

Esistenza ed unicità nel problema di Stefan relativo a campi dotati di simmetria.

1. - Introduzione.

In un recente lavoro [4] ⁽¹⁾, generalizzando un risultato del sig. EVANS II [1] ho dimostrato l'esistenza e l'unicità della soluzione per un problema analogo a quello di STEFAN. Il problema considerato si riferiva alla determinazione dello stato termico in un mezzo (isotropo, inizialmente omogeneo e allo stato solido, occupante uno strato piano indefinito, di spessore a) nel quale sia in atto un processo di fusione, provocato da uno strato di sorgenti di rendimento $H(t)$, creato su di una delle due faccie, essendo l'altra isolata.

Con le notazioni del precedente lavoro, ricorderemo che le incognite temperature $u^{(1)}(x, t)$ e $u^{(2)}(x, t)$ delle due fasi al tempo t e la incognita ascissa $\alpha = \alpha(t)$ del piano di separazione tra queste, devono soddisfare ai due sistemi differenziali alle derivate parziali:

$$\begin{array}{l}
 (\text{A}^{(1)}) \left\{ \begin{array}{l} k_1 \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} = \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t}, \quad 0 < x < \alpha, \\ h_1 \left[\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} \right]_{x=0} = -H(t), \\ u^{(1)}(\alpha, t) = 0, \quad \alpha(0) = 0, \end{array} \right. \quad (\text{A}^{(2)}) \left\{ \begin{array}{l} k_2 \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} = \frac{\partial u^{(2)}}{\partial t}, \quad \alpha < x < a, \\ u^{(2)}(x, 0) = f(x), \\ u^{(2)}(\alpha, t) = 0, \quad \alpha(0) = 0, \\ \left[\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} \right]_{x=a} = 0, \end{array} \right.
 \end{array}$$

con la condizione

$$(1) \quad \left[h_2 \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} - h_1 \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} \right]_{x=\alpha} = \rho_2 L \frac{d\alpha}{dt},$$

avendo supposto, come è lecito, uguale a zero la temperatura critica di fusione del mezzo.

Note le densità ρ_i , i calori specifici c_i , le costanti di *diffusività* k_i e di

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma (Italia).

⁽¹⁾ I numeri in parentesi quadra si riferiscono ai richiami bibliografici posti al termine del lavoro.

conduzione h_i , ($i = 1, 2$), delle fasi liquida e solida del mezzo e il suo calore latente di fusione L , fatte alcune ipotesi sulla temperatura iniziale $f(x)$ e sul flusso $H(t)$, ipotesi che saranno più sotto ricordate, l'esistenza di una soluzione per i sistemi $(A^{(1)})$, $(A^{(2)})$ con la (1) è stata assicurata per ogni t soddisfacente alla disuguaglianza

$$0 \leq H(t) \int_0^t H(\tau) d\tau < \rho_2 L k_1 \left\{ \rho_2 L - \frac{ah_2}{k_2} |f'(0)| \right\}.$$

È scopo di questo lavoro la dimostrazione della esistenza e della unicità della soluzione per l'analogo problema, quando il mezzo occupa uno strato cilindrico indefinito (strato sferico), supposto che la distribuzione della temperatura nelle due fasi in ogni istante, e quindi anche inizialmente, sia funzione del posto soltanto per tramite della distanza r dall'asse comune alle superficie cilindriche (dal centro comune alle superficie sferiche) limitanti lo strato.

In questa ipotesi l'equazione parabolica della propagazione del calore assume, come è ben noto, nel caso cilindrico (sferico) la forma

$$k \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right] - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \left\{ k \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right] - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \right\}.$$

Questa non è che il caso particolare per $m = 2$ ($m = 3$) dell'equazione

$$k \frac{\partial}{\partial r} \left[r^{m-1} \frac{\partial u}{\partial r} \right] - r^{m-1} \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad m \text{ intero positivo,}$$

che per $m = 1$ diventa l'equazione del calore per il caso unidimensionale relativo allo strato piano.

