ANTONIO NADILE (*)

# Traiettorie dinamiche di un sistema anolonomo e famiglie naturali di curve anolonome. (**)

## § 1. – Oggetto della ricerca.

Le configurazioni di un sistema olonomo riferito ad $n$ coordinate lagrangiane indipendenti $q_1, q_2, \dots, q_n$, si possono far corrispondere, com'è noto, ai punti $Q \equiv (q_1, q_2, \dots, q_n)$ di una varietà $V_n$ ad $n$ dimensioni nella quale l'elemento lineare è definito dalla forma quadratica differenziale

$$\mathrm{d}Q^2 = 2T\,\mathrm{d}t^2 = \mathrm{d}s^2 = \sum_1^n a_{ik}\,\mathrm{d}q_i\,\mathrm{d}q_k\,, \tag{1}$$

dove le quantità $a_{ik}$ sono i coefficienti della forma quadratica che rappresenta la forza viva $T$ del sistema supposto a vincoli fissi.

Il moto continuo del sistema nel passaggio da una configurazione iniziale ad una finale viene rappresentato sulla $V_n$ da una curva, congiungente i punti corrispondenti alle due configurazioni estreme, detta traiettoria dinamica del sistema.

Le proprietà delle traiettorie dinamiche di un sistema olonomo sono state, in massima parte, messe in rilievo dall'HADAMARD (1) e dal PAINLEVÉ (2).

Si deve poi al KASNER (3) un gruppo di ricerche riguardanti alcune curve

(*) Indirizzo: Via Ghibellina Isol. 132, Messina (Italia).

(**) Ricevuto il 24-II-1952.

(1) Cfr. J. HADAMARD, *Sur certaines propriétés des trajectoires en dynamique*, J. Math. Pures Appl. (5) **3**, 331-387 (1897).

(2) Cfr. P. PAINLEVÉ, *Sur les mouvements et les trajectoires réels des systèmes*, Bull. Soc. Math. France **22**, 136-184 (1894).

(3) ED. KASNER, *Natural families of trajectories. Conservative fields of force*, Trans. Amer. Math. Soc. **10**, 201-219 (1909).

ED. KASNER, *Natural families of curves in a general curved space of n-dimensions*, Trans. Amer. Math. Soc. **13**, 77-95 (1913).

più generali delle traiettorie dinamiche, provenienti anch'esse dalle equazioni della dinamica di un sistema materiale nel caso di forze derivanti da un potenziale, dette famiglie naturali, e al LIPKA [4] si deve una più generale estensione di dette curve chiamate sistemi di velocità.

In epoca più recente gli studi di cui sopra sono stati ripresi dal prof. AGOSTINELLI [5], il quale, prendendo le mosse dalla forma semplice di equazioni del moto data dal BOGGIO, ha non solo dato impostazione più completa ed esauriente alle varie questioni, ma ha anche stabilito notevoli nuove proprietà dei sistemi di curve anzidetti.

In questo lavoro, supponendo che il considerato sistema materiale sia ulteriormente soggetto ad $m$ vincoli di mobilità anolonomi, si stabilisce, anzitutto, una forma vettoriale sintetica delle equazioni del moto ricorrendo alla immagine del detto sistema sulla $V_n$.

Successivamente si trovano le equazioni delle traiettorie dinamiche sotto forma di sistema differenziale costituito da $n-m$ equazioni del second'ordine ed $m$ del prim'ordine nelle funzioni incognite $q_1, q_2, \dots, q_n$ dell'arco $s$; detto sistema viene poi trasformato in un sistema equivalente di $2n-m$ equazioni differenziali del prim'ordine mercè la introduzione di $n-m$ funzioni ausiliarie incognite che, per analogia con le caratteristiche cinetiche, e per la proprietà geometrica di cui godono, chiameremo *caratteristiche di direzione.*

Si passa quindi alla introduzione del concetto di *curve naturali associate al sistema anolonomo* dato o *curve naturali con vincoli anolonomi*, e si stabiliscono le relative equazioni differenziali, dimostrando come proprietà caratteristica di queste curve quella di soddisfare ad una certa equazione variazionale che ben può dirsi una generalizzazione del principio dell'azione stazionaria.

Come particolari sistemi di curve naturali vengono studiate le *geodetiche*, le *brachistocrone di una $V_n$ con vincoli anolonomi* e le curve che rappresentano le configurazioni di equilibrio nella $V_n$ di un filo flessibile e inestendibile soggetto a vincoli anolonomi e sottoposto a forze derivanti da un potenziale $U$.

Si trovano poi le equazioni differenziali vettoriali delle curve in questione, pervenendo alla determinazione della reazione offerta da una curva naturale, supposta priva di attrito, quando il punto $Q$ si muove su di essa sotto l'azione di una forza derivante da un potenziale.

