\,, \\ V^{(2)}[\alpha_n, \tau] = f(\alpha_n)\,. \end{cases}$$

Ricordando che è $k_2 f''(x) \geqslant 0$ e $f(\alpha_n) \leqslant 0$, fatta una simmetria del campo attorno ad $x = a$ e applicando T. E., quando si tenga presente che $f(x)$ è funzione decrescente di x mentre $\alpha_n(t)$ è funzione crescente di t, si ottiene subito la limitazione

$$V^{(2)}(x, t) \leqslant f[\alpha_n(t)]\,,$$

che, sostituita in (17), ci fornisce la ricercata limitazione per $u^{(2)}$:

$$(18) \qquad - u_n^{(2)}(x, t) \leqslant f[\alpha_n(t)] - f(x)\,.$$

7. – Dimostrazione della esistenza della soluzione del problema.

Per conseguire la dimostrazione della esistenza della soluzione del nostro problema cominceremo col mostrare che le due successioni delle successive approssimazioni di $\alpha(t)$, rispettivamente di indice pari e di indice dispari formano una coppia di *successioni convergenti*.

Abbiamo (n. 5) già constatato l'esistenza dei limiti di $\{\alpha_{2n+1}\}$ e di $\{\alpha_{2n}\}$; indicati questi limiti con α^* e α^{**} rispettivamente, si tratta di mostrare che si ha $\alpha^* = \alpha^{**}$.

Consideriamo la differenza $\alpha_{2n} - \alpha_{2n+1}$. Ricordando che $\alpha_{2n} > \alpha_{2n-1}$, dalla (8) si ha

$$(19) \qquad \alpha_{2n} - \alpha_{2n+1} = B_1 \left[\int_0^{\alpha_{2n-1}} (u_{2n}^{(1)} - u_{2n-1}^{(1)})\, dx + \int_{\alpha_{2n-1}}^{\alpha_{2n}} u_{2n}^{(1)}\, dx \right] + \\ + B_2 \left[\int_{\alpha_{2n}}^{a} (u_{2n}^{(2)} - u_{2n-1}^{(2)})\, dx - \int_{\alpha_{2n-1}}^{\alpha_{2n}} u_{2n-1}^{(2)}\, dx \right].$$

Con considerazioni del tutto analoghe a quelle fatte nel n. 5, applicando T. E., si ottengono le disuguaglianze

$$0 \leqslant u_{2n}^{(1)} - u_{2n-1}^{(1)} \leqslant \operatorname{Max} u_{2n}(\alpha_{2n-1}, t) \leqslant \frac{1}{h_1} H(t)[\alpha_{2n} - \alpha_{2n-1}],$$

$$0 \leqslant u_{2n}^{(2)} - u_{2n-1}^{(2)} \leqslant \operatorname{Max} [- u_{2n-1}^{(2)}(\alpha_{2n}, t)] \leqslant f(\alpha_{2n-1}) - f(\alpha_{2n}).$$

Dalla (19) si ha allora, per le precedenti, ricordando la (16) e la (18),

$$\alpha_{2n} - \alpha_{2n+1} \leqslant \frac{1}{h_1} B_1 H(t) \left[\alpha_{2n-1}(\alpha_{2n} - \alpha_{2n-1}) + \int_{\alpha_{2n-1}}^{\alpha_{2n}} (\alpha_{2n} - x)\, dx\right] +$$

$$+ B_2 \left\{ (a - \alpha_{2n})[f(\alpha_{2n-1}) - f(\alpha_{2n})] + \int_{\alpha_{2n-1}}^{\alpha_{2n}} [f(\alpha_{2n-1}) - f(x)] dx \right\} =$$

$$= (\alpha_{2n} - \alpha_{2n-1}) \left\{ \frac{1}{h_1} B_1 H(t) \frac{\alpha_{2n} + \alpha_{2n-1}}{2} + B_2(a - \alpha_{2n-1})[- f'(\xi)] \right\},$$

con $\alpha_{2n-1} \leqslant \xi \leqslant \alpha_{2n}$.