Indicati con $R_2 > R_1 > 0$ i raggi delle superficie cilindriche (sferiche) limitanti lo strato, proveremo l'esistenza e l'unicità della soluzione dei due più generali sistemi differenziali ⁽²⁾:

$$(B^{(1)}) \left\{ \begin{array}{l} k_1 \frac{\partial}{\partial r} \left[r^{m-1} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial r} \right] - r^{m-1} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial t} = 0, \\ 0 \leq t \leq T, \quad R_1 < r < \alpha; \\ h_1 \left[\frac{\partial u^{(1)}}{\partial r} \right]_{r=R_1} = -H(t), \\ u^{(1)}(\alpha, t) = 0, \quad \alpha(0) = R_1, \end{array} \right. \quad (B^{(2)}) \left\{ \begin{array}{l} k_2 \frac{\partial}{\partial r} \left[r^{m-1} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial r} \right] - r^{m-1} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial t} = 0, \\ 0 \leq t \leq T, \quad \alpha < r < R_2; \\ u^{(2)}(r, 0) = f(r), \\ u^{(2)}(\alpha, t) = 0, \quad \alpha(0) = R_1, \\ \left[\frac{\partial u^{(2)}}{\partial r} \right]_{r=R_2} = 0. \end{array} \right.$$

⁽²⁾ Quando la cosa non possa destare equivoco tralascieremo l'indicazione delle variabili indipendenti.

con la condizione

$$(2) \quad \left[h_2 \frac{\partial w^{(2)}}{\partial r} - h_1 \frac{\partial w^{(1)}}{\partial r} \right]_{r=\alpha} = \varrho_2 L \frac{d\alpha}{dt},$$

in quanto questi forniscono contemporaneamente la traduzione analitica dei due problemi analoghi a quello di STEFAN, relativi sia allo strato cilindrico indefinito che allo strato sferico. Naturalmente quando si faccia $m = 1$ si ritrovano i risultati stabiliti nel precedente lavoro per lo strato piano indefinito. La deduzione del risultato voluto, pur seguendo nella linea generale la via di [4], ha richiesto in più punti procedimenti dimostrativi del tutto diversi e ciò in dipendenza dalla diversa natura dei due sistemi differenziali ora in esame.

Posto $R_2 - R_1 = a$, ancor qui come in [4] supporremo $f(r)$ continua insieme alle sue derivate prima e seconda, con le condizioni

$$f(R_1) = 0, \quad f'(r) \leq 0, \quad f'(R_2) = 0, \quad f''(r) \geq 0,$$

$$\frac{ah_2}{k_2} |f'(R_1)| < \frac{ah_2}{k_2} (R_2/R_1)^{m-1} |f'(R_1)| \leq \varrho_2 L,$$

l'ultima delle quali è stata ampiamente illustrata in [4].

Supporremo ancora $H(t)$ continua insieme alla sua derivata prima e a *variazione limitata* in ogni intervallo finito.

Dal risultato ottenuto, quando si faccia $f(r) = 0$, con che la fase solida si trova sempre alla temperatura critica zero, e $H(t) = G > 0$ costante, resta generalizzato (n. 6) per lo strato cilindrico indefinito (strato sferico), e con riferimento ad un intervallo di tempo più ampio, il risultato del signor EVANS II ⁽³⁾.

2. - Relazione fondamentale tra le incognite del problema.

Integriamo, nei due campi piani definiti dalle disuguaglianze $0 \leq \tau \leq t$, $R_1 \leq r \leq \alpha(t)$ il primo e dalle disuguaglianze $0 \leq \tau \leq t$, $\alpha(t) \leq r \leq R_2$ il secondo, le due equazioni

$$k_1 \frac{\partial}{\partial r} \left[r^{m-1} \frac{\partial w^{(1)}}{\partial r} \right] - r^{m-1} \frac{\partial w^{(1)}}{\partial t} = 0, \quad k_2 \frac{\partial}{\partial r} \left[r^{m-1} \frac{\partial w^{(2)}}{\partial r} \right] - r^{m-1} \frac{\partial w^{(2)}}{\partial t} = 0,$$

⁽³⁾ La deduzione diretta di questo caso particolare è stata oggetto di una mia comunicazione all'ottavo Congresso Internazionale di Meccanica pura e applicata, tenuto ad Istanbul nell'agosto 1952.

