VITTORIO E. BONONCINI (*)

Sugli integrali regolari del Calcolo delle Variazioni per superficie in forma parametrica. (**)

1. – Recentemente L. CESARI ha introdotto ([1]) il concetto di integrale $\mathcal{J}_S$ (nel senso di WEIERSTRASS) per una superficie S, assegnata in forma parametrica, continua e di area finita $L(S)$ secondo LEBESGUE. Egli ha dimostrato ([2]) che tale integrale è indipendente dalla rappresentazione parametrica della superficie S e che esso gode di notevoli proprietà. Ad esempio ([3]), se S e S_n, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, sono superficie continue e di area finita secondo LEBESGUE, se $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ e $\lim\limits_{n\to\infty} L(S_n) = L(S)$, allora $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{J}_{S_n} = \mathcal{J}_S$. Inoltre ([4]), se la rappresentazione $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $(u, v) \in Q(0, 0; 1, 1)$ che si considera della superficie S è tale che l'area di S sia data dall'integrale classico

$$L(S) = \iint\limits_Q \sqrt{H_1^2 + H_2^2 + H_3^2}\, du\, dv,$$

allora anche $\mathcal{J}_S$ è dato dall'integrale di LEBESGUE

$$\mathcal{J}_S = \iint\limits_Q F(x, y, z, H_1, H_2, H_3)\, du\, dv\,,$$

essendo $H_i = H_i(u, v)$, $(i = 1, 2, 3)$, i tre jacobiani generalizzati relativi delle tre coppie (y, z), (z, x), (x, y) e ove per la funzione $F(x, y, z, u_1, u_2, u_3)$ che definisce $\mathcal{J}_S$ si fanno le due ipotesi seguenti:

1ª) La funzione $F(x, y, z, u_1, u_2, u_3)$, dei sei argomenti x, y, z, u_1, u_2, u_3, sia continua, ad un valore, per tutti i punti (x, y, z) di un dato insieme chiuso A

(*) Indirizzo: Istituto Matematico S. PINCHERLE, Università, Bologna (Italia).
(**) Ricevuto il 13-II-1952.

([1]) L. CESARI, *La nozione di integrale sopra una superficie in forma parametrica*, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) **13**, 77-117 (1944); cfr. in particolare la pag. 79.

([2]) Loc. cit. in ([1]), pag. 93.

([3]) Loc. cit. in ([1]), pag. 101.

([4]) Loc. cit. in ([1]), pag. 107.

dello spazio (reale) e per ogni terna di numeri reali (u_1, u_2, u_3) non tutti nulli (vettori non nulli).

2ª) La funzione $F(x, y, z, u_1, u_2, u_3)$ sia positivamente omogenea di grado uno rispetto alle variabili u_1, u_2, u_3, vale a dire soddisfi alla uguaglianza

$$F(x, y, z, ku_1, ku_2, ku_3) = kF(x, y, z, u_1, u_2, u_3),$$

per ogni $k > 0$.

Convenendo di porre $F(x, y, z, 0, 0, 0) = 0$ in ogni punto (x, y, z) di A, allora $F(x, y, z, u_1, u_2, u_3)$ risulta continua [in conseguenza della 2ª) ipotesi] anche in ogni punto $(x, y, z, 0, 0, 0)$, essendo il punto (x, y, z) scelto comunque in A.

Nell'ulteriore ipotesi che

3ª) la funzione $F(x, y, z, u_1, u_2, u_3)$ sia continua insieme alle sue derivate parziali prime $F_i = \frac{\partial F}{\partial u_i}$, $(i = 1, 2, 3)$, per ogni punto (x, y, z) di A e per ogni terna (u_1, u_2, u_3) di numeri reali non tutti nulli,

è possibile introdurre ([5]) la funzione $\mathcal{E}$ (di WEIERSTRASS) che risulta definita dall'uguaglianza

$$\mathcal{E}(x, y, z, u_1, u_2, u_3, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) = F(x, y, z, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) - \sum_{i=1}^{3} \bar{u}_i F_i(x, y, z, u_1, u_2, u_3),$$

per ogni punto (x, y, z) di A, per ogni terna di numeri reali (u_1, u_2, u_3) non tutti nulli e per ogni altra terna di numeri reali $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ pure non tutti nulli.

La funzione $\mathcal{E}$ è continua, inoltre, per essere la F e le F_i funzioni positivamente omogenee di grado uno e di grado zero rispetto alle u_i, $(i = 1, 2, 3)$, essa è positivamente omogenea di grado uno rispetto alle $\bar{u}_i$, $(i = 1, 2, 3)$, e di grado zero rispetto alle u_i, $(i = 1, 2, 3)$.

Ricordiamo le seguenti definizioni ([6]).

Sia S_0 una superficie di area finita secondo LEBESGUE, tutta costituita di punti di A; sia $\{S\}$ una classe di superficie aventi aree finite secondo LEBESGUE e tutte costituite di punti di A.

Diremo che l'integrale $\mathcal{J}_S$ è *semicontinuo inferiormente* su S_0 rispetto alla classe $\{S\}$ se, ad ogni $\varepsilon > 0$ arbitrario, si può fare corrispondere un altro numero $\delta > 0$ tale che, per tutte le superficie S della classe $\{S\}$ per le quali $\|S, S_0\| < \delta$, risulti $\mathcal{J}_S > \mathcal{J}_{S_0} - \varepsilon$.

([5]) L. CESARI, *Condizioni sufficienti per la semicontinuità degli integrali in forma parametrica*, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) **14**, 47-79 (1945); cfr. in particolare la pag. 51.

([6]) Loc. cit. in ([5]), pp. 60 e 68.

Diremo che l'integrale $\mathcal{J}_S$ è *definito positivo* [*semidefinito positivo*] se per ogni punto (x, y, z) di A e per ogni terna (u_1, u_2, u_3) di numeri reali non tutti nulli, risulta

$$F(x, y, z, u_1, u_2, u_3) > 0 \qquad [F(x, y, z, u_1, u_2, u_3) \geqslant 0] .$$

Diremo che l'integrale $\mathcal{J}_S$ è *regolare positivo* [*quasi regolare positivo*] se per ogni punto (x, y, z) di A, per ogni terna (u_1, u_2, u_3) di numeri reali non tutti nulli e per ogni altra terna $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ di numeri reali non tutti nulli (non proporzionali a u_1, u_2, u_3), risulta

$$\mathcal{E}(x, y, z, u_1, u_2, u_3, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) > 0 \qquad [\mathcal{E}(x, y, z, u_1, u_2, u_3, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) \geqslant 0] .$$

Analogamente si definiscono gli integrali definiti e semidefiniti negativi, regolari e quasi regolari negativi.

L. CESARI ha dato condizioni necessarie (7) e condizioni sufficienti (8) per la semicontinuità degli integrali $\mathcal{J}_S$. Tra l'altro, ha dimostrato, in particolare, che ogni integrale $\mathcal{J}_S$ definito positivo e quasi regolare è semicontinuo inferiormente nella classe di tutte le superficie parametriche S, continue e di area finita secondo LEBESGUE. Recentemente, poi, L. CESARI ha stabilito teoremi esistenziali assai generali per gli integrali $\mathcal{J}_S$ nella stessa classe di superficie (9).