Da questa, ricordando le (5) e la (11) e osservando che $-f'(\xi) \leqslant -f'(0)$, si ha

$$\alpha_{2n} - \alpha_{2n+1} \leqslant (\alpha_{2n} - \alpha_{2n-1}) \left\{ \frac{B_1^2 k_1}{h_1^2} H(t) \int_0^t H(\tau)\, d\tau + B_2 a |f'(0)| \right\}.$$

Passando al limite per $n \to \infty$, si ottiene

$$\alpha^{**} - \alpha^* \leqslant (\alpha^{**} - \alpha^*) \left\{ \frac{k_1 B_1^2}{h_1^2} H(t) \int_0^t H(\tau)\, d\tau + B_2 a |f'(0)| \right\}. \tag{20}$$

Essendo $\alpha^{**} \geqslant \alpha^*$, se $\alpha^{**} - \alpha^* \neq 0$ si dovrà avere

$$1 \leqslant \frac{k_1}{h_1^2} B_1^2 H(t) \int_0^t H(\tau)\, d\tau + B_2 a |f'(0)|.$$

Se quindi è

$$\frac{k_1}{h_1^2} B_1^2 H(t) \int_0^t H(\tau)\, d\tau + B_2 a |f'(0)| < 1, \tag{21}$$

la validità di (20) richiede $\alpha^{**} = \alpha^* = \alpha(t)$.

Con le (5), la (21) si scrive

$$0 \leqslant H(t) \int_0^t H(\tau) d\tau < \varrho_2 L k_1 \left\{ \varrho_2 L - \frac{a h_2}{k_2} |f'(0)| \right\}. \tag{22}$$

Questa, ricordando quanto è stato detto nel n. 3 a proposito di (2), fornisce per il tempo t l'intervallo nel quale si ha la convergenza dell'algoritmo delle successive approssimazioni per $\alpha(t)$.

Gioverà qui osservare che se si ha $f(x)$ costantemente nulla e $H(t) = g$ costante, come in [7], la (22) assegna per il tempo t la limitazione

$$0 \leqslant t < \varrho_2^2 L^2 k_1 ,$$

che con le posizioni fatte in [7] (7), porta ad assegnare alla variabile adimensionale τ come campo di variabilità l'intervallo, aperto a destra, $(0, 1-)$ al posto dell'intervallo $(0, 1/4)$ richiesto dalla dimostrazione del sig. EVANS II.

D'ora in avanti ci riferiremo per il tempo t all'intervallo $(0, T)$, dove con T abbiamo indicato l'estremo superiore dei valori di t per cui è valida la (22).

Si può ora dimostrare che dall'esistenza e coincidenza dei due limiti α^* e α^{**} segue l'esistenza dei quattro limiti $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1}^{(1)} = u^{(1)*}$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1}^{(2)} = u^{(2)*}$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n}^{(1)} = u^{(1)**}$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n}^{(2)} = u^{(2)**}$ e la coincidenza di $u^{(1)*}$ con $u^{(1)**}$ e di $u^{(2)*}$ con $u^{(2)**}$.

Limiteremo la dimostrazione ai due limiti $u^{(1)*}$ e $u^{(2)*}$, potendosi evidentemente procedere in modo del tutto analogo per l'altra coppia di limiti.