tenendo conto delle condizioni iniziali ed al contorno fissate in (B⁽¹⁾) e (B⁽²⁾). Si ottiene

$$(3) \quad \begin{cases} h_1 \int_0^t \alpha^{m-1} \left[\frac{\partial u^{(1)}}{\partial r} \right]_{r=\alpha} d\tau = \frac{h_1}{k_1} \int_{R_1}^{\infty} r^{m-1} u^{(1)} dr - R_1^{m-1} \int_0^t H(\tau) d\tau, \\ h_2 \int_0^t \alpha^{m-1} \left[\frac{\partial u^{(2)}}{\partial r} \right]_{r=\alpha} d\tau = \frac{h_2}{k_2} \int_{R_1}^{R_2} r^{m-1} f(r) dr - \frac{h_2}{k_2} \int_{\alpha}^{R_2} r^{m-1} u^{(2)} dr. \end{cases}$$

Moltiplichiamo la (2) per α^{m-1} ed integriamo tra 0 e t . Si ha

$$h_2 \int_0^t \alpha^{m-1} \left[\frac{\partial u^{(2)}}{\partial r} \right]_{r=\alpha} d\tau - h_1 \int_0^t \alpha^{m-1} \left[\frac{\partial u^{(1)}}{\partial r} \right]_{r=\alpha} d\tau = \varrho_2 L \int_0^t \alpha^{m-1} d\alpha = \frac{\varrho_2 L}{m} (\alpha^m - R_1^m),$$

e, tenuto conto di (3),

$$\begin{aligned} \frac{\varrho_2 L}{m} (\alpha^m - R_1^m) &= \frac{h_2}{k_2} \int_{R_1}^{R_2} r^{m-1} f(r) dr + R_1^{m-1} \int_0^t H(\tau) d\tau - \\ &\quad - \frac{h_1}{k_1} \int_{R_1}^{\infty} r^{m-1} u^{(1)} dr - \frac{h_2}{k_2} \int_{\alpha}^{R_2} r^{m-1} u^{(2)} dr. \end{aligned}$$

Posto quindi

$$(4) \quad \begin{cases} B_0 = \frac{mh_2}{\varrho_2 k_2 L} \int_{R_1}^{R_2} r^{m-1} f(r) dr, & B_1 = \frac{mh_1}{\varrho_2 k_1 L}, & B_2 = \frac{mh_2}{\varrho_2 k_2 L}, \\ F(t) = R_1^m + \frac{mR_1^{m-1}}{\varrho_2 L} \int_0^t H(\tau) d\tau, \end{cases}$$

si ottiene infine la relazione cercata tra $w^{(1)}$, $w^{(2)}$ e α :

$$(5) \quad \alpha^m = F(t) + B_0 - B_1 \int_{R_1}^{\infty} r^{m-1} u^{(1)} dr - B_2 \int_{\alpha}^{R_2} r^{m-1} u^{(2)} dr.$$

3. - Relazioni e limitazioni per le successive approssimazioni di $\alpha(t)$.

Come in [4], consideriamo un sistema di approssimazioni successive per α dato da

$$(6) \quad \alpha_0^m = F(t),$$

$$(7) \quad \alpha_n^m = F(t) + B_0 - B_1 \int_{R_1}^{\alpha_{n-1}} r^{m-1} u_{n-1}^{(1)} dr - B_2 \int_{\alpha_{n-1}}^{R_2} r^{m-1} u_{n-1}^{(2)} dr,$$

dove $u_{n-1}^{(1)}$ ed $u_{n-1}^{(2)}$ sono soluzioni dei due sistemi differenziali ottenuti da $(B^{(1)})$ e $(B^{(2)})$, ponendo α_{n-1} al posto di α , che indicheremo con $(B_{n-1}^{(1)})$ e $(B_{n-1}^{(2)})$. La risolubilità di questi sistemi è assicurata da classici lavori sui sistemi differenziali di tipo parabolico (4).