Infine si stabilisce una notevole formula relativa alla curvatura geodetica

---

[4] J. LIPKA, *Note on velocity sistems in curve space of n dimensions*, Publ. Massachusetts Inst. Tecn. (2) n. 2 (1921).

[5] Cfr. C. AGOSTINELLI, *Sui sistemi di velocità e le famiglie naturali di linee in uno spazio curvo*, Pont. Acad. Sci. Acta **86**, 287-314 (1933).

delle curve considerate, da cui si fanno scaturire alcune importanti proprietà geometriche di esse.

## § 2. – Traiettorie dinamiche.

L'equazione generale del moto di un sistema materiale, che supporremo dapprima a vincoli olonomi, privi di attrito e indipendenti dal tempo e soggetto a forze derivanti da un potenziale $U(q_1, q_2, ..., q_n)$, si traduce nella seguente [6]

$$\left(\frac{d^2Q}{dt^2} - \operatorname{grad} U\right) \times \delta Q = 0\,, \tag{1}$$

ove $\dfrac{d^2Q}{dt^2}$ è la derivata seconda tangenziale del punto $Q$, immagine del nostro sistema, nel senso di BOGGIO; grad $U$ è il vettore, anch'esso tangente alla varietà metrica $V_n$ nel punto $Q$, di componenti covarianti $\dfrac{\partial U}{\partial q_1}, \dfrac{\partial U}{\partial q_2}, ..., \dfrac{\partial U}{\partial q_n}$ e $\delta Q$ è uno spostamento virtuale del punto $Q$ sulla $V_n$.

Il sistema sia soggetto ulteriormente ad $m$ vincoli di mobilità anolonomi, rappresentati mediante le equazioni

$$\boldsymbol{b}_k \times \frac{dQ}{dt} = 0\,, \qquad (k = 1, 2, ..., m), \tag{2}$$

ove $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, ..., \boldsymbol{b}_m$ sono $m$ vettori tangenti alla varietà metrica $V_n$ nel punto $Q$. Uno spostamento virtuale di questo punto deve allora verificare le equazioni

$$\boldsymbol{b}_k \times \delta Q = 0\,, \qquad (k = 1, 2, ..., m). \tag{3}$$

Introducendo i moltiplicatori indeterminati $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ dalle (1) e (3) si deduce

$$\left(\frac{d^2Q}{dt^2} - \operatorname{grad} U - \sum_1^m{}_k \lambda_k \boldsymbol{b}_k\right) \times \delta Q = 0\,.$$

Si può disporre dei parametri $\lambda_k$ in modo che quest'equazione sussista per spostamenti arbitrari $\delta Q$, e si ha così la seguente equazione vettoriale del

(6) Cfr. A. NADILE, *Forma sintetica delle equazioni del moto di un sistema anolonomo*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 5 (1950-51).

movimento del punto $Q$:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = \operatorname{grad} U + \sum_1^m{}_k \lambda_k \boldsymbol{b}_k , \tag{4}$$

alla quale vanno associate le equazioni (2) dei vincoli anolonomi.

Dalla (4), moltiplicando ambo i membro scalarmente per $\frac{dQ}{dt}$, e tenendo conto delle (2), si ricava

$$\frac{d^2Q}{dt^2} \times \frac{dQ}{dt} = \frac{dU}{dt} ,$$

da cui segue immediatamente l'integrale dell'energia

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dQ}{dt}\right)^2 = U + h , \tag{5}$$

essendo $h$ la costante delle forze vive.

Servendosi di questo integrale si può eliminare il tempo dalle equazioni del moto ottenendo così le equazioni delle traiettorie dinamiche. Per questo scopo indichiamo con $s$ l'arco di traiettoria dinamica descritta dal punto $Q$, allora dalla (5) si ricava

$$\dot{s} \equiv \frac{ds}{dt} = \sqrt{2(U + h)} . \tag{6}$$

Si ha inoltre

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{ds}\dot{s} = \frac{dQ}{ds}\sqrt{2(U + h)} ,$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = \frac{d^2Q}{ds^2}\dot{s}^2 + \frac{dQ}{ds}\ddot{s} = 2(U + h)\frac{d^2Q}{ds^2} + \ddot{s}\frac{dQ}{ds} ,$$

e pertanto dalla (4) si deduce

$$2(U + h)\frac{d^2Q}{ds^2} + \ddot{s}\frac{dQ}{ds} = \operatorname{grad} U + \sum_1^m{}_k \lambda_k \boldsymbol{b}_k . \tag{7}$$