In questo lavoro studiamo l'integrale $\mathcal{J}_S$ nella seguente ulteriore ipotesi:

4a) La funzione $F(x, y, z, u_1, u_2, u_3)$ sia dotata di derivate parziali seconde $F_{ij} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial u_i \partial u_j}$, $(i, j = 1, 2, 3)$, continue per ogni punto (x, y, z) di A e per ogni vettore (u_1, u_2, u_3) non nullo [le funzioni F_{ij} sono positivamente omogenee di grado -1 rispetto alle u_i, $(i = 1, 2, 3)$].

Nel presente scritto, facendo uso di una funzione φ analoga alla funzione F_1 per integrali su curve (10), *si dànno teoremi di confronto e di convergenza analoghi a noti teoremi per gli integrali su curve* (11). *In particolare, si dà una condizione*

(7) L. CESARI, *Condizioni necessarie per la semicontinuità degli integrali sopra una superficie in forma parametrica*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **29**, 199-224 (1949).

(8) Loc. cit. in (5).

(9) L. CESARI, *An existence theorem of Calculus of Variations for integrals on parametric surfaces*, Amer. J. Math. **74**, 265-295 (1952).

(10) L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, Vol. I, Zanichelli, Bologna 1921; cfr. la pag. 209.

(11) Loc. cit. in (10), pag. 332.

sufficiente affatto generale la quale assicura che nelle condizioni viste sopra, se

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \qquad e \qquad \lim_{n\to\infty} \mathcal{J}_{S_n} = \mathcal{J}_S ,$$

allora è anche

$$\lim_{n\to\infty} L(S_n) = L(S) \qquad e \qquad \lim_{n\to\infty} \mathcal{J}'_{S_n} = \mathcal{J}'_S ,$$

essendo $\mathcal{J}'_S$ un qualunque altro integrale superficiale.

2. – Richiamo di note proprietà formali della funzione $F(x, y, z, u_1, u_2, u_3)$ nelle ipotesi 1ª), 2ª), 3ª), 4ª).

a) Dalla uguaglianza

$$F(x, y, z, ku_1, ku_2, ku_3) = kF(x, y, z, u_1, u_2, u_3) , \qquad (k > 0),$$

derivando rispetto a k e ponendo poi $k = 1$, si ottiene la relazione (di Eulero)

$$F(x, y, z, u_1, u_2, u_3) = \sum_{i=1}^{3} u_i F_i(x, y, z, u_1, u_2, u_3) , \tag{1}$$

valida per ogni punto (x, y, z) di A e per ogni vettore (u_1, u_2, u_3) non nullo.

Dalle relazioni

$$\mathcal{E}(x, y, z, u_1, u_2 \; u_3, \overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3) = F(x, y, z, \overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3) - \sum_{i=1}^{3} \overline{u}_i F_i(x, y, z, u_1, u_2, u_3),$$

$$F(x, y, z, u_1, u_2, u_3) = \sum_{i=1}^{3} u_i \, F_i \, (x, y, z, u_1, u_2, u_3),$$

sommando membro a membro si trae

$$\mathcal{E}(x, y, z, u_1, u_2, u_3, \overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3) =$$

$$= F(x, y, z, \overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3) - F(x, y, z, u_1, u_2, u_3) - \sum_{i=1}^{3} (\overline{u}_i - u_i) F_i(x, y, z, u_1, u_2, u_3) .$$

Applicando la formula di Taylor, arrestata alle derivate seconde, si ha

$$F(x, y, z, \overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3) = F(x, y, z, u_1, u_2, u_3) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{3} (\overline{u}_i - u_i) F_i(x, y, z, u_1, u_2, u_3) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \widetilde{F}_{ij} \, (\overline{u}_i - u_i)(\overline{u}_j - u_j) ,$$

e quindi

$$\mathcal{E}(x, y, z, u_1, u_2, u_3, \overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \widetilde{F}_{ij} (\overline{u}_i - u_i)(\overline{u}_j - u_j), \tag{2}$$

ove $\widetilde{F}_{ij} = F_{ij}(x, y, z, \widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \widetilde{u}_3)$, essendo $(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \widetilde{u}_3)$ un conveniente punto interno al segmento (finito) s congiungente i punti (u_1, u_2, u_3), $(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3)$. La (2) è valida purchè il segmento s non contenga il punto $(0, 0, 0)$.

b) Dalla formula (1), derivando ambo i membri rispetto ad u_1, oppure u_2, oppure u_3, risulta

$$\begin{cases} u_1 F_{11} + u_2 F_{12} + u F_{13} = 0, \\ u_1 F_{21} + u_2 F_{22} + u_3 F_{23} = 0, \\ u_1 F_{31} + u_2 F_{32} + u_3 F_{33} = 0, \end{cases} \tag{3}$$

e pertanto

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

per ogni punto (x, y, z) di A e per ogni vettore (u_1, u_2, u_3) non nullo. Indicati con A_{ij} i complementi algebrici degli elementi F_{ij} del determinante Δ e supposto che Δ sia di caratteristica due e che i complementi algebrici degli elementi di una qualunque riga non siano tutti nulli, si ha

$$u_1 : u_2 : u_3 = A_{11} : A_{12} : A_{13} = A_{21} : A_{22} : A_{23} = A_{31} : A_{32} : A_{33},$$

ossia

$$\begin{aligned} A_{11} &= m_1 u_1, & A_{12} &= m_1 u_2, & A_{13} &= m_1 u_3, \\ A_{21} &= m_2 u_1, & A_{22} &= m_2 u_2, & A_{23} &= m_2 u_3, \\ A_{31} &= m_3 u_1, & A_{32} &= m_3 u_2, & A_{33} &= m_3 u_3, \end{aligned}$$

avendo indicato con m_1, m_2, m_3 opportune espressioni (numeri).

Supponiamo per il momento che le tre espressioni m_1, m_2, m_3 siano non nulle. Osservando che il determinante Δ è simmetrico [si tenga presente l'ipotesi 4a)], si ha $A_{12} = A_{21}$, $A_{13} = A_{31}$, $A_{23} = A_{32}$ e quindi

$$\frac{m_1}{u_1} = \frac{m_2}{u_2}, \qquad \frac{m_1}{u_1} = \frac{m_3}{u_3}, \qquad \frac{m_2}{u_2} = \frac{m_3}{u_3}.$$

Posto $\varphi = \frac{m_1}{u_1} = \frac{m_2}{u_2} = \frac{m_3}{u_3}$, risulta

$$\begin{array}{lll} A_{11} = \varphi u_1^2, & A_{12} = \varphi u_1 u_2, & A_{13} = \varphi u_1 u_3, \\ A_{21} = \varphi u_2 u_1, & A_{22} = \varphi u_2^2, & A_{23} = \varphi u_2 u_3, \\ A_{31} = \varphi u_3 u_1, & A_{32} = \varphi u_3 u_2, & A_{33} = \varphi u_3^2, \end{array}$$

e perciò

$$\varphi = \frac{A_{11}}{u_1^2} = \frac{A_{12}}{u_1 u_2} = \frac{A_{13}}{u_1 u_3} = \frac{A_{21}}{u_2 u_1} = \frac{A_{22}}{u_2^2} = \frac{A_{23}}{u_2 u_3} = \frac{A_{31}}{u_3 u_1} = \frac{A_{32}}{u_3 u_2} = \frac{A_{33}}{u_3^2}. \tag{4}$$