Poniamo

$$v_p^{(1)} = u_{2(n+p)+1}^{(1)} - u_{2n+1}^{(1)} \qquad \text{e} \qquad v_p^{(2)} = u_{2(n+p)+1}^{(2)} - u_{2n+1}^{(2)} .$$

Essendo $\alpha_{2(n+p)+1} \geqslant \alpha_{2n+1}$, le due funzioni $v_p^{(1)}$ e $v_p^{(2)}$ soddisfano rispettivamente ai due sistemi

$$\begin{cases} k_1 \dfrac{\partial^2 v_p^{(1)}}{\partial x^2} - \dfrac{\partial v_p^{(1)}}{\partial t} = 0 , & \begin{cases} 0 \leqslant t \leqslant T , \\ 0 < x < \alpha_{2n+1} ; \end{cases} \\ h_1 \left[\dfrac{\partial v_p^{(1)}}{\partial x} \right]_{x=0} = 0 , & \\ v_p^{(1)}(\alpha_{2n+1}, t) = u_{2(n+p)+1}^{(1)}(\alpha_{2n+1}, t) \geqslant 0 ; & \end{cases} \qquad \begin{cases} k_2 \dfrac{\partial^2 v_p^{(2)}}{\partial x^2} - \dfrac{\partial v_p^{(2)}}{\partial t} = 0 , & \begin{cases} 0 \leqslant t \leqslant T , \\ \alpha_{2(n+p)+1} \leqslant x < a ; \end{cases} \\ v_p^{(2)}(x, 0) = 0 , & \\ \left[\dfrac{\partial v_p^{(2)}}{\partial x} \right]_{x=a} = 0 , & \\ v_p^{(2)}(\alpha_{2(n+p)+1}, t) = -u_{2n+1}^{(2)}(\alpha_{2(n+p)+1}, t) \geqslant 0 . & \end{cases}$$

Con il procedimento più volte usato per l'applicazione di T. E., tenendo presenti la (16) e la (18), si ottiene

$$v_p^{(1)} \leqslant H(t)(\alpha_{2(n+p)+1} - \alpha_{2n+1}) , \qquad v_p^{(2)} \leqslant f(\alpha_{2n+1}) - f(\alpha_{2(n+p)+1}) .$$

(7) Cfr. [7], pp. 185 e 190.

Da queste, per la continuità di $H(t)$ ed $f(x)$, esistendo il limite $\alpha^* = \lim_{n\to\infty} \alpha_{2n+1}$, per il teorema di CAUCHY, segue, l'esistenza dei due limiti $\lim_{n\to\infty} u^{(1)}_{2n+1} = u^{(1)*}$ e $\lim_{n\to\infty} u^{(2)}_{2n+1} = u^{(2)*}$, come volevamo dimostrare. Come abbiamo sopra accennato, in ugual modo si prova l'esistenza degli altri due limiti $\lim_{n\to\infty} u^{(1)}_{2n} = u^{(1)**}$ e $\lim_{n\to\infty} u^{(2)}_{2n} = u^{(2)**}$.

Con identico procedimento si mostra che essendo $\alpha^* = \alpha^{**}$, è pure $u^{(1)*} = u^{(1)**} = u^{(1)}$ e $u^{(2)*} = u^{(2)**} = u^{(2)}$, per ogni t in $(0, T)$ ed ogni x rispettivamente appartenente all'intervallo $(0, \alpha)$ per il primo limite e (α, a) per il secondo.

Il teorema di esistenza sarà provato quando avremo dimostrato che le due funzioni $u^{(1)}(x, t)$ e $u^{(2)}(x, t)$ soddisfano in $(0, T)$ ai due sistemi $(\mathrm{A}^{(1)})$ e $(\mathrm{A}^{(2)})$ con la condizione (1).

Siano $\bar{u}^{(1)}$ e $\bar{u}^{(2)}$ le soluzioni dei due sistemi $(\mathrm{A}^{(1)})$ e $(\mathrm{A}^{(2)})$ quando α sia il valore comune di α^* e α^{**}.

