BIANCA MANFREDI (*)

# Su la risoluzione delle equazioni alle derivate parziali, del second'ordine, lineari e a coefficienti costanti. (**)

**1.** – In questa Nota ed in alcune altre mi propongo di studiare il notevole problema della risoluzione delle equazioni alle derivate parziali, del second'ordine, lineari e a coefficienti costanti. In tale studio cerco di applicare e continuare un mio precedente lavoro [1].

Ho suddiviso (n. 3) le dette equazioni in due classi che ho così chiamate: *equazioni riducibili* ed *equazioni irriducibili*. Nella presente Nota indico la risoluzione delle equazioni riducibili.

**2.** – Consideriamo dapprima l'espressione alle derivate parziali, del primo ordine, lineare e a coefficienti costanti,

$$\alpha_1 \frac{\partial z}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial z}{\partial y} + \alpha_3 z \,, \qquad \text{con} \quad \alpha_1 \neq 0 \,, \, \alpha_2 \neq 0 \,.$$

Poichè l'equazione

$$\alpha_1 \frac{\partial z}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

ha la soluzione particolare

$$z = \alpha_2 x - \alpha_1 y \,,$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma (Italia).

(**) Lavoro eseguito nell'Istituto di Matematica della Università di Parma e ricevuto il 15-XII-1951.

(1) B. MANFREDI, *Decomposizione in prodotto di operazioni elementari delle espressioni alle derivate parziali, del primo ordine e totalmente lineari*, Boll. Un. Mat. It. (3) **4**, 381-390 (1949).

da cui

$$y = \frac{1}{\alpha_1}(\alpha_2 x - z),$$

segue (²)

$$\alpha_1 \frac{\partial z}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial z}{\partial y} = \alpha_1 \underline{\left\{ \begin{matrix} y \\ \alpha_2 x - \alpha_1 y \end{matrix} \right\} \mathrm{D}_x \left\{ \begin{matrix} y \\ (\alpha_2 x - y)/\alpha_1 \end{matrix} \right\}} z(x, y),$$

$$\alpha_1 \frac{\partial z}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial z}{\partial y} + \alpha_3 z = \alpha_1 \underline{\left\{ \begin{matrix} y \\ \alpha_2 x - \alpha_1 y \end{matrix} \right\} e^{-(\alpha_3/\alpha_1)x} \mathrm{D}_x \, e^{(\alpha_3/\alpha_1)x} \left\{ \begin{matrix} y \\ (\alpha_2 x - y)/\alpha_1 \end{matrix} \right\}} z(x, y).$$

**3.** – Consideriamo ora l'espressione alle derivate parziali, del second'ordine, lineare e a coefficienti costanti,

$$\mathcal{D}^{(2)} z \equiv a_{11} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2a_{13} \frac{\partial z}{\partial x} + 2a_{23} \frac{\partial z}{\partial y} + a_{33} z.$$

Osserviamo che ad ogni simile espressione corrisponde biunivocamente la funzione razionale intera

$$K(X, Y) \equiv a_{11} X^2 + 2a_{12} XY + a_{22} Y^2 + 2a_{13} X + 2a_{23} Y + a_{33},$$

che si dirà il *polinomio caratteristico* dell'espressione alle derivate parziali $\mathcal{D}^{(2)} z$. È noto che se il determinante (detto *discriminante* del polinomio)

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \text{dove} \quad a_{21} = a_{12}, \; a_{31} = a_{13}, \; a_{23} = a_{32},$$

è nullo, e soltanto in tale caso, il polinomio $K(X, Y)$ è decomponibile nel prodotto di due polinomi di primo grado in $X$ e $Y$.

Distinguiamo quindi due eventualità. Se è $A = 0$, esistono delle costanti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ tali che sia

$$K(X, Y) \equiv (\alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3)(\beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3),$$

(²) Loc. cit. in (¹), cfr. la pag. 384.

e anche

$$\mathcal{D}^{(2)}z(x, y) \equiv \left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_3\right)\left(\beta_1 \frac{\partial}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial y} + \beta_3\right) z \, ;$$

in tale caso si dirà che l'espressione alle derivate parziali $\mathcal{D}^{(2)}z$ è *riducibile.* Se è invece $A \neq 0$ il polinomio $K(X, Y)$ non si spezza più nel prodotto di due polinomi di primo grado e anche l'operatore $\mathcal{D}^{(2)}$ non si spezza più nel prodotto di due operatori di primo ordine; in tale caso si dirà che l'espressione alle derivate parziali $\mathcal{D}^{(2)}z$ è *irriducibile.*

**4.** – Proponiamoci ora la risoluzione della equazione alle derivate parziali

$$\mathcal{D}^{(2)}z(x, y) = f(x, y) \, , \tag{1}$$

dove $f(x, y)$ è una data funzione.

Mostriamo *come si può procedere alla risoluzione della equazione* (1) *nel caso che il primo membro di* (1) *sia riducibile.* Sia dunque

$$\mathcal{D}^{(2)}z \equiv \left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_3\right)\left(\beta_2 \frac{\partial}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial y} + \beta_3\right) z$$

e distinguiamo tre casi.