Gioverà qui subito osservare che, essendo i coefficienti delle equazioni differenziali in $(B_s^{(1)})$ e $(B_s^{(2)})$ funzioni finite e continue nei campi ove tali equazioni vengono considerate, possiamo, nelle ipotesi dichiarate per $f(r)$ e $H(t)$, applicare quando occorra il teorema sugli estremi delle soluzioni delle equazioni paraboliche (5), di cui più volte ci siamo serviti nelle dimostrazioni del precedente lavoro e che continueremo a richiamare con la sigla T.E.. Ciò premesso, derivando la (7) rispetto al tempo, si ottiene facilmente

$$\dot{\alpha}_n = \frac{1}{2L} \left(\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \right)^{m-1} \left\{ h_2 \left[\frac{\partial u_{n-1}^{(2)}}{\partial r} \right]_{r=\alpha_{n-1}} - h_1 \left[\frac{\partial u_{n-1}^{(1)}}{\partial r} \right]_{r=\alpha_{n-1}} \right\},$$

e, ripetendo il ragionamento fatto nel n. 5 di [4], essendo $\alpha_{n-1}/\alpha_n > 0$, si ha ancora

$$(8) \quad \dot{\alpha}_n(t) > 0,$$

cioè ancora le $\alpha_n(t)$ risultano *funzioni monotone crescenti* di t .

Consideriamo ora il sistema differenziale $(B_{n-1}^{(2)})$. Essendo $\left[\frac{\partial u_{n-1}^{(2)}}{\partial r} \right]_{r=R_2} = 0$, facciamo una simmetria del campo attorno alla retta $r = R_2$ e applichiamo il T.E. nel nuovo campo. Si ottiene subito

$$u_{n-1}^{(2)} \geq f(r)$$

(4) Cfr. ad es. [2].

(5) Cfr. [3], pp. 694-715.

e quindi

$$(9) \quad |u_{n-1}^{(2)}| \leq |f(r)|.$$

A questo risultato si può anche giungere osservando che, essendo $u_{n-1}^{(2)}(r, 0) = f(r) \leq 0$ e $u_{n-1}^{(2)} \leq 0$ ed avendosi all'istante t nella fase solida flusso di calore positivo o nullo attraverso $r = \alpha_{n-1}$, dovrà necessariamente aversi $u_{n-1}^{(2)}(r, t) \geq f(r)$.

Potendosi scrivere la (7) nella forma

$$\alpha_n^m = F(t) - B_1 \int_{R_1}^{\alpha_{n-1}} r^{m-1} u_{n-1}^{(1)} dr - B_2 \int_{R_1}^{R_2} r^{m-1} |f(r)| dr + B_2 \int_{\delta_{n-1}}^{R_2} r^{m-1} |u_{n-1}^{(2)}| dr,$$

si ha subito

$$\alpha_n^m \leq F(t) - B_1 \int_{R_1}^{\alpha_{n-1}} r^{m-1} u_{n-1}^{(1)} dr - B_2 \int_{R_1}^{R_2} r^{m-1} \{ |f(r)| - |u_{n-1}^{(2)}| \} dr,$$

da cui, essendo $u_{n-1}^{(1)} \geq 0$ e valendo la (9),

$$\alpha_n^m \leq F(t) = \alpha_0^m.$$

Da questa, essendo α_n e α_0 positivi o nulli,

$$(10) \quad \alpha_n(t) \leq \alpha_0(t).$$

Questa relazione è stata dedotta in modo del tutto diverso da quello seguito per ottenere l'analogia in [4], non essendo quella dimostrazione applicabile al caso attuale. Giova però rilevare che la presente dimostrazione può essere usata anche per dedurre la (11) del precedente lavoro.

È facile ora mostrare che vale ancora il

Teorema. *Due approssimazioni successive consecutive per $\alpha(t)$ secondo le (6) e (7), soddisfano alla disuguaglianza opposta a quella che intercorre tra le due approssimazioni di indici immediatamente precedenti.*

Infatti, avendosi dalla (7)

$$\begin{aligned} \alpha_n^m - \alpha_{n-1}^m = & - B_1 \int_{R_1}^{\alpha_{n-1}} r^{m-1} u_{n-1}^{(1)} dr - B_2 \int_{\delta_{n-1}}^{R_2} r^{m-1} u_{n-1}^{(2)} dr + \\ & + B_1 \int_{R_1}^{\alpha_{n-2}} r^{m-1} u_{n-2}^{(1)} dr + B_2 \int_{\delta_{n-2}}^{R_2} r^{m-1} u_{n-2}^{(2)} dr, \end{aligned}$$

supposto che sia $\alpha_{n-2} \leq \alpha_{n-1}$, si ha

$$\alpha_n^m - \alpha_{n-1}^m = B_1 \left[\int_{R_1}^{\alpha_{n-2}} r^{m-1} [u_{n-2}^{(1)} - u_{n-1}^{(1)}] dr - \int_{\alpha_{n-2}}^{\alpha_{n-1}} r^{m-1} u_{n-1}^{(1)} dr \right] + \\ + B_2 \left[\int_{\alpha_{n-2}}^{R_2} r^{m-1} [u_{n-2}^{(2)} - u_{n-1}^{(2)}] dr + \int_{\alpha_{n-2}}^{\alpha_{n-1}} r^{m-1} u_{n-2}^{(2)} dr \right].$$