Posto

$$\bar{\alpha}(t) = F(t) + B_0 - B_1 \int_0^{\alpha} \bar{u}^{(1)}\, dx - B_2 \int_{\alpha}^{a} \bar{u}^{(2)}\, dx, \tag{23}$$

sarà conseguito il teorema quando avremo provato che è

$$\bar{\alpha}(t) = \alpha(t)$$

e quindi

$$\bar{u}^{(1)} = u^{(1)} \qquad \text{e} \qquad \bar{u}^{(2)} = u^{(2)}.$$

Sottraiamo da $\bar{\alpha}(t)$ $\alpha_{2n}(t)$ data da (8). Ricordando che è $\alpha_{2n-1} < \alpha$, si ha

$$\bar{\alpha} - \alpha_{2n} = B_1 \left[\int_0^{\alpha_{2n-1}} (u^{(1)}_{2n-1} - \bar{u}^{(1)})\, dx - \int_{\alpha_{2n-1}}^{\alpha} \bar{u}^{(1)}\, dx \right] +$$

$$+ B_2 \left[\int_{\alpha}^{a} (u^{(2)}_{2n-1} - \bar{u}^{(2)})\, dx + \int_{\alpha_{2n-1}}^{\alpha} u^{(2)}_{2n-1}\, dx \right].$$

Essendo $\bar{u}^{(1)}$ e $u^{(2)}_{2n-1}$ funzioni limitate, e $\lim_{n\to\infty} \alpha_{2n-1} = \alpha$, quando $n \to \infty$ i secondi integrali che compaiono nelle parentesi quadre del secondo membro della precedente tendono a zero. Basterà allora studiare i limiti,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\alpha_{2n-1}} (u^{(1)}_{2n-1} - \bar{u}^{(1)})\, dx, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{\alpha}^{a} (u^{(2)}_{2n-1} - \bar{u}^{(2)})\, dx.$$

Studiando le differenze $u^{(1)}_{2n-1} - \bar{u}^{(1)}$ e $u^{(2)}_{2n-1} - \bar{u}^{(2)}$ con il procedimento più volte usato, in modo da rendere applicabile il T. E., si conclude agevolmente che $u'^{(1)}_{2n-1} - \bar{u}^{(1)}$ è negativa per $0 \leqslant x \leqslant \alpha_{2n-1}$ e t in $(0, T)$, e che ha i suoi estremi su $x = \alpha_{2n-1}$, ove assume il valore $-\bar{u}^{(1)}(\alpha_{2n-1}, t)$. Essendo la $\bar{u}^{(1)}$ funzione continua, il limite di $\bar{u}^{(1)}(\alpha_{2n-1}, t)$ per $n \to \infty$ è zero, essendo uguale a $\bar{u}^{(1)}(\alpha, t) = 0$.

Per la seconda differenza $u^{(2)}_{2n-1} - \bar{u}^{(2)}$ si dimostra che essa è positiva, per $\alpha \leqslant x \leqslant a$ e t in $(0, T)$, e che assume i suoi estremi su $x = \alpha$ ove ha il valore $u^{(2)}_{2n-1}(\alpha, t)$. Essendo $\lim_{n\to\infty} \alpha_{2n-1} = \alpha$ e $\lim_{n\to\infty} u^{(2)}_{2n-1} = u^{(2)}$ si ha, $\lim_{n\to\infty} u^{(2)}_{2n-1}(\alpha, t) = u^{(2)}(\alpha, t) = 0$. Resta quindi provato che anche gli altri due integrali che compaiono in (23) hanno, quando $n \to \infty$, per limite zero. Con ciò risulta come volevamo,

$$\bar{\alpha}(t) = \lim_{n\to\infty} \alpha_{2n}(t) = \alpha(t) .$$

Con metodo diretto, per la definizione di derivata, si dimostra la derivabilità della $\alpha(t)$ rispetto a t e insieme si ottiene la verifica della (1). Il calcolo, non presentando alcuna difficoltà, viene omesso per brevità.

8. – Dimostrazione della unicità della soluzione.