Moltiplicando ambo i membri di questa scalarmente per $\frac{dQ}{ds}$ e osservando che

$$\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s}\right)^2 = 1 \; ; \qquad \frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}s^2} \times \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s}\right)^2 = 0 \, ,$$

e che per la (2) è $\boldsymbol{b}_k \times \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s} = 0$, si ottiene

$$\ddot{s} = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} = \operatorname{grad} U \times \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s} \, .$$

Questa mostra che l'accelerazione tangenziale del punto $Q$ dipende solo dalla sollecitazione attiva e non dai vincoli anolonomi. Sostituendo nella stessa (7) si ha

$$2(U + h)\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}s^2} + \operatorname{grad} U \times \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s} \cdot \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s} = \operatorname{grad} U + \sum_1^m {}_k \, \lambda_k \boldsymbol{b}_k \, ,$$

da cui

$$\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}s^2} = \operatorname{grad} \log \sqrt{U + h} - \frac{\mathrm{d} \log \sqrt{U + h}}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s} + \sum_1^m {}_k \, \lambda_k \frac{\boldsymbol{b}_k}{2(U + h)} \, , \tag{8}$$

che è l'equazione vettoriale della traiettoria dinamica del sistema considerato; ad essa vanno associate le equazioni

$$\boldsymbol{b}_k \times \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s} = 0 \, , \qquad (k = 1, 2, \ldots, m), \tag{9}$$

che derivano dai vincoli (2).

Se $\boldsymbol{b}_{m+h}$, $(h = 1, 2, \ldots, n - m)$, sono $n - m$ vettori unitari fra loro a due a due ortogonali, e ortogonali ai vettori $\boldsymbol{b}_k$, per il che si hanno le relazioni

$$\boldsymbol{b}^2_{m+h} = 1 \; ; \qquad \boldsymbol{b}_{m+j} \times \boldsymbol{b}_{m+h} = 0 \, , \quad \text{per} \quad j \neq h \; ; \qquad \boldsymbol{b}_{m+h} \times \boldsymbol{b}_k = 0 \, ,$$

possiamo dalla (8) eliminare i parametri indeterminati $\lambda_k$, moltiplicando ambo i membri scalarmente per $\boldsymbol{b}_{m+h}$. Si ricava così

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}s^2} + \frac{\mathrm{d} \log \sqrt{U + h}}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s} - \operatorname{grad} \log \sqrt{U + h}\right) \times \boldsymbol{b}_{m+h} = 0 \, , \tag{10}$$

$$(h = 1, 2, \ldots, n - m),$$

che sono le equazioni della traiettoria dinamica del nostro sistema anolonomo, alle quali, al solito, vanno associate le equazioni (9).

Osserviamo che le (10) si possono scrivere anche

$$\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\sqrt{2(U+h)}\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s}\right]-\operatorname{grad}\sqrt{2(U+h)}\right\}\times\boldsymbol{b}_{m+h}=0\,. \tag{10'}$$

Le equazioni della traiettoria dinamica sono complessivamente $n$, e precisamente si hanno $n-m$ equazioni differenziali del secondo ordine ed $m$ equazioni differenziali del prim'ordine in cui sono funzioni incógnite dell'arco $s$ gli $n$ parametri lagrangiani $q_1, q_2, \dots, q_n$. Esse ammettono l'integrale $\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s}\right)^2=1$.

Per avere sotto altra forma le equazioni della traiettoria dinamica osserviamo che, in virtù delle (9) e delle ipotesi fatte, il vettore $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s}$ appartiene allo $S_{n-m}$ euclideo tangente alla varietà metrica $V_n$ nel punto $Q$, e individuato dalle direzioni dei vettori $\boldsymbol{b}_{m+h}$, $(h=1, 2, \dots, n-m)$. Possiamo scrivere perciò

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s}=\sum_1^m{}_h\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s}\times\boldsymbol{b}_{m+h}\cdot\boldsymbol{b}_{m+h}\,,$$

e ponendo

$$\beta_h=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s}\times\boldsymbol{b}_{m+h}\,,\qquad (h=1, 2, \dots, n-m),$$

ove le $\beta_h$ si possono chiamare *caratteristiche di direzione*, si ha

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s}=\sum_1^{n-m}{}_h\,\beta_h\boldsymbol{b}_{m+h}\,. \tag{11}$$