Notiamo che tali relazioni definiscono la funzione φ anche per ogni terna di numeri reali (u_1, u_2, u_3) in parte nulli, però non tutti nulli, qualora si convenga di definire φ mediante quelle sole fra le espressioni $\frac{A_{11}}{u_1^2}, \frac{A_{12}}{u_1 u_2}, \frac{A_{13}}{u_1 u_3}, \ldots, \frac{A_{33}}{u_3^2}$ che conservano senso. Vedremo nel n. 3 una più precisa discussione circa le ipotesi fatte per giungere alla (4). In virtù delle (4) e dell'ipotesi 4ª) fatta sulla funzione F, si può asserire che la φ è una funzione di x, y, z, u_1, u_2, u_3 continua per ogni punto (x, y, z) di A e per ogni vettore non nullo (u_1, u_2, u_3); sempre dalle (4) segue che la φ è funzione positivamente omogenea di grado -4 rispetto alle u_i, $(i = 1, 2, 3)$.

La funzione φ è analoga alla nota funzione F_1 per integrali su curve. È notevole rilevare che la funzione φ, contrariamente alla funzione F_1 per curve, non cambia segno se si cambia di segno alla F. Ad esempio, per entrambe le funzioni

$$F = +(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^{1/2}, \qquad F = -(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^{1/2}$$

risulta $\varphi = +(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^{-2}$.

3. – Dimostriamo che se $\mathcal{J}_S$ è regolare (positivo o negativo) allora, per ogni punto (x, y, z) di A, l'insieme I dei punti (u_1, u_2, u_3) dello spazio (u_1, u_2, u_3) ove $F_{11} = 0$ non ha punti interni. Analoga affermazione vale per F_{22}, F_{33}. Anzitutto dalla continuità della funzione F_{11} si trae che l'insieme I è chiuso [ove si trascuri il punto $(0, 0, 0)$]. Dimostriamo che I non ha punti interni. Ragioniamo per assurdo supponendo che I abbia punti interni.

In questa ipotesi esiste almeno una sfera σ nello spazio (u_1, u_2, u_3), $\sigma \subset I$; possiamo supporre che σ non contenga il punto $(0, 0, 0)$. Se (u_1, u_2, u_3),

$(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$, $u_1 \neq \bar{u}_1$, $u_2 = \bar{u}_2 \neq 0$, $u_3 = \bar{u}_3 \neq 0$, sono due punti qualsiansi di σ, allora anche il punto $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)$ del n. 2, a), appartiene a σ e si ha

$$F_{11}(x, y, z, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3) = 0 ,$$

$$\mathcal{E}(x, y, z, u_1, u_2, u_3, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) = \frac{1}{2}(\bar{u}_1 - u_1)^2 F_{11}(x, y, z, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3) = 0 ,$$

contro il supposto che $\mathcal{J}_S$ sia regolare. Pertanto l'insieme I è privo di punti interni.

Come corollario abbiamo che, se $\mathcal{J}_S$ è regolare allora per ogni punto (x, y, z) di A anche l'insieme dei punti (u_1, u_2, u_3) ove il determinante Δ ha gli elementi di una riga (colonna) tutti nulli, è chiuso e senza punti interni. Tale insieme non è vuoto come mostra l'esempio $F = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^{1/2}$. Infatti nel punto $u_1 = 1$, $u_2 = u_3 = 0$ risulta $F_{11} = F_{12} = F_{13} = 0$.

Si noti che, per ogni punto (x, y, z) di A, anche l'insieme degli eventuali punti (u_1, u_2, u_3) ove Δ ha caratteristica zero è chiuso e senza punti interni.

Enunciamo esplicitamente la seguente ulteriore ipotesi:

5ª) Per ogni punto (x, y, z) di A, l'insieme J dei punti (u_1, u_2, u_3) per cui Δ ha caratteristica uno non ha punti interni.

Dimostriamo che, nell'ulteriore ipotesi 5ª) e supposto $\mathcal{J}_S$ regolare, per ogni punto (x, y, z) di A, l'insieme H dei punti (u_1, u_2, u_3) nei quali $A_{31} = A_{32} = A_{33} = 0$ è chiuso e non ha punti interni. Analoga affermazione vale per ogni altra riga o colonna del determinante aggiunto di Δ.

Dalla continuità delle funzioni F_{ij} e A_{ij}, $(i, j = 1, 2, 3)$, segue che l'insieme H è chiuso [ove si trascuri il punto $(0, 0, 0)$]. Dimostriamo che H è privo di punti interni. Ragioniamo per assurdo supponendo che H sia dotato di punti interni. Esiste allora una sfera σ nello spazio (u_1, u_2, u_3) con $\sigma \subset H$; possiamo supporre che σ non contenga il punto $(0, 0, 0)$ e inoltre si può supporre che in tutti i punti di σ si abbia $F_{11} \neq 0$, $F_{22} \neq 0$, $F_{33} \neq 0$. Infatti deve esservi almeno un punto di σ ove $F_{11} \neq 0$ e quindi, per la continuità di F_{11}, vi è una sfera $\sigma' \subset \sigma$ per tutti i punti della quale è $F_{11} \neq 0$. Ripetendo il ragionamento per σ' e F_{22} si ottiene una sfera σ'' ove $F_{11} \neq 0$, $F_{22} \neq 0$, e ripetendo il ragionamento per σ'' e F_{33} si ottiene una sfera, che diciamo di nuovo σ, per i punti della quale si ha $F_{11} \neq 0$, $F_{22} \neq 0$, $F_{33} \neq 0$. Possiamo inoltre supporre che Δ abbia caratteristica due in tutta σ. Infatti deve esistere, per l'ipotesi 5ª), almeno un punto in σ ove la caratteristica è due, ossia uno almeno dei numeri A_{ij} è diverso da zero, e poichè A_{ij} è una funzione continua di (u_1, u_2, u_3), ripetendo il ragionamento fatto sopra si prova che Δ ha caratteristica due in tutta la sfera σ.

Avendo supposto $A_{31} = A_{32} = A_{33} = 0$ in σ sarà anche $A_{13} = A_{23} = 0$. Da $A_{33} = 0$ segue $F_{12}^2 = F_{11}F_{22}$ e per essere, in σ, $F_{11} \neq 0$, $F_{22} \neq 0$ sarà pure $F_{12} = F_{21} \neq 0$ in tutto σ. Da $A_{32} = 0$ segue $F_{11}F_{23} = F_{21}F_{13}$, onde, essendo, in σ, $F_{11} \neq 0$, $F_{21} \neq 0$, sarà $\dfrac{F_{13}}{F_{11}} = \dfrac{F_{23}}{F_{21}} = c$. Posto $F_{11} = a$, $\dfrac{F_{12}}{F_{11}} = b$, $\dfrac{F_{33}}{F_{11}} = d$, il determinante Δ diviene

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & ab & ac \\ ab & ab^2 & abc \\ ac & abc & ad \end{vmatrix}, \quad (a \neq 0, \ b \neq 0, \ d \neq 0).$$

Come sappiamo già e come d'altra parte si può verificare, si ha $A_{31} = A_{12} = A_{32} = A_{23} = A_{33} = 0$. Si ha inoltre $A_{11} = a^2b^2(d - c^2)$, $A_{22} = A_{12} = A_{21} = a^2(d - c^2)$. Pertanto dev'essere $d \neq c^2$ in tutto σ altrimenti Δ_1 avrebbe caratteristica uno in qualche punto di σ. Le equazioni (3) si riducono alle due seguenti

$$u_1 + bu_2 + cu_3 = 0\,, \qquad cu_1 + bcu_2 + du_3 = 0\ ;$$

moltiplicando i due membri della prima equazione per c e sottraendo a membro a membro la nuova equazione ottenuta e la seconda delle precedenti equazioni, si trae $(d - c^2)u_3 = 0$, onde $u_3 = 0$ in tutto σ, ciò che è impossibile essendo σ una sfera dello spazio (u_1, u_2, u_3). È così dimostrato che l'insieme H non ha punti interni.