Siano $\alpha(t)$, $u^{(1)}(x, t)$, $u^{(2)}(x, t)$ e $\beta(t)$, $y^{(1)}(x, t)$, $y^{(2)}(x, t)$ due distinte soluzioni di (A_1), (A_2) e (1). Si avrà allora

$$\alpha(t) = F(t) + B_0 - B_1 \int_0^\alpha u^{(1)}\, dx - B_2 \int_\alpha^a u^{(2)}\, dx ,$$

$$\beta(t) = F(t) + B_0 - B_1 \int_0^\beta y^{(1)}\, dx - B_2 \int_\beta^a y^{(2)}\, dx .$$

Supponiamo che ad es. sia $\alpha > \beta$, allora avremo

$$0 \leqslant \alpha - \beta = B_1 \left[\int_0^\beta (y^{(1)} - u^{(1)})\, dx - \int_\beta^\alpha u^{(1)}\, dx \right] + B_2 \left[\int_\alpha^a (y^{(2)} - u^{(2)})\, dx + \int_\beta^\alpha y^{(2)}\, dx \right] .$$

Con le considerazioni più volte usate, applicando T. E., si vede facilmente che l'ultimo membro della precedente relazione è negativo o nullo. Ad evitare l'assurdo dovrà perciò aversi $\alpha = \beta$ e quindi $u^{(1)} = y^{(1)}$ e $u^{(2)} = y^{(2)}$, con che resta dimostrata l'unicità.

9. - Caso di $H(t)$ a variazione limitata in $(0, T)$.

Abbiamo fin qui supposto la funzione $H(t)$ continua, positiva e non decrescente in $(0, T)$. L'ipotesi della non decrescenza ha giocato solo per stabilire (n. 6) la limitazione (16) per le $u_n^{(1)}(x, t)$.

È facile mostrare che ad una analoga limitazione si giunge sostituendo alla ipotesi di $H(t)$ non decrescente quella di $H(t)$ a variazione limitata. Infatti in tale ipotesi la $H(t)$ può riguardarsi come differenza di due funzioni non negative, non decrescenti ([8]).

Posto

$$H(t) = H_1(t) - H_2(t)\,, \tag{24}$$

il sistema (A′) del n. 6 diventa

$$(\mathrm{A}'')\qquad \begin{cases} k_1 \dfrac{\partial^2 V^{(1)}}{\partial x^2} - \dfrac{\partial V^{(1)}}{\partial t} = - x\dot{H}_1(t) + x\dot{H}_2(t), & \begin{cases} 0 \leqslant t \leqslant T, \\ 0 < x < \alpha_n; \end{cases} \\[2ex] \left[\dfrac{\partial V^{(1)}}{\partial x}\right]_{x=0} = 0\,, \\[2ex] V^{(1)}(\alpha_n, t) = \alpha_n H_1(t) - \alpha_n H_2(t)\,, \end{cases}$$

con $\dot{H}_1 \geqslant 0$ e $\dot{H}_2 \geqslant 0$. Poniamo

$$V^{(1)} = V_1^{(1)} - V_2^{(1)}\,.$$

Soddisferemo al sistema (A″) scegliendo $V_1^{(1)}$ e $V_2^{(1)}$ rispettivamente soluzioni dei due sistemi, per $0 \leqslant t \leqslant T$,

$$\begin{cases} k_1 \dfrac{\partial^2 V_1^{(1)}}{\partial x^2} - \dfrac{\partial V_1^{(1)}}{\partial t} = - x\dot{H}_1\,, \quad 0<x<\alpha_n; \\[2ex] \left[\dfrac{\partial V_1^{(1)}}{\partial x}\right]_{x=0} = 0\,, \\[2ex] V_1^{(1)}(\alpha_n, t) = \alpha_n H_1; \end{cases} \qquad \begin{cases} k_2 \dfrac{\partial^2 V_2^{(1)}}{\partial x^2} - \dfrac{\partial V_2^{(1)}}{\partial t} = - x\dot{H}_2\,, \quad 0<x<\alpha_n; \\[2ex] \left[\dfrac{\partial V_2^{(1)}}{\partial x}\right]_{x=0} = 0\,, \\[2ex] V_2^{(1)}(\alpha_n, t) = \alpha_n H_2\,, \end{cases}$$

ciascuno dei quali è formalmente identico a (A′).