Si ricava di qui

$$\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}s^2}=\sum_1^{n-m}{}_h\left(\frac{\mathrm{d}\beta_h}{\mathrm{d}s}\,\boldsymbol{b}_{m+h}+\beta_h\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}_{m+h}}{\mathrm{d}s}\right)$$

e sostituendo nelle (10) esse diventano

$$\sum_1^{n-m}{}_j\left(\frac{\mathrm{d}\beta_j}{\mathrm{d}s}\,\boldsymbol{b}_{m+j}\times\boldsymbol{b}_{m+h}+\beta_j\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}_{m+j}}{\mathrm{d}s}\times\boldsymbol{b}_{m+h}\right)-\frac{1}{2(U+h)}\left[\operatorname{grad}U\times\boldsymbol{b}_{m+h}-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s}\beta_h\right]=0\,,$$

cioè

$$\frac{\mathrm{d}\beta_h}{\mathrm{d}s}+\sum_1^{n-m}{}_j\,\beta_j\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}_{m+j}}{\mathrm{d}s}\times\boldsymbol{b}_{m+h}-\frac{1}{2(U+h)}\left[\operatorname{grad}U\times\boldsymbol{b}_{m+h}-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s}\,\beta_h\right]=0\,, \tag{I}$$

$$(h=1, 2, \dots, n-m)\,.$$

Inoltre, moltiplicando ambo i membri della (11) scalarmente per grad $q_r$ e indicando con

$$\boldsymbol{b}^r_{m+h} = \boldsymbol{b}_{m+h} \times \operatorname{grad} q_r$$

le componenti controvarianti del vettore $\boldsymbol{b}_{m+h}$, si ha

$$\text{(II)} \qquad \frac{\mathrm{d}q_r}{\mathrm{d}s} = \sum_1^{n-m}{}_h \beta_h \boldsymbol{b}^r_{m+h}\,, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Le (I) e (II) costituiscono un sistema di $(n-m)+n=2n-m$ equazioni differenziali del prim'ordine nelle $2n-m$ funzioni incognite $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-m}, q_1, q_2, \ldots, q_n$ della variabile indipendente $s$, ridotte a forma normale. Esse definiscono le traiettorie dinamiche del sistema e le incognite $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-m}$ sono i coefficienti direttivi della traiettoria.

Deve sussistere l'integrale

$$\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s}\right)^2 = \sum_1^{n-m}{}_h \beta_h^2 = 1\,.$$

Invero dalla (I), moltiplicando per $\beta_h$ e sommando rispetto all'indice $h$, si ha

$$\frac{1}{2}\sum_1^{n-m}{}_h \frac{\mathrm{d}\beta_h^2}{\mathrm{d}s} + \sum_1^{n-m}{}_{jh} \beta_j\beta_h \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}_{m+j}}{\mathrm{d}s} \times \boldsymbol{b}_{m+h} -$$

$$- \frac{1}{2(U+h)}\left[\operatorname{grad} U \times \sum_1^{n-m}{}_h \boldsymbol{b}_{m+h}\beta_h - \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s}\sum_1^{n-m}{}_h \beta_h^2\right] = 0,$$

ossia

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\sum_1^{n-m}{}_h \beta_h^2\right) + \frac{1}{2}\sum_1^{n-m}{}_{jh} \beta_j\beta_h \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}_{m+j}}{\mathrm{d}s} \times \boldsymbol{b}_{m+h} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}_{m+h}}{\mathrm{d}s} \times \boldsymbol{b}_{m+j}\right] -$$

$$- \frac{1}{2(U+h)}\left[\operatorname{grad} U \times \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s} - \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s}\sum_1^{n-m}{}_h \beta_h^2\right] = 0.$$

Ma

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}_{m+j}}{\mathrm{d}s} \times \boldsymbol{b}_{m+h} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}_{m+h}}{\mathrm{d}s} \times \boldsymbol{b}_{m+j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\boldsymbol{b}_{m+h} \times \boldsymbol{b}_{m+j}) = 0\,,$$

perciò

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\sum_1^{n-m}{}_h \beta_h^2\right) - \frac{1}{2(U+h)}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s}\left(1 - \sum_1^{n-m}{}_h \beta_h^2\right) = 0 ,$$

che risulta identicamente verificata per $\sum_1^{n-m}{}_h \beta_h^2 = 1$.

Una traiettoria sarà individuata dalla condizione di passare per un punto $Q_0 \equiv (q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0)$ della varietà $V_n$ e di avere ivi una tangente assegnata appartenente all'$S_{n-m}$ euclideo individuato dai vettori $\boldsymbol{b}_{m+h}$. Per un punto $Q_0$ passeranno quindi $\infty^{n-m-1}$ traiettorie (per un dato valore della costante $h$ delle forze vive). La totalità delle traiettorie per un dato valore della costante delle forze vive è dunque $\infty^{2(n-1)-m}$, e al variare di $h$ si avranno $\infty^{2n-m-1}$ traiettorie.