Come corollario abbiamo che, nelle stesse ipotesi [ipotesi 5ª), $\mathcal{J}_s$ regolare], per ogni punto (x, y, z) di A, l'insieme M dei punti (u_1, u_2, u_3) ove $m_1 = A_{11}/u_1 = 0$ è chiuso [trascurando i punti $(0, u_2, u_3)$] e non ha punti interni. La chiusura segue dal fatto che m_1 è funzione continua di (u_1, u_2, u_3) per $u_1 \neq 0$. La proprietà di non avere punti interni segue dalla stessa proprietà per H. Analoghe proprietà hanno gli insiemi dei punti (u_1, u_2, u_3) ove $u_2 = 0$, oppure $u_3 = 0$ [trascurando i punti $(u_1, 0, u_3)$, oppure $(u_1, u_2, 0)$].

Osserviamo che anche l'insieme U dei punti $(u_1, u_2, u_3) \neq (0, 0, 0)$, con $u_1 = 0$, $u_2 \neq 0$, $u_3 \neq 0$, oppure $u_1 = u_2 = 0$, $u_3 \neq 0$, ecc. [piani ed assi coordinati dello spazio (u_1, u_2, u_3)], è evidentemente chiuso e non ha punti interni. Se poi diciamo K l'insieme somma degli insiemi I, J, H, M, U introdotti sopra, anche l'insieme K risulta chiuso [trascurando $(0, 0, 0)$] ed è privo di punti interni.

È così dimostrato che nell'ipotesi 5ª) e supposto $\mathcal{J}_s$ regolare (positivo o negativo), allora, per ogni punto (x, y, z) di A, le relazioni (4) valgono per ogni punto (u_1, u_2, u_3) non in K. Poichè le funzioni A_{ij} sono continue in tutto lo spazio (u_1, u_2, u_3) privato del punto $(0, 0, 0)$, allora per ogni punto

$(u_1, u_2, u_3) \in K - U$, le (4) seguitano a valere essendo ogni punto di tale insieme limite di punti non in K. Finalmente per ogni punto di U [diverso da $(0, 0, 0)$] delle relazioni (4) seguitano a valere quelle che non contengono denominatori nulli.

Si conclude pertanto che, *nelle ipotesi* 1ª), 2ª), 3ª), 4ª), 5ª) *e supposto* $\mathcal{J}_s$ *regolare (positivo o negativo) la funzione* φ *è definita per ogni punto* (x, y, z) *di* A *e per ogni terna* $(u_1, u_2, u_3) \neq (0, 0, 0)$ *e* φ *risulta una funzione continua di* x, y, z, u_1, u_2, u_3 *per ogni punto* (x, y, z) *di* A *e per ogni terna* $(u_1, u_2, u_3) \neq$ $\neq (0, 0, 0)$.

Nei nn. 6 e 7 supporremo che, per ogni punto (x, y, z) di A e per ogni vettore (u_1, u_2, u_3) non nullo, risulti $\varphi > 0$. In tale ipotesi si deve avere $A_{rr} > 0$ per ogni (u_1, u_2, u_3), $u_r \neq 0$, $(r = 1, 2, 3)$, onde l'ipotesi 5ª) risulta necessariamente verificata, cioè l'ipotesi 5ª) è contenuta nella più forte ipotesi $\varphi > 0$. Per semplicità, converremo pertanto di non ripetere l'ipotesi 5ª) ogni qualvolta supporremo $\varphi > 0$.

4. – Osserviamo che se eseguiamo formalmente sul vettore (u_1, u_2, u_3) una sostituzione ortogonale e destrorsa

$$u_i = \sum_{r=1}^{3} b_{ir} v_r, \quad (i = 1, 2, 3); \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = 1, \tag{5}$$

allora la funzione $F(x, y, z, u_1, u_2, u_3)$ si trasforma in una nuova funzione

$$G = G(x, y, z, v_1, v_2, v_3) = F\left(x, y, z, \sum_{r=1}^{3} b_{1r} v_r, \sum_{r=1}^{3} b_{2r} v_r, \sum_{r=1}^{3} b_{3r} v_r\right),$$

che soddisfa alle condizioni 1ª), 2ª), 3ª), 4ª) e inoltre

$$G_r = \frac{\partial G}{\partial v_r} = \sum_{i=1}^{3} b_{ir} F_i, \quad (r = 1, 2, 3); \quad G_{rs} = \frac{\partial^2 G}{\partial v_r \partial v_s} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} b_{ir} b_{js} F_{ij}, \quad (r, s = 1, 2, 3).$$

Indichiamo con Δ' il determinante (analogo al determinante Δ), delle G_{rs}, ossia

$$\Delta' = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{vmatrix},$$

e con B_{rs} il complemento algebrico di G_{rs}.

Conveniamo che, dato un indice qualsiasi $a = 1, 2, 3$, la scrittura (a', a'') stia a denotare la coppia dei valori 1, 2, 3 che manca a completare la terna 1, 2, 3, e data una coppia (a', a''), $a' \neq a''$, $(a', a'' = 1, 2, 3)$, diremo a il valore che manca in (a', a'') per completare la terna 1, 2, 3.

Si ha

$$B_{rs} = (-1)^{r+s} \begin{vmatrix} G_{r's'} & G_{r's''} \\ G_{r''s'} & G_{r''s''} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} b_{ir'} b_{js'} F_{ij} & \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} b_{ir'} b_{js''} F_{ij} \\ \sum_{u=1}^{3} \sum_{v=1}^{3} b_{ur''} b_{vs'} F_{uv} & \sum_{u=1}^{3} \sum_{v=1}^{3} b_{ur''} b_{vs''} F_{uv} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{r+s} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{u=1}^{3} \sum_{v=1}^{3} b_{ir'} b_{ur''} \begin{vmatrix} b_{js'} & b_{js''} \\ b_{vs'} & b_{vs''} \end{vmatrix} F_{ij} F_{uv} =$$

$$= (-1)^{r+s} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{u=1}^{3} \sum_{v=1}^{3} b_{ir'} b_{ur''} b_{js'} b_{vs''} F_{ij} F_{uv} -$$

$$- (-1)^{r+s} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{u=1}^{3} \sum_{v=1}^{3} b_{ir'} b_{ur''} b_{vs'} b_{js''} F_{ij} F_{uv} .$$