Osservato che è $r^{m-1} > 0$, con ragionamento del tutto analogo a quello fatto nel n. 5 di [4], applicando T.E., si ottiene

$$u_{n-2}^{(1)} - u_{n-1}^{(1)} \leq 0, \quad \text{in } (R_1, \alpha_{n-2}), \\ u_{n-2}^{(2)} - u_{n-1}^{(2)} \leq 0, \quad \text{in } (\alpha_{n-1}, R_2),$$

ed essendo $u_{n-1}^{(1)} \geq 0$ ed $u_{n-2}^{(2)} \leq 0$, si ha $\alpha_n^m - \alpha_{n-1}^m \leq 0$ e quindi, essendo le α_n tutte positive,

$$\alpha_n \leq \alpha_{n-1}.$$

Ragionando analogamente quando sia $\alpha_{n-2} > \alpha_{n-1}$, resta provato il teorema.

Come immediata conseguenza di questo teorema, oltre alla limitazione (10), si ha: *Le successive approssimazioni per $\alpha(t)$ di indice pari formano una successione monotona non crescente, limitata inferiormente da $\alpha_1(t)$; le successive approssimazioni per $\alpha(t)$ di indice dispari formano una successione monotona non decrescente, limitata superiormente da una qualsiasi approssimazione di indice pari.*

Le due successioni $\{\alpha_{2n}\}$ ed $\{\alpha_{2n+1}\}$ ammettono quindi limite determinato e finito quando $n \rightarrow \infty$, limiti che ancor qui indicheremo rispettivamente con α^{**} e α^* .

4. - Limitazioni per $u_n^{(1)}(r, t)$ e $u_n^{(2)}(r, t)$.

Con procedimento analogo a quello dei nn. 6 e 9 di [4], essendo $H(t)$ funzione derivabile e a variazione limitata in ogni intervallo finito, posto

$$H(t) = H_1(t) - H_2(t) \leq H_1(t),$$

con $H_1(t)$ ed $H_2(t)$ funzioni derivabili, non negative, non decrescenti, e ope-

rato su $(B_n^{(1)})$ il cambiamento di funzione

$$u_n^{(1)}(r, t) = V^{(1)}(r, t) - (r/h_1)H(t),$$

si ottiene

$$(11) \quad 0 \leq u_n^{(1)}(r, t) \leq (1/h_1)(\alpha_n - r)H(t).$$

Per stabilire la limitazione per $u_n^{(2)}$ operiamo su $(B_n^{(2)})$ il cambiamento di funzione

$$(12) \quad -u_n^{(2)}(r, t) = V^{(2)}(r, t) - f(r) - At,$$

con A costante. Si ottiene per $V^{(2)}$ il sistema differenziale:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} k_2 \frac{\partial}{\partial r} \left[r^{m-1} \frac{\partial V^{(2)}}{\partial r} \right] - r^{m-1} \frac{\partial V^{(2)}}{\partial t} = k_2 r^{m-1} f''(r) + \\ \quad + k_2(m-1)r^{m-2}f'(r) - r^{m-1}A, \quad \alpha_n < r < R_2, \\ V^{(2)}(r, 0) = 0, \\ V^{(2)}(\alpha_n, t) = f(\alpha_n) + At, \\ \left[\frac{\partial V^{(2)}}{\partial r} \right]_{r=R_2} = 0. \end{array} \right.$$

Scegliamo, se è possibile, la costante A in modo che risulti

$$(14) \quad k_2(m-1)r^{m-2}f'(r) - r^{m-1}A \geq 0.$$

Ciò richiede

$$k_2(m-1)f'(r) \leq rA.$$

Questa, essendo per ipotesi $f'(r) \leq 0$, ci dice che la costante A deve essere negativa e tale da risultare

$$(15) \quad k_2(m-1)|f'(r)|/r \leq |A|.$$

Essendo $f'(r)$ funzione negativa crescente, risulterà $|f'(r)|$ funzione decrescente, con che, essendo $r \geq R_1$,

$$k_2(m-1)|f'(r)|/r \leq k_2(m-1)|f'(R_1)|/R_1;$$

basta quindi assumere

$$|A| \geq k_2(m-1) |f(R_1)| / R_1$$

perchè resti soddisfatta la (15) e quindi la (14).