## § 3. – Curve naturali associate a un sistema anolonomo.

Sia $F(q_1, q_2, \dots, q_n)$ una funzione del punto $Q \equiv (q_1, q_2, \dots, q_n)$ che descrive la varietà metrica $V_n$ relativa al sistema anolonomo precedentemente considerato e prendiamo in esame le curve di $V_n$ per cui l'integrale

$$I = \int_A^B F\,\mathrm{d}s , \tag{1}$$

esteso all'arco di una di esse compreso fra i punti $A$ e $B$, sia *stazionario*, compatibilmente con le condizioni che lungo queste curve sia ancora

$$\boldsymbol{b}_k \times \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s} = 0 , \qquad (k = 1, 2, \dots, m), \tag{2}$$

cioè che queste curve si mantengano ortogonali alle linee delle congruenze definite dai vettori $\boldsymbol{b}_k$.

Le curve così definite si chiameranno *curve naturali associate al dato sistema anolonomo, o curve naturali con vincoli anolonomi.*

Pertanto, quando si passi dall'arco considerato ad un altro infinitamente vicino, appartenente alla stessa $V_n$ e compreso fra gli stessi estremi $A$ e $B$, dovremo avere

$$\delta I = \delta \int_A^B F\,\mathrm{d}s = 0 ,$$

con le condizioni che derivano dalle (2), cioè

$$\boldsymbol{b}_k \times \delta Q = 0 , \qquad (k = 1, 2, \dots, m). \tag{3}$$

Per stabilire sotto forma geometrica, e nel modo più rapido, l'equazione differenziale delle curve naturali, osserviamo che dalla (1), avendo supposto i punti $A$ e $B$ fissi, prendendo la variazione di ambo i membri si ha

$$\delta I = \int_A^B \delta F \cdot \mathrm{d}s + \int_A^B F \delta \mathrm{d}s\,, \tag{4}$$

mentre dalla $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}Q^2$ ricaviamo: $\mathrm{d}s \cdot \delta \mathrm{d}s = \mathrm{d}Q \times \delta \mathrm{d}Q = \mathrm{d}Q \times \mathrm{d}\delta Q$, e quindi $\delta \mathrm{d}s = \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s} \times \mathrm{d}\delta Q$; per tal motivo con una semplice integrazione per parti si ottiene

$$\int_A^B F\,\delta \mathrm{d}s = \int_A^B F \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s} \times \mathrm{d}\delta Q = \left(F \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s} \times \delta Q\right)_A^B - \int_A^B \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(F \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s}\right) \times \delta Q \cdot \mathrm{d}s\,.$$

Ma agli estremi $A$, $B$ è $\delta Q = 0$, ne segue

$$\int_A^B F\,\delta \mathrm{d}s = -\int_A^B \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(F \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s}\right) \times \delta Q \cdot \mathrm{d}s\,.$$

Sostituendo nella (4) e osservando che $\delta F = \operatorname{grad} F \times \delta Q$, si ha

$$\delta I = \int_A^B \left[\operatorname{grad} F - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(F \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s}\right)\right] \times \delta Q\, \mathrm{d}s\,.$$

Ora, tenendo presente che $\delta I$ dev'essere nullo per quegli spostamenti $\delta Q$ che verificano le (3) e applicando il metodo dei moltiplicatori di LAGRANGE, oppure considerando $n-m$ vettori unitari ortogonali tra loro e ai vettori $\boldsymbol{b}_k$, e siano $\boldsymbol{b}_{m+h}$, $(h = 1, 2, \ldots, n-m)$, si ricava che l'equazione vettoriale delle curve anzidette è

$$\operatorname{grad} F + \sum_1^m{}_k \lambda_k \boldsymbol{b}_k - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(F \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s}\right) = 0\,, \tag{5}$$

oppure

$$\left[\operatorname{grad} F - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(F \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s}\right)\right] \times \boldsymbol{b}_{m+h} = 0\,, \qquad (h = 1, 2, \ldots, n-m), \tag{5'}$$

alle quali, nell'un caso e nell'altro, vanno associate le equazioni (2).

Se, in particolare, poniamo $F=\sqrt{2(U+h)}$, le equazioni (5') coincidono con le equazioni (10'), del § 2, delle traiettorie dinamiche del sistema anolonomo considerato. In questo caso l'integrale (1) diventa

$$I=\int_A^B\sqrt{2(U+h)}\,\mathrm{d}s$$

ed esprime, com'è noto, l'*azione* del sistema relativa all'arco $AB$ di traiettoria. Le traiettorie del sistema anolonomo considerato risultano allora le curve di $V_n$ che rendono stazionaria (minima) l'azione, compatibilmente con le condizioni di anolonomia

$$\boldsymbol{b}_k\times\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s}=0\,.$$

Per $F=$ cost. si hanno le curve che rendono minimo l'integrale

$$I=\int_A^B\mathrm{d}s$$

con le condizioni $\boldsymbol{b}_k\times\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s}=0$.