1° Caso: Sia $\alpha_1 \neq 0$, $\beta_1 \neq 0$. Abbiamo allora, in virtù di quanto si è detto nel n. 2,

$$\mathcal{D}^{(2)}z \equiv \underline{\alpha_1 \left\{\begin{matrix} y \\ \alpha_2 x - \alpha_1 y \end{matrix}\right\} e^{-(\alpha_3/\alpha_1)x}\, \mathrm{D}_x\, e^{(\alpha_3/\alpha_1)x} \left\{\begin{matrix} y \\ (\alpha_2 x - y)/\alpha_1 \end{matrix}\right\}} \cdot$$
$$\cdot \underline{\beta_1 \left\{\begin{matrix} y \\ \beta_2 x - \beta_1 y \end{matrix}\right\} e^{-(\beta_3/\beta_1)x}\, \mathrm{D}_x\, e^{(\beta_3/\beta_1)x} \left\{\begin{matrix} y \\ (\beta_2 x - y)/\beta_1 \end{matrix}\right\}} z(x, y) \, .$$

Dalla (1) si ottiene quindi

$$z(x, y) \equiv \underline{\frac{1}{\alpha_1 \beta_1} \left\{\begin{matrix} y \\ \beta_2 x - \beta_1 y \end{matrix}\right\} e^{-(\beta_3/\beta_1)x}\, \mathrm{D}_x^{-1}\, e^{(\beta_3/\beta_1)x} \left\{\begin{matrix} y \\ (\beta_2 x - y)/\beta_1 \end{matrix}\right\}} \cdot$$
$$\cdot \underline{\left\{\begin{matrix} y \\ \alpha_2 x - \alpha_1 y \end{matrix}\right\} e^{-(\alpha_3/\alpha_1)x}\, \mathrm{D}_x^{-1}\, e^{(\alpha_3/\alpha_1)x} \left\{\begin{matrix} y \\ (\alpha_2 x - y)/\alpha_1 \end{matrix}\right\}} f(x, y) \, ,$$

dove $\mathrm{D}_x^{-1}$ va inteso nel suo significato generale. –

2° Caso: Sia $\alpha_1 \neq 0$, $\beta_1 = 0$. Allora risulta

$$\mathcal{D}^{(2)}z \equiv \left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_3\right)\left(\beta_2 \frac{\partial}{\partial y} + \beta_3\right) \equiv$$

$$\equiv \underline{\alpha_1 \left\{ \begin{matrix} y \\ \alpha_2 x - \alpha_1 y \end{matrix} \right\} e^{-(\alpha_3/\alpha_1)x} \mathrm{D}_x e^{(\alpha_3/\alpha_1)x} \left\{ \begin{matrix} y \\ (\alpha_2 x - y)/\alpha_1 \end{matrix} \right\} \beta_2 e^{-(\beta_3/\beta_2)y} \mathrm{D}_y e^{(\beta_3/\beta_2)y}} z(x, y) .$$

Dalla (1) si ottiene quindi

$$z(x, y) = \frac{1}{\alpha_1\beta_2} \underline{e^{-(\beta_3/\beta_2)y} \mathrm{D}_y^{-1} e^{(\beta_3/\beta_2)y}} \cdot$$

$$\cdot \underline{\left\{ \begin{matrix} y \\ \alpha_2 x - \alpha_1 y \end{matrix} \right\} e^{-(\alpha_3/\alpha_1)x} \mathrm{D}_x^{-1} e^{(\alpha_3/\alpha_1)x} \left\{ \begin{matrix} y \\ (\alpha_2 x - y)/\alpha_1 \end{matrix} \right\}} f(x, y) .$$

3° Caso: Sia $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 \neq 0$. Basta procedere analogamente al caso precedente.

**5.** – L'equazione delle corde vibranti

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 ,$$

l'equazione (generalizzata) di LAPLACE

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 .$$

e più generalmente l'equazione di POISSON

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y)$$

sono tutte equazioni riducibili (secondo la definizione del n. 3) e pertanto risolubili come sopra si è indicato.

Mostriamo, ad esempio, il nostro procedimento relativamente all'equazione delle corde vibranti.

Abbiamo, in tale caso,

$$\mathcal{D}^{(2)}z \equiv (\mathrm{D}_x^2 - a^2\mathrm{D}_y^2)z = (\mathrm{D}_x + a\mathrm{D}_y)(\mathrm{D}_x - a\mathrm{D}_y)z$$

e quindi (n. 4, 1° Caso)

$$\mathcal{D}^{(2)}z \equiv \underline{\left\{ \begin{matrix} y \\ ax - y \end{matrix} \right\} \mathrm{D}_x \left\{ \begin{matrix} y \\ ax - y \end{matrix} \right\}} \cdot \underline{\left\{ \begin{matrix} y \\ -ax - y \end{matrix} \right\} \mathrm{D}_x \left\{ \begin{matrix} y \\ -ax - y \end{matrix} \right\}} z(x, y)\,.$$

Ne segue che la soluzione generale dell'equazione delle corde vibranti è

$$z(x, y) = \underline{\left\{ \begin{matrix} y \\ -ax - y \end{matrix} \right\} \mathrm{D}_x^{-1} \left\{ \begin{matrix} y \\ -ax - y \end{matrix} \right\}}\ \underline{\left\{ \begin{matrix} y \\ ax - y \end{matrix} \right\} \mathrm{D}_x^{-1} \left\{ \begin{matrix} y \\ ax - y \end{matrix} \right\}} 0\,,$$

ossia

$$z(x, y) = \underline{\left\{ \begin{matrix} y \\ -ax - y \end{matrix} \right\} \mathrm{D}_x^{-1} \left\{ \begin{matrix} y \\ 2ax + y \end{matrix} \right\}} \Psi(y)$$

con $\Psi(y)$ funzione arbitraria di $y$, e infine

$$z(x, y) = \Phi(ax + y) + \Psi(ax - y)$$

con $\Phi(u)$, $\Psi(u)$ funzioni aventi derivate prime e seconde e del resto arbitrarie.