([8]) Cfr. [30], pag. 30.

Con gli stessi ragionamenti del n. 6 si conclude che, per $0 < x < \alpha_n$ e t in $(0, T)$, le due funzioni $V_1^{(1)}(x, t)$ e $V_2^{(1)}(x, t)$ risultano non negative con $V_1^{(1)}(x, t) \leqslant \alpha_n(t) H_1(t)$. Si ha allora evidentemente

$$V^{(1)}(x, t) \leqslant V_1^{(1)}(x, t) \leqslant \alpha_n(t) H_1(t)$$

e quindi

$$0 \leqslant u_n^{(1)}(x, t) \leqslant (\alpha_n - x) H_1(t) \,. \tag{25}$$

È questa la limitazione che sostituisce, nella nuova ipotesi la (16). È pacifico che tutti i risultati conseguiti nei numeri precedenti restano validi nella nuova ipotesi per $H(t)$, in quanto possono ottenersi da quelli col solo scambio di $H(t)$ con $H_1(t)$.

Nessun cambiamento è poi da apportarsi alla limitazione (22) per il tempo t. Infatti trasformandosi la (22) nella

$$0 \leqslant H_1(t) \int_0^t H(\tau) d\tau \leqslant \frac{\varrho_2 L k_1}{h_1} \left\{ \varrho_2 L - \frac{a h_2}{k_2} |f'(0)| \right\}, \tag{26}$$

essendo $H(t) \leqslant H_1(t)$, dalla (26) si ha ancora la (22).

Bibliografia.

[1]. H. S. CARSLAW and J. C. JAEGER: *Conduction of heat in solids*, Oxford 1948.

[2]. A. B. DACEV: *Sul problema di Stefan lineare*, Doklady Akad. Nauk. SSSR, **58**, 563-566 (1947), (in Russo).

[3]. A. B. DACEV: *Sul problema di Stefan lineare. Caso di spessore infinito*, Doklady Akad. Nauk. SSSR, **73**, 445-448 (1950), (in Russo).

[4]. A. B. DACEV: *Sul problema di Stefan lineare. Caso delle fasi alternate*, Doklady Akad. Nauk. SSSR, **75**, 631-634 (1950), (in Russo).

[5]. Assène DATZEFF: *Sul problema lineare di Stefan*, Annuaire Univ. Sofia, Fac. Sci. Livre **1**, 45, 321-352 (1949), (in Bulgaro).

[6]. G. W. EVANS II, E. ISAACSON, J. K. L. MACDONALD: *Stefan-like probleme*, Q. Appl. Math. **8**, 312-319 (1950).

[7]. G. W. EVANS II: *A note on the existence of a solution to a problem of Stefan*, Q. Appl. Math. **9**, 185-193 (1951).

[8]. E. GOURSAT: *Cours d'Analyse Mathématique*, T. III, Paris 1927.

[9]. A. HUBER: *Hauptaufsätze über das Fortschreiten der Schmelzgrenze in einen linearen Leiter*, Z. Angew. Math. Mech. **19**, 1-21 (1939).

[10]. E. ISAACSON: cfr. [6].

[11]. J. C. JAEGER: cfr. [1].

[12]. K. LACHMANN: *Zum Problem des Erstarrens für den durch zwei parallele Ebenen begrenzten Körper*, Z. Angew. Math. Mech. **15**, 345-358 (1935).