Le equazioni di queste curve risultano

$$\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}s^2}\times\boldsymbol{b}_{m+h}=0\,,\qquad (h=1,2,\dots,n-m),$$

alle quali vanno associate le

$$\boldsymbol{b}_k\times\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s}=0\,,\qquad (k=1,2,\dots,m).$$

Le curve che soddisfano alle equazioni testè ottenute si possono chiamare le *geodetiche di $V_n$ con vincoli anolonomi.*

Altro esempio notevole di curve naturali di una varietà metrica $V_n$, con vincoli anolonomi, si ha quando si pone $F=1/\sqrt{2(U+h)}$. Si hanno allora le curve che rendono stazionario (minimo) l'integrale

$$I=\int_A^B\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2(U+h)}}$$

compatibilmente con le condizioni $\boldsymbol{b}_k\times\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s}=0$, $(k=1,2,\dots,m)$.

Questo integrale rappresenta il tempo che impiega il punto mobile $Q$, sollecitato da una forza derivante dal potenziale $U$, a percorrere un arco $AB$ di una di tali curve.

Invero, per l'esistenza dell'integrale delle forze vive $\frac{1}{2}\left(\frac{dQ}{dt}\right)^2 = U + h$, si ha $dt = ds/\sqrt{2(U+h)}$.

Le curve così definite sono dunque le *brachistocrone di* $V_n$ *con vincoli anolonomi*.

Un altro esempio si ha ponendo $F = U + h$; si ottengono allora le curve che rendono minimo l'integrale $\int_A^B (U+h)\,ds$, con le condizioni $\boldsymbol{b}_k \times \frac{dQ}{ds} = 0$, e sono le figure di equilibrio in $V_n$ di un filo flessibile e inestendibile sottoposto a forze derivanti da un potenziale $U$ e soggetto ancora a vincoli anolonomi espressi dalle relazioni $\boldsymbol{b}_k \times \frac{dQ}{ds} = 0$.

L'equazione vettoriale del moto di un punto $Q$ su una linea naturale $\Gamma$ con vincoli anolonomi, supposta priva di attrito, e soggetto a una forza di potenziale $U$, sarà della forma

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = \operatorname{grad} U + \boldsymbol{R}, \tag{6}$$

ove $\boldsymbol{R}$ è la componente della reazione secondo la normale principale, relativa a $V_n$, della curva $\Gamma$.

Dalla (6), moltiplicando scalarmente per $\frac{dQ}{dt}$ e osservando che $\boldsymbol{R} \times \frac{dQ}{dt} = 0$, si deduce l'integrale delle forze vive

$$\dot{s}^2 = 2(U + h)$$

e, con procedimento analogo a quello effettuato per le traiettorie dinamiche, si ricava $\ddot{s} = \frac{dU}{ds}$; dopo di che dalla (6) mediante eliminazione del tempo si ottiene l'equazione

$$2(U+h)\frac{d^2Q}{ds^2} + \frac{dU}{ds}\frac{dQ}{ds} = \operatorname{grad} U + \boldsymbol{R}.$$

D'altra parte se $F$ è la funzione che caratterizza la curva naturale $\Gamma$, allora sussiste la (5), vale a dire

$$\frac{d^2Q}{ds^2} + \frac{d \log F}{ds}\frac{dQ}{ds} - \operatorname{grad}\log F - \sum_1^m {}_k \mu_k \frac{\boldsymbol{b}_k}{F} = 0, \tag{7}$$

ove si è posto $\mu_k$ in luogo di $\lambda_k$.

Sottraendo da questa l'equazione precedente, dopo aver diviso per $2(U+h)$, si ricava

$$\boldsymbol{R} = 2(U+h)\left[\operatorname{grad}\log\frac{F}{\sqrt{2(U+h)}} - \frac{d}{ds}\log\frac{F}{\sqrt{2(U+h)}}\frac{dQ}{ds}\right] + \sum_1^m {}_k \frac{2(U+h)}{F}\mu_k \boldsymbol{b}_k .$$

Nel caso delle traiettorie dinamiche la reazione $\boldsymbol{R}$ deve ridursi a quella che proviene dai vincoli anolonomi, cioè per $F = \sqrt{2(U+h)}$ deve ridursi, in virtù della (4) del § 2, alla $\sum_1^m {}_k \lambda_k \boldsymbol{b}_k$. Ne segue che dev'essere

$$\mu_k = \lambda_k / \sqrt{2(U+h)}$$

e quindi

$$\boldsymbol{R} = 2(U+h)\left[\operatorname{grad}\log\frac{F}{\sqrt{2(U+h)}} - \frac{d}{ds}\log\frac{F}{\sqrt{2(U+h)}}\frac{dQ}{ds}\right] + \sum_1^m {}_k \frac{\sqrt{2(U+h)}}{F}\lambda_k \boldsymbol{b}_k .$$