Scambiando nella seconda sommatoria l'indice v con l'indice j si ha

$$B_{rs} = (-1)^{r+s} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{u=1}^{3} \sum_{v=1}^{3} b_{ir'} b_{ur''} b_{js'} b_{vs''} F_{ij} F_{uv} -$$

$$- (-1)^{r+s} \sum_{i=1}^{3} \sum_{v=1}^{3} \sum_{u=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} b_{ir'} b_{ur''} b_{js'} b_{vs''} F_{iv} F_{uj} ,$$

dove nella seconda sommatoria si possono eseguire le somme anche nell'ordine $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{u=1}^{3} \sum_{v=1}^{3}$. Pertanto

$$B_{rs} = (-1)^{r+s} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{u=1}^{3} \sum_{v=1}^{3} b_{ir'} b_{ur''} b_{js'} b_{vs''} \begin{vmatrix} F_{ij} & F_{iv} \\ F_{uj} & F_{uv} \end{vmatrix} .$$

Possiamo supporre $i \neq u$, $j \neq v$, dato che i termini dell'ultima somma sono nulli se $i = u$ o $j = v$. Denotiamo la coppia (i, u) con (i', i''), $i' \neq i''$ e la coppia (j, v) con (j', j''), $j' \neq j''$. Pertanto

$$B_{rs} = (-1)^{r+s} \sum_{i', i''} \sum_{j', j''} b_{i'r'} b_{i''r''} b_{j's'} b_{j''s''} \begin{vmatrix} F_{i'j'} & F_{i'j''} \\ F_{i''j'} & F_{i''j''} \end{vmatrix} ,$$

ove le sommatorie sono estese a tutte le coppie (i', i''), $i' \neq i''$, $(i', i'' = 1, 2, 3)$ e (j', j''), $j' \neq j''$, $(j', j'' = 1, 2, 3)$. Seguendo le precedenti convenzioni diremo

i [j] l'indice 1, 2,3 mancante alla coppia (i', i'') [(j', j'')]. Inoltre dobbiamo associare il termine relativo alla coppia (i', i'') a quello relativo alla coppia (i'', i') e analogamente per la coppia (j', j''). Abbiamo così:

$$B_{rs} = (-1)^{r+s} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} (b_{i'r'} b_{i''r''} - b_{i''r'} b_{i'r''})(b_{j's'} b_{j''s''} - b_{j''s'} b_{j's''})(-1)^{i+j} A_{ij} \,,$$

ossia

$$B_{rs} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} (-1)^{i+r}(b_{i'r'} b_{i''r''} - b_{i''r'} b_{i'r''})(-1)^{j+s}(b_{j's'} b_{j''s''} - b_{j''s'} b_{j's''}) A_{ij} \,,$$

e poichè la sostituzione (5) è ortogonale e destrorsa, risulta

$$B_{rs} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} b_{ir} b_{js} A_{ij} \,. \tag{6}$$

Moltiplicando ambo i membri di questa relazione per $b_{ur} b_{vs}$ e sommando rispetto ad r e ad s, si ottiene

$$\sum_{r=1}^{3} \sum_{s=1}^{3} b_{ur} b_{vs} B_{rs} = \sum_{r=1}^{3} \sum_{s=1}^{3} b_{ur} b_{vs} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} b_{ir} b_{js} A_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} A_{ij} \Big(\sum_{r=1}^{3} b_{ur} b_{ir} \Big) \Big(\sum_{s=1}^{3} b_{vs} b_{js} \Big) = A_{uv} \,.$$

Pertanto

$$A_{uv} = \sum_{r=1}^{3} \sum_{s=1}^{3} b_{ur} b_{vs} B_{rs} \,. \tag{7}$$

Le relazioni (6) e (7) assicurano che se la funzione F soddisfa all'ipotesi 5ª) anche la funzione G soddisfa alla stessa ipotesi e viceversa. Se ora diciamo ψ la funzione φ relativa alla funzione G, si ha

$$\psi = \frac{B_{rs}}{v_r v_s} = \frac{1}{v_r v_s} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} b_{ir} b_{js} A_{ij} = \frac{1}{v_r v_s} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} b_{ir} b_{js} \varphi u_i u_j =$$

$$= \frac{1}{v_r v_s} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} b_{ir} b_{js} \varphi \sum_{h=1}^{3} b_{ih} v_h \sum_{k=1}^{3} b_{ik} v_k =$$

$$= \frac{1}{v_r v_s} \sum_{h=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \varphi v_h v_k \Big(\sum_{i=1}^{3} b_{ir} b_{ih} \Big) \Big(\sum_{j=1}^{3} b_{js} b_{jk} \Big) = \varphi \,.$$

Appare quindi che F_i, F_{ij}, A_{ij} sono controvarianti e che φ è invariante (assoluto) per sostituzioni ortogonali destrorse.

Notiamo ancora che, se eseguiamo sulla forma quadratica

$$V(F, x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} x_i x_j F_{ij}, \qquad (i = 1, 2, 3),$$

la sostituzione ortogonale destrorsa

$$x_i = \sum_{r=1}^{3} b_{ir} y_r, \qquad (i = 1, 2, 3),$$

si ottiene

$$V(F, x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} F_{ij} \Big(\sum_{r=1}^{3} b_{ir} y_r \Big) \Big(\sum_{s=1}^{3} b_{js} y_s \Big) =$$

$$= \sum_{r=1}^{3} \sum_{s=1}^{3} y_r y_s \Big(\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} b_{ir} b_{js} F_{ij} \Big) = \sum_{r=1}^{3} \sum_{s=1}^{3} y_r y_s G_{rs} = V(G, y_1, y_2, y_3),$$

cioè anche la forma quadratica $V(F, x_1, x_2, x_3)$ è un invariante (assoluto) per sostituzioni ortogonali destrorse.

5. – Dimostriamo il seguente

Lemma: *Se* a, b, c *sono tre numeri tali che* $\delta = ac - b^2 > 0$, *allora* $(a + c)^2 \geqslant 4\delta$ *e inoltre per ogni* (x, y) *si ha*

$$\mu_1(x^2 + y^2) \leqslant ax^2 + 2bxy + cy^2 \leqslant \mu_2(x^2 + y^2),$$

essendo $\mu_1 \leqslant \mu_2$: $\mu_1, \mu_2 = (1/2)\big[a + c \pm \sqrt{(a + c^2) - 4\delta}\big]$.

Dimostrazione. Poichè $\delta > 0$, si ha $ac > 0$ onde a, c sono dello stesso segno e inoltre

$$(a + c)^2 = 4ac + (a - c)^2 \geqslant 4ac \geqslant 4(ac - b^2) = 4\delta,$$

e risulta $(a + c)^2 = 4\delta$ se e solo se $a = c$, $b = 0$.

Posto $u^2 = x^2 + y^2$, $u \geqslant 0$, $x = u \cos \omega$, $y = u \operatorname{sen} \omega$, riesce $ax^2 + 2bxy + cy^2 = u^2[b \operatorname{sen} 2\omega + (a/2)(1 + \cos 2\omega) + (c/2)(1 - \cos 2\omega)] = u^2 g(\omega)$, ove $g(\omega)$ è funzione di ω derivabile, periodica di periodo 2π e $g'(\omega) = (c - a) \operatorname{sen} 2\omega + 2b \cos 2\omega$. Se $a = c$, $b = 0$, allora $g'(\omega) = 0$, $g(\omega) = a = c =$ costante.