Essendo ora $kr^{m-1}f''(r) + k(m-1)r^{m-2}f'(r) - r^{m-1}A \geq 0$ ed $f(\alpha_n) + At \leq 0$, fatta una simmetria del campo attorno ad $r = R_2$, nel nuovo campo, essendo $\left[\frac{\partial V^{(2)}}{\partial r} \right]_{r=R_2} = 0$, può applicarsi al sistema (13) il T.E.. Ricordando poi che $f(r)$ è funzione decrescente di r e che $\alpha_n(t)$ è funzione crescente di t , essendo anche At decrescente di t , si ottiene facilmente per $V^{(2)}(r, t)$ la limitazione

$$V^{(2)}(r, t) \leq f[\alpha_n(t)] + At,$$

che, sostituita in (12), dà la cercata limitazione per $u_n^{(2)}$:

$$(16) \quad -u_n^{(2)}(r, t) \leq f[\alpha_n(t)] - f(r).$$

5. - Esistenza ad unicità della soluzione del problema.

Procedendo in modo analogo ai nn. 7 ed 8 di [4], valendo per $\alpha_n(t)$, $u_n^{(1)}(r, t)$ e $u_n^{(2)}(r, t)$ relazioni e limitazioni perfettamente analoghe a quelle stabilite per le corrispondenti funzioni incognite del problema trattato in [4], si consegue la ricercata dimostrazione della esistenza di una sola soluzione per i sistemi (B⁽¹⁾) e (B⁽²⁾) con la (2), cioè del problema in esame. Accenneremo qui soltanto alla dimostrazione della esistenza del limite comune delle due successioni $\{\alpha_{2n}\}$ e $\{\alpha_{2n+1}\}$. Studiamo la differenza $\alpha_{2n}^m - \alpha_{2n+1}^m$. Essendo $\alpha_{2n} \geq \alpha_{2n-1}$, dalla (7) si ottiene

$$(17) \quad \alpha_{2n}^m - \alpha_{2n+1}^m = B_1 \left[\int_{R_1}^{\alpha_{2n-1}} r^{m-1} \{u_{2n}^{(1)} - u_{2n-1}^{(1)}\} dr + \int_{\alpha_{2n-1}}^{\alpha_{2n}} r^{m-1} u_{2n}^{(1)} dr \right] + \\ + B_2 \left[\int_{\alpha_{2n}}^{R_2} r^{m-1} \{u_{2n}^{(2)} - u_{2n-1}^{(2)}\} dr - \int_{\alpha_{2n-1}}^{\alpha_{2n}} r^{m-1} u_{2n-1}^{(2)} dr \right].$$

Avendosi

$$0 \leq u_{2n}^{(1)} - u_{2n-1}^{(1)} \leq (H_1/h_1)(\alpha_{2n} - \alpha_{2n-1}),$$

$$0 \leq u_{2n}^{(2)} - u_{2n-1}^{(2)} \leq f(\alpha_{2n-1}) - f(\alpha_{2n}),$$

dalla (17), per le precedenti,

$$\alpha_{2n}^m - \alpha_{2n+1}^m \leq (B_1 H_1 / h_1) \left[(\alpha_{2n} - \alpha_{2n-1}) \int_{R_1}^{\alpha_{2n-1}} r^{m-1} dr + \int_{\alpha_{2n-1}}^{\alpha_{2n}} r^{m-1} (\alpha_{2n} - r) dr \right] + \\ + B_2 \left[\{f(\alpha_{2n-1}) - f(\alpha_{2n})\} \int_{\alpha_{2n}}^{R_2} r^{m-1} dr + \int_{\alpha_{2n-1}}^{\alpha_{2n}} r^{m-1} \{f(\alpha_{2n-1}) - f(r)\} dr \right],$$