[13]. H. G. LANDAU: *Heat conduction in a melting solid,* Q. Appl. Math. **8**, 81-94 (1950).
[14]. N. M. H. LIGHTFOOT: *The solidification of molten steel,* Proc. London Math. Soc. (2) **31**, 97-116 (1930).
[15]. J. K. L. MACDONALD: cfr. [6].
[16]. J. W. MILES: *A note on Riemann's method applied to the diffusion equation,* Q. Appl. Math. **8**, 95-101 (1950).
[17]. E. PERUCCA: *Fisica generale e sperimentale,* vol. 1°, IV ed., Torino 1941.
[18]. M. PICONE: *Appunti di Analisi Superiore,* Napoli 1941.
[19]. L. I. RUBINSTEIN: *Sulla soluzione del problema di Sfetan,* Izvestiya Akad. Nauk. SSSR., ser. Geograf. Geofiz., **11**, 37-54 (1947), (in Russo).
[20]. L. I. RUBINSTEIN: *Sulla questione del processo di propagazione del congelamento nella terra ghiacciata,* Izvestiya Akad. Nauk. SSSR., ser. Geograf. Geofiz., **11**, 489-496 (1947), (in Russo).
[21]. L. I. RUBINSTEIN: *Sulla determinazione della posizione della superficie di separazione delle due fasi nel problema di Stefan unidimensionale,* Doklady Akad. Nauk. SSSR., **58**, 217-220 (1947), (in Russo).
[22]. L. I. RUBINSTEIN: *Su una questione relativa alla propagazione del calore in un mezzo eterogeneo,* Izvestiya Akad. Nauk. SSSR., ser. Geograf. Geofiz., **12**, 27-45 (1948), (in Russo).
[23]. L. I. RUBINSTEIN: *Sulla stabilità della superficie di separazione delle fasi in un mezzo bi-fase conduttore del calore,* Izvestiya Akad. Nauk. SSSR., ser. Geograf. Geofiz., **12**, 557-560 (1948), (in Russo).
[24]. L. I. RUBINSTEIN: *Sulla esistenza di una soluzione del problema di Stefan,* Doklady Akad. Nauk. SSSR. (N. S.), **62**, 195-198 (1948), (in Russo).
[25]. L. I. RUBINSTEIN: *Sulla velocità iniziale del fronte di cristallizzazione nel problema di Stefan unidimensionale,* Doklady Akad. Nauk. SSSR., (N. S.), **62**, 753-756 (1948), (in Russo).
[26]. L. I. RUBINSTEIN: *Sul comportamento asintotico del limite di separazione delle fasi nel problema di Stefan unidimensionale,* Doklady Akad. Nauk. SSSR. (N. S.), **77**, 37-40 (1951), (in Russo).
[27]. L. I. RUBINSTEIN: *Sul problema della unicità della soluzione del problema unidimensionale di Stefan nel caso di uno stato omogeneo iniziale del conduttore termico,* Doklady Akad. Nauk. SSSR., (N. S.), **79**, 45-47 (1951), (in Russo).
[28]. L. I. RUBINSTEIN: *Sulla propagazione del calore in un mezzo stratificato con stato di fase variabile,* Doklady Akad. Nauk. SSSR., (N. S.), **79**, 221-224 (1951), (in Russo).
[29]. G. SAITÔ: *On the distribuction of temperature in steel ingols during cooling.* Tôhoku Imp. Univ. Science Reports, **10**, 305-330 (1921).
[30]. G. SANSONE - G. VITALI: *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale,* parte I, Bologna, 1943.
[31] J. STEFAN: *Ueber einige Probleme der Theorie der Wärmeleitung,* S. B. Kais. Akad. Wiss. Wien, **98**, 473-484 (1889).
[32]. J. STEFAN: *Ueber die Theorie der Eisbildung, insbesondere über die Eisbildung im Polarmeere,* S. B. Kais. Akad. Wiss. Wien, **98**, 965-983 (1889).
[33]. J. STEFAN: *Ueber Theorie der Eisbildung,* Monaths. Math. Ph., **1**, 1-6 (1890).
[34]. G. VITALI: cfr. [30].