In caso contrario risulta $(a + c)^2 - 4\delta > 0$ e i massimi e i minimi di $g(\omega)$ si hanno in corrispondenza di quei valori di ω per cui

$$\operatorname{sen} 2\omega = \frac{2b}{\pm\sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}} = \frac{2b}{\pm\sqrt{(a+c)^2 - 4\delta}},$$

$$\cos 2\omega = \frac{a-c}{\pm\sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}} = \frac{a-c}{\pm\sqrt{(a+c)^2 - 4\delta}},$$

e quindi i massimi e i minimi di $g(\omega)$ sono

$$\frac{2b^2}{\pm\sqrt{(a+c)^2 - 4\delta}} + \frac{a}{2}\left[1 + \frac{a-c}{\pm\sqrt{(a+c)^2 - 4\delta}}\right] + \frac{c}{2}\left[1 - \frac{a-c}{\pm\sqrt{(a+c)^2 - 4\delta}}\right] =$$

$$= \frac{a+c}{2} + \frac{2b^2}{\pm\sqrt{(a+c)^2 - 4\delta}} + \frac{(a-c)^2}{\pm\sqrt{(a+c)^2 - 4\delta}} = \frac{1}{2}\left[a + c \pm \sqrt{(a+c)^2 - 4\delta}\right].$$

Segue

$$u^2 \cdot (1/2)\left[a + c - \sqrt{(a+c)^2 - 4\delta}\right] \leqslant ax^2 + 2bxy + cy^2 =$$

$$= u^2 g(\omega) \leqslant u^2 \cdot (1/2)\left[a + c + \sqrt{(a+c)^2 - 4\delta}\right],$$

e infine

$$\mu_1(x^2 + y^2) \leqslant ax^2 + 2bxy + cy^2 \leqslant \mu_2(x^2 + y^2) .$$

Il Lemma è dimostrato.

6. - Sussiste il seguente altro

Lemma: *Se (x, y, z) è un punto di A, tale che per ogni vettore (u_1, u_2, u_3) non nullo risulti $\varphi > 0$, posto*

$$W(x, y, z, u_1, u_2, u_3, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} F_{ij}(x, y, z, u_1, u_2, u_3)\bar{u}_i\bar{u}_j ,$$

esistono due numeri μ_1, μ_2, con $0 < \mu_1 \leqslant \mu_2$, oppure $\mu_1 \leqslant \mu_2 < 0$, tali che, per ogni coppia di vettori (u_1, u_2, u_3), $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ non nulli e normali (tali cioè che $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$, $\bar{u}_1^2 + \bar{u}_2^2 + \bar{u}_3^2 = 1$), sia

$$\mu_1 \operatorname{sen}^2 \theta \leqslant W \leqslant \mu_2 \operatorname{sen}^2 \theta ,$$

ove θ è l'angolo dato dalla relazione $\cos\theta = u_1\bar{u}_1 + u_2\bar{u}_2 + u_3\bar{u}_3$.

Dimostrazione. Fissato un vettore normale (u_1, u_2, u_3) sia τ la sostituzione ortogonale che trasforma il vettore (u_1, u_2, u_3) nel vettore $(0, 0, 1)$. La stessa sostituzione τ trasforma il vettore normale $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ in un vettore normale $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ e, poichè l'angolo θ tra vettori è invariante, si ha

$$\cos\theta = u_1\bar{u}_1 + u_2\bar{u}_2 + u_3\bar{u}_3 = 0\cdot\bar{v}_1 + 0\cdot\bar{v}_2 + 1\cdot\bar{v}_3 = \bar{v}_3\,.$$

La sostituzione τ trasforma la funzione F in una funzione G, della quale diciamo $\psi = \varphi$ la corrispondente funzione definita nel n. 4. Poichè la F si trasforma nella G e quindi le F_{ij} nelle G_{ij}, $(i, j = 1, 2, 3)$, le (3), nel caso attuale, divengono

$$G_{13} = 0\,, \qquad G_{23} = 0\,, \qquad G_{33} = 0\,,$$

e pertanto anche $G_{31} = G_{32} = 0$. Segue che soltanto G_{11}, $G_{12} = G_{21}$, G_{22} possono essere diversi da zero. Dalle (4) a sua volta si trae

$$\psi = \varphi = A_{33} = G_{11}G_{22} - G_{12}^2 > 0$$

e, per la forma quadratica W, si ha

$$W = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} G_{ij}\bar{v}_i\bar{v}_j = G_{11}\bar{v}_1^2 + 2G_{12}\bar{v}_1\bar{v}_2 + G_{22}\bar{v}_2^2\,.$$

Poichè $\delta = G_{11}G_{22} - G_{12}^2 > 0$ risulta: a) $G_{11} > 0$, $G_{22} > 0$, oppure b) $G_{11} < 0$, $G_{22} < 0$. Posto

$$\mu_1, \mu_2 = (1/2)\left[G_{11} + G_{22} \pm \sqrt{(G_{11} + G_{22})^2 - 4\delta}\right],$$
$$(0 < \mu_1 \leqslant \mu_2 \ \text{ oppure } \ \mu \leqslant \mu_2 < 0)\,,$$

risulta, in virtù del Lemma dimostrato nel n. 5,

$$\mu_1(\bar{v}_1^2 + \bar{v}_2^2) \leqslant G_{11}\bar{v}_1^2 + 2G_{12}\bar{v}_1\bar{v}_2 + G_{22}\bar{v}_2^2 \leqslant \mu_2(\bar{v}_1^2 + \bar{v}_2^2)$$

e infine, per essere $\bar{v}_1^2 + \bar{v}_2^2 = 1 - \bar{v}_3^2 = 1 - \cos^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta$,

$$\mu_1 \operatorname{sen}^2\theta \leqslant W \leqslant \mu_2 \operatorname{sen}^2\theta\,,$$

ove $0 < \mu_1 \leqslant \mu_2$ nel caso a), $\mu_1 \leqslant \mu_2 < 0$ nel caso b).

Il Lemma è dimostrato.

Un corollario del precedente Lemma è il seguente:

Sotto le stesse ipotesi, la forma W è semidefinita positiva o semidefinita negativa.