cioè

$$\alpha_{2n}^m - \alpha_{2n+1}^m \leq (B_1 H_1 / h_1) \left[(\alpha_{2n} - \alpha_{2n-1}) \frac{\alpha_{2n-1}^m - R_1^m}{m} + \right. \\ \left. + \frac{(m+1)\alpha_{2n}(\alpha_{2n}^m - \alpha_{2n-1}^m) - m(\alpha_{2n}^{m+1} - \alpha_{2n-1}^{m+1})}{m(m+1)} \right] + B_2 [f(\alpha_{2n-1}) - f(\alpha_{2n})] \frac{R_2^m - \alpha_{2n-1}^m}{m}.$$

Con evidenti riduzioni e maggiorazioni si ottiene

$$m(\alpha_{2n} - \alpha_{2n+1}) R_1^{m-1} \leq \alpha_{2n}^m - \alpha_{2n+1}^m \leq (\alpha_{2n} - \alpha_{2n-1}) \cdot \\ \cdot \left\{ \frac{B_1 H_1}{h_1 m} (\alpha_0^m - R_1^m) + B_2 R_2^{m-1} a |f'(R_1)| \right\},$$

da cui, ricordando le (4) e (6),

$$\alpha_{2n} - \alpha_{2n+1} \leq (\alpha_{2n} - \alpha_{2n-1}) \left\{ \frac{B_1^2 k_1}{h_1^2 m^2} H_1(t) \int_0^t H(\tau) d\tau + \frac{B_2 a}{m} (R_2/R_1)^{m-1} |f'(R_1)| \right\}.$$

Da questa, passando al limite per $n \rightarrow \infty$, se $\alpha^{**} \neq \alpha^*$, deve aversi

$$1 \leq \frac{B_1^2 k_1}{h_1^2 m^2} H_1(t) \int_0^t H(\tau) d\tau + \frac{B_2 a}{m} (R_2/R_1)^{m-1} |f'(R_1)|.$$

La coincidenza dei due limiti α^* e α^{**} è quindi assicurata per ogni t per cui risulti

$$(18) \quad \frac{B_1^2 k_1}{h_1^2 m^2} H_1(t) \int_0^t H(\tau) d\tau < 1 - \frac{B_2 a}{m} (R_2/R_1)^{m-1} |f'(R_1)|,$$

ovvero, ricordando che è $H \leq H_1$, per ogni t per cui si abbia

$$(19) \quad \frac{B_1^2 k_1}{h_1^2 m^2} H(t) \int_0^t H(\tau) d\tau < 1.$$

Se quindi indichiamo con T l'estremo superiore dei valori di t per cui la (18) è verificata, in $(0, T)$ il nostro problema ammette una ed una sola soluzione.

6. - Caso particolare.

Se supponiamo $f(r) = 0$, per ogni r in (R_1, R_2) e la $H(t) = G > 0$ costante, con che restano verificate tutte le ipotesi formulate per il conseguimento delle precedenti dimostrazioni, si ottiene l'estensione allo strato cilindrico (strato sferico) dei risultati stabiliti dal sig. EVANS II per lo strato piano.

Per questo caso particolare la (19) diventa

$$\frac{G^2 t}{\rho_2^2 k_1 J^2} < 1 .$$

Questa, fatto con le notazioni di [1] ⁽⁶⁾, $G = gh$, $k_1 = \alpha^2$, $A = \rho_2 L/h$, fornisce la limitazione

$$\tau = \frac{g^2 t}{A^2 \alpha^2} < 1$$

anzichè $\tau \leq 1/4$, come era richiesto dalla dimostrazione in [1].

7. - Richiami bibliografici.

- [1] G. W. EVANS II: *A note on the existence of a solution to a problem of Stefan*, Q. Appl. Math. **9**, 185-193 (1951).
- [2] M. GEVREY: *Equations aux dérivées partielles du type parabolique*, J. Math. Pures Appl. (6) **9**, 306-471 (1913).
- [3] M. PICONE: *Appunti di Analisi superiore*, Napoli 1941.
- [4] G. SESTINI: *Esistenza di una soluzione in problemi analoghi a quello di Stefan*, Rivista Mat. Univ. Parma **3**, 3-21 (1952).

⁽⁶⁾ Cfr. [1], pag. 185 e pag. 190.