Le componenti di $\boldsymbol{R}$ secondo le direzioni dei vettori $\boldsymbol{b}_{m+h}$, che abbiamo supposto unitari, ortogonali fra loro, e ortogonali ai vettori $\boldsymbol{b}_k$, risultano

$$\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{b}_{m+h} = 2(U+h)\left[\operatorname{grad}\log\frac{F}{\sqrt{2(U+h)}} - \frac{d}{ds}\log\frac{F}{\sqrt{2(U+h)}}\frac{dQ}{ds}\right]\times\boldsymbol{b}_{m+h} .$$

Queste componenti si annullano nel caso delle traiettorie dinamiche, mentre nel caso di una curva naturale con gli stessi vincoli anolonomi, esse rappresentano le componenti di quella parte della reazione che nasce per il fatto che il punto è vincolato a muoversi su quella linea naturale prestabilita.

## § 4. – Alcune proprietà geometriche delle curve naturali con vincoli anolonomi.

L'equazione differenziale vettoriale delle curve naturali, con vincoli anolonomi, se poniamo

$$L = \log F$$

in virtù della (7) del § precedente, si può scrivere più semplicemente

$$(1) \qquad \frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}s^2} = \operatorname{grad} L - \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s} + \sum_{1}^{m}{}_k \mu_k \boldsymbol{b}_k\,,$$

ove si è scritto $\mu_k$ invece di $\mu_k/F$, essendo sempre $\mu_k$ un moltiplicatore indeterminato. Ed è chiaro che alla (1) vanno associate le

$$\boldsymbol{b}_k \times \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s} = 0\,, \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Una curva naturale sarà individuata dalla condizione di passare per un punto dato della $V_n$ e di avere ivi una tangente assegnata nell'$S_{n-m}$ euclideo individuato dai vettori $\boldsymbol{b}_{m+h}$. Per un punto ne passeranno allora $\infty^{n-m-1}$ e la totalità di esse è $\infty^{2(n-1)-m}$.

Ora per il punto $Q$ di una curva naturale $\Gamma$ con vincoli anolonomi valgono le formule

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{t}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}s^2} = \frac{1}{\varrho}\,\boldsymbol{n}\,,$$

nelle quali $\boldsymbol{t}$ rappresenta il versore della tangente, $\boldsymbol{n}$ quello della normale principale relativa a $V_n$ e $1/\varrho$ la curvatura geodetica relativa a $V_n$, sicchè l'equazione (1) si può scrivere

$$(2) \qquad \frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}s^2} \equiv \frac{\boldsymbol{n}}{\varrho} = \operatorname{grad} L - \operatorname{grad} L \times \boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{t} + \sum_{1}^{m}{}_k \mu_k \boldsymbol{b}_k\,.$$

Intanto, poichè la direzione $\boldsymbol{t}$ appartiene all'$S_{n-m}$ euclideo dei vettori $\boldsymbol{b}_{m+h}$, $(h = 1, 2, \ldots, n-m)$, si ha

$$\boldsymbol{t} \equiv \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s} = \sum_{1}^{n-m}{}_h \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s} \times \boldsymbol{b}_{m+h}\cdot\boldsymbol{b}_{m+h} = \sum_{1}^{n-m}{}_h \beta_h \boldsymbol{b}_{m+h}\,,$$

ove i coefficienti $\beta_h$ sono le caratteristiche di direzione. E perciò la (2) diventa

$$\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}s^2} \equiv \frac{\boldsymbol{n}}{\varrho} = \operatorname{grad} L - \sum_{1}^{n-m}{}_h \beta_h \operatorname{grad} L \times \boldsymbol{b}_{m+h}\cdot \sum_{1}^{n-m}{}_j \beta_j \boldsymbol{b}_{m+j} + \sum_{1}^{m}{}_k \mu_k \boldsymbol{b}_k\,.$$

Consideriamo ora il vettore $\sum_{1}^{n-m}{}_h \frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}s^2} \times \boldsymbol{b}_{m+h}\cdot\boldsymbol{b}_{m+h}$, il cui modulo indicheremo con $1/\varrho_v$ e il versore con $\boldsymbol{n}_v$; poniamo cioè

$$\frac{\boldsymbol{n}_v}{\varrho_v} = \sum_1^{n-m}{}_h \frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}s^2} \times \boldsymbol{b}_{m+h} \cdot \boldsymbol{b}_{m+h} .$$

La direzione del vettore $\boldsymbol{n}_v$ sarà chiamata *normale principale*, relativa all'$S_{n-m}$ euclideo, della curva naturale vincolata $\Gamma$, ed $1/\varrho_v$ *curvatura geodetica*, relativa allo stesso $S_{n-m}$ euclideo, della stessa curva $\Gamma$.