7. – Siamo ora in grado di dimostrare il seguente

Teorema: *Se l'insieme A è chiuso e limitato e la funzione $F(x, y, z, u_1, u_2, u_3)$ soddisfa alle ipotesi* 1ª), 2ª), 3ª), 4ª), *se $\mathcal{J}_s$ è definito positivo e regolare positivo, se $\varphi(x, y, z, u_1, u_2, u_3) > 0$ per ogni punto (x, y, z) di A e per ogni vettore (u_1, u_2, u_3) non nullo, allora esistono due costanti positive α e β tali che:*

a) $\alpha < F(x, y, z, u_1, u_2, u_3) < \beta$ *per ogni punto (x, y, z) di A e per ogni vettore normale (u_1, u_2, u_3);*

b) $\alpha\,\mathrm{sen}^2(\theta/2) < \mathcal{E}(x, y, z, u_1, u_2, u_3, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) < \beta\,\mathrm{sen}^2(\theta/2)$ *per ogni punto (x, y, z) di A e per ogni coppia di vettori normali (u_1, u_2, u_3), $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ distinti, essendo θ l'angolo dato da $\cos\theta = u_1\bar{u}_1 + u_2\bar{u}_2 + u_3\bar{u}_3$.*

[L'ipotesi che $\mathcal{J}_s$ sia definito positivo si può sopprimere purchè si modifichi in corrispondenza la conclusione a), senza modificare la conclusione b). Ad esempio, se $\mathcal{J}_s$ è semidefinito positivo la a) va sostituita con $0 \leqslant F(x, y, z, u_1, u_2, u_3) < \beta$, se $\mathcal{J}_s$ non è definito la a) va sostituita con $-\beta < F(x, y, z, u_1, u_2, u_3) < \beta$.]

Dimostrazione. La funzione F è continua nell'insieme I, chiuso e limitato, di tutti i punti (x, y, z, u_1, u_2, u_3) con $(x, y, z) \in A$, $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$, quindi la F è limitata e dotata di minimo e massimo assoluti in I. Inoltre, poichè $\mathcal{J}_s$ è definito positivo, risulta $F > 0$ in I e pertanto esistono due costanti positive α e β tali che $0 < \alpha < F < \beta < +\infty$. Sia J l'insieme di tutti i punti $(x, y, z, u_1, u_2, u_3, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ con $(x, y, z) \in A$, $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$, $\bar{u}_1^2 + \bar{u}_2^2 + \bar{u}_3^2 = 1$, $\cos\theta = u_1\bar{u}_1 + u_2\bar{u}_2 + u_3\bar{u}_3$, $\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi$. La funzione $\mathcal{E}$ è continua e positiva in J (la continuità della $\mathcal{E}$ segue dalla sua definizione e la positività dall'essere $\mathcal{J}_s$ regolare positivo): essa è pertanto limitata e dotata di minimo e massimo assoluti in J, onde

$$0 < \alpha < \mathcal{E} < \beta < +\infty$$

per opportune costanti α e β. Scegliendo convenientemente α e β abbiamo anche

$$\alpha\,\mathrm{sen}^2(\theta/2) < \mathcal{E} < \beta \leqslant 2\beta\,\mathrm{sen}^2(\theta/2),$$

per ogni $\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

Sia J' l'insieme, definito come J, con $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. La funzione $\mathcal{E}$ è dotata di massimo assoluto in J' e quindi $\mathcal{E} < \beta < +\infty$. Dal n. 2, a), abbiamo

$$\mathcal{E}(x, y, z, u_1, u_2, u_3, \overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \widetilde{F}_{ij}(\overline{u}_i - u_i)(\overline{u}_j - u_j),$$

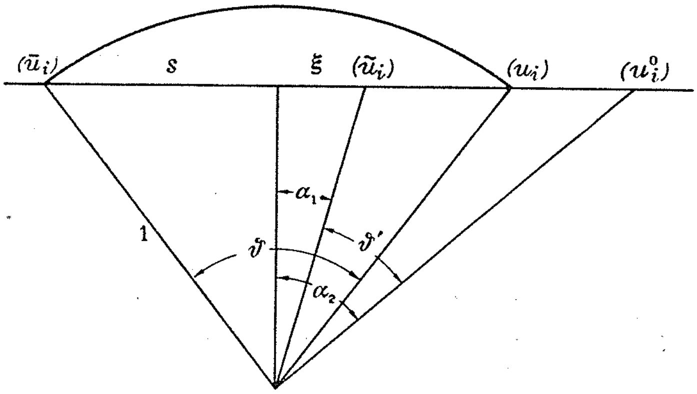
ove $\widetilde{F}_{ij} = F_{ij}(x, y, z, \widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \widetilde{u}_3)$, essendo $(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \widetilde{u}_3)$ un conveniente punto che è interno al segmento (finito) s congiungente i punti (u_1, u_2, u_3), $(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3)$. Questi due ultimi punti appartengono alla sfera unità, quindi il punto $(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \widetilde{u}_3)$ è interno a tale sfera, ed essendo $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, il segmento s non passa per il punto $(0, 0, 0)$.

Posto $\Delta_i = \overline{u}_i - u_i$, $(i = 1, 2, 3)$, diciamo (u_1^0, u_2^0, u_3^0) il punto definito ponendo $u_i^0 = \widetilde{u}_i - \Delta_i$, $(i = 1, 2, 3)$. Segue

$$\Delta_i = \overline{u}_i - u_i = \widetilde{u}_i - u_i^0, \qquad (i = 1, 2, 3),$$

e perciò

$$\mathcal{E}(x, y, z, u_1, u_2, u_3, \overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \widetilde{F}_{ij}(\widetilde{u}_i - u_i^0)(\widetilde{u}_j - u_j^0). \tag{8}$$



Il punto $(u_i^0) \equiv (u_1^0, u_2^0, u_3^0)$ è sulla retta congiungente i punti $(u_i) \equiv (u_1, u_2, u_3)$, $(\overline{u}_i) \equiv (\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3)$, ed è esterno al segmento (finito) s: esso è pertanto esterno alla sfera unità.

Indicati con θ e θ' gli angoli compresi rispettivamente tra i vettori (u_1, u_2, u_3), $(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3)$ e i vettori $(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \widetilde{u}_3)$, (u_1^0, u_2^0, u_3^0) si ha

$$\cos\theta = u_1\overline{u}_1 + u_2\overline{u}_2 + u_3\overline{u}_3, \qquad \cos\theta' = (\widetilde{u}_1 u_1^0 + \widetilde{u}_2 u_2^0 + \widetilde{u}_3 u_3^0)/(\widetilde{m} m^0),$$

essendo

$$\widetilde{m} = \sqrt{\widetilde{u}_1^2 + \widetilde{u}_2^2 + \widetilde{u}_3^2} < 1\,, \qquad m^0 = \sqrt{(u_1^0)^2 + (u_2^0)^2 + (u_3^0)^2} > 1$$

i moduli dei vettori $(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \widetilde{u}_3)$, (u_1^0, u_2^0, u_3^0).

Indichiamo con ξ la lunghezza del segmento congiungente il punto medio del segmento individuato dai due punti (u_i), $(\overline{u}_i)$ con il punto $(\widetilde{u}_i) \equiv (\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \widetilde{u}_3)$, misurata nel senso che va dal punto $(\overline{u}_i)$ al punto (u_i). Poniamo $\alpha_2 - \alpha_1 = \theta'$ (per la definizione degli angoli α_1, α_2 vedere la figura) ed osserviamo che $0 < \theta' < \pi$. Essendo

$$\cos(\theta/2)\,\mathrm{tg}\,\alpha_2 = \xi + 2\,\mathrm{sen}\,(\theta/2)\,, \qquad \cos(\theta/2)\,\mathrm{tg}\,\alpha_1 = \xi\,,$$

$$[-\mathrm{sen}\,(\theta/2) < \xi < \mathrm{sen}\,(\theta/2)]\,,$$

risulta

$$\mathrm{tg}\,\theta' = \mathrm{tg}\,(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha_2 - \mathrm{tg}\,\alpha_1}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha_1\,\mathrm{tg}\,\alpha_2} = \frac{2\,\mathrm{sen}\,(\theta/2)\cos(\theta/2)}{\cos^2(\theta/2) + \xi[\xi + 2\,\mathrm{sen}\,(\theta/2)]}\,,$$

ove $-\mathrm{sen}\,(\theta/2) < \xi < \mathrm{sen}\,(\theta/2)$.

Il massimo dell'ultima espressione, per ξ variabile nell'intervallo chiuso $(-\mathrm{sen}\,(\theta/2), \mathrm{sen}\,(\theta/2)$, si ha per $\xi = -\mathrm{sen}\,(\theta/2)$ e pertanto

$$\mathrm{tg}\,\theta' < \frac{2\,\mathrm{sen}\,(\theta/2)\cos(\theta/2)}{\cos^2(\theta/2) - \mathrm{sen}^2(\theta/2)} = \mathrm{tg}\,\theta\,,$$

onde $\theta' < \theta$.

Si è già notato che i vettori $(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \widetilde{u}_3)$, (u_1^0, u_2^0, u_3^0) non sono normali perchè per i loro moduli si ha $\widetilde{m} < 1$, $m^0 > 1$. Possiamo qui aggiungere, il che è evidente geometricamente, che $\widetilde{m} \geqslant \cos(\theta/2)$ e poichè $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ si ha $1 > \widetilde{m} \geqslant 1/\sqrt{2}$. Si ha poi manifestamente

$$1 < (m^0)^2 < \cos^2(\theta/2) + [\max\{\xi + 2\,\mathrm{sen}\,(\theta/2)\}]^2$$

ossia

$$1 < (m^0)^2 < \cos^2(\theta/2) + 9\,\mathrm{sen}^2(\theta/2)\,,$$

e infine

$$1 < (m^0)^2 < 5\,.$$

Diciamo $(\widetilde{u}_{in}) \equiv (\widetilde{u}_{1n}, \widetilde{u}_{2n}, \widetilde{u}_{3n})$ il vettore che si ottiene normalizzando il vettore $(\widetilde{u}_i) \equiv (\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \widetilde{u}_3)$, ossia $(\widetilde{u}_{in}) \equiv (1/\widetilde{m})(\widetilde{u}_i)$; analogamente sia $(u^0_{in}) \equiv \equiv (u^0_{1n}, u^0_{2n}, u^0_{3n})$ il vettore che si ottiene normalizzando il vettore $(u^0_i) \equiv \equiv (u^0_1, u^0_2, u^0_3)$, ossia $(u^0_{in}) \equiv (1/m^0)(u^0_i)$.

Nel punto $(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \widetilde{u}_3)$ valgono le (1) e quindi

$$\sum_{j=1}^{3} \widetilde{u}_j \widetilde{F}_{ij} = 0 , \qquad (i = 1, 2, 3),$$

e di qui moltiplicando i due membri successivamente per u^0_i e $\widetilde{u}_i$, si trae

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} u^0_i \widetilde{u}_j \widetilde{F}_{ij} = 0 , \qquad \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \widetilde{u}_i \widetilde{u}_j \widetilde{F}_{ij} = 0 . \tag{9}$$

Dalla (8) sviluppando e tenendo conto delle (9) si ricava

$$\mathcal{E}(x, y, z, u_1, u_2, u_3, \widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \widetilde{u}_3) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} (\widetilde{u}_i \widetilde{u}_j - \widetilde{u}_i u^0_j - u^0_i \widetilde{u}_j + u^0_i u^0_j) \widetilde{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} u^0_i u^0_j \widetilde{F}_{ij} .$$

Ricordando che le funzioni F_{ij} sono positivamente omogenee di grado -1 rispetto alle variabili u_1, u_2, u_3 si può scrivere

$$F_{ij}(x, y, z, \widetilde{u}_{1n}, \widetilde{u}_{2n}, \widetilde{u}_{3n}) = F_{ij}(x, y, z, \widetilde{u}_1/\widetilde{m}, \widetilde{u}_2/\widetilde{m}, \widetilde{u}_3/\widetilde{m}) = \widetilde{m}\ \widetilde{F}_{ij} ,$$

e pertanto

$$\mathcal{E}(x, y, z, u_1, u_2, u_3, \widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \widetilde{u}_3) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \frac{(m^0)^2}{\widetilde{m}} u^0_{in}\, u^0_{jn}\, F_{ij}(x, y, z, \widetilde{u}_{1n}, \widetilde{u}_{2n}, \widetilde{u}_{3n}) .$$

In virtù del Lemma dimostrato nel n. 6, esistono due costanti μ_1, μ_2 tali che

$$\frac{1}{2} \frac{(m^0)^2}{\widetilde{m}} \mu_1 \operatorname{sen}^2 \theta \leqslant \mathcal{E} \leqslant \frac{1}{2} \frac{(m^0)^2}{\widetilde{m}} \mu_2 \operatorname{sen}^2 \theta ,$$

e si ha $0 < \mu_1 \leqslant \mu_2$ oppure $\mu_1 \leqslant \mu_2 < 0$. Essendo $\mathcal{J}_s$ definito positivo, il secondo caso dev'essere escluso.

Nel n. 6 abbiamo dato di μ_1, μ_2 due espressioni in funzione di φ e delle F_{ij} (a meno di una sostituzione ortogonale); μ_1 e μ_2 sono pertanto funzioni di x, y, z, u_1, u_2, u_3, continue e positive nell'insieme Ω di tutti i punti

(x, y, z, u_1, u_2, u_3) con $(x, y, z) \in A$, $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$. Denotati con m, M il minimo e il massimo rispettivamente di μ_1 e μ_2 in Ω, si ha

$$\mathcal{E} \geqslant \frac{1}{2} \frac{(m^0)^2}{\tilde{m}} m \operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1}{2} (m^0)^2 \frac{1}{\tilde{m}} m \left(\frac{\operatorname{sen} \theta}{2}\right)^2 \left(\frac{\theta/2}{\operatorname{sen}(\theta/2)}\right)^2 \cdot 4 \operatorname{sen}^2 (\theta/2),$$

e, poichè $(m^0)^2 > 1$, $\tilde{m} < 1$, $\dfrac{\theta}{\operatorname{sen} \theta} < \dfrac{2}{\pi}$, $\dfrac{\operatorname{sen}(\theta/2)}{\theta/2} > 1$, si può scrivere

$$\mathcal{E} > (8/\pi^2)\, m \operatorname{sen}^2 (\theta/2).$$

D'altra parte

$$\mathcal{E} \leqslant \frac{1}{2} \frac{(m^0)^2}{\tilde{m}} M \operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1}{2} (m^0)^2 \frac{1}{\tilde{m}} M \left(\frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta}\right)^2 \left(\frac{\theta/2}{\operatorname{sen}(\theta/2)}\right)^2 \cdot 4 \operatorname{sen}^2 (\theta/2)$$

e, per essere $(m^0)^2 < 5$, $\tilde{m} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} < 1$, $\dfrac{\theta/2}{\operatorname{sen}(\theta/2)} < 3$, risulta

$$\mathcal{E} < 30 \sqrt{2}\, M \operatorname{