Osservando che è $\boldsymbol{t} = \sum_1^{n-m}{}_h \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{b}_{m+h} \cdot \boldsymbol{b}_{m+h}$, e tenendo conto della ortogonalità fra i vettori $\boldsymbol{b}_{m+h}$ e $\boldsymbol{b}_k$, dalla (2) ricaviamo

$$\frac{\boldsymbol{n}_v}{\varrho_v} = \sum_1^{n-m}{}_h \frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}s^2} \times \boldsymbol{b}_{m+h} \cdot \boldsymbol{b}_{m+h} = \sum_1^{n-m}{}_h \operatorname{grad} L \times \boldsymbol{b}_{m+h} \cdot \boldsymbol{b}_{m+h} - \operatorname{grad} L \times \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{t} . \tag{3}$$

Da questa, moltiplicando scalarmente per $\boldsymbol{n}_v$ e osservando che è $\boldsymbol{n}_v \times \boldsymbol{t} = 0$, $\boldsymbol{n}_v = \sum_1^{n-m}{}_h \boldsymbol{n}_v \times \boldsymbol{b}_{m+h} \cdot \boldsymbol{b}_{m+h}$, si deduce la formula notevole

$$\frac{1}{\varrho_v} = \sum_1^{n-m}{}_h \operatorname{grad} L \times \boldsymbol{b}_{m+h} \cdot \boldsymbol{b}_{m+h} \times \boldsymbol{n}_v ,$$

cioè

$$\frac{1}{\varrho_v} = \operatorname{grad} L \times \boldsymbol{n}_v , \tag{4}$$

precisamente si ha che *la curvatura geodetica di una curva naturale $\Gamma$, relativa all'$S_{n-m}$ euclideo tangente alla $V_n$ nel punto $Q$ e individuato dalle $n - m$ direzioni dei vettori $\boldsymbol{b}_{m+h}$, è uguale alla proiezione ortogonale del vettore* grad $L$ *sulla normale principale relativa allo stesso $S_{n-m}$, della curva $\Gamma$.*

Sulla normale principale relativa all'$S_{n-m}$ di ciascuna delle $\infty^{n-m-1}$ curve di una famiglia naturale con vincoli anolonomi, uscenti dal medesimo punto $Q$ della varietà $V_n$, secondo direzioni appartenenti all'$S_{n-m}$ euclideo individuato dai vettori $\boldsymbol{b}_{m+h}$, si consideri il centro $C$ di curvatura geodetica distante $\varrho_v$ da $Q$, vale a dire il punto $C$ definito dalla relazione

$$C = Q + \varrho_v \boldsymbol{n}_v .$$

Dalla (4), che in questo caso assume l'aspetto

$$\operatorname{grad} L \times (C - Q) = 1 , \tag{5}$$

e dalle relazioni

$$(5') \qquad (C - Q) \times \boldsymbol{b}_k = 0 \,, \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

che al pari della precedente sono lineari, si deduce che il luogo dei centri di curvatura geodetica è un $S_{n-m-1}$ euclideo (iperpiano subordinato in $S_{n-m}$) appartenente all'$S_{n-m}$.

Consideriamo ora un altro punto $C_1$ dell'$S_{n-m-1}$ definito dalle (5) e (5'); si avrà

$$\operatorname{grad} L \times (C_1 - Q) = 1 \;; \qquad (C_1 - Q) \times \boldsymbol{b}_k = 0 \,, \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

ed inoltre

$$\operatorname{grad} L \times (C - C_1) = 0 \;; \qquad (C - C_1) \times \boldsymbol{b}_k = 0 \,, \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Ora, per l'arbitrarietà di $C$ e $C_1$, si deduce che l'$S_{n-m-1}$ luogo dei centri di curvatura geodetica relativa all'$S_{n-m}$ euclideo individuato dai vettori $\boldsymbol{b}_{m+h}$, di una famiglia di curve naturali con vincoli anolonomi, passanti per un dato punto $Q$ della varietà metrica $V_n$, è ortogonale al vettore grad $L$, e quindi anche ortogonale alla proiezione di grad $L$ sull'$S_{n-m}$.

In particolare, se $L = \log \sqrt{2(U+h)}$ risulta $\operatorname{grad} L = \dfrac{1}{2(U+h)} \operatorname{grad} U$ e sussiste il fatto notevole che *il luogo dei centri di curvatura geodetica delle* $\infty^{n-m-1}$ *traiettorie anolonome uscenti da un punto della varietà metrica è ortogonale alla forza applicata in quel punto, anzi è ortogonale alla proiezione del vettore* grad $U$ *sull'*$S_{n-m}$ *individuato dai vettori* $\boldsymbol{b}_{m+h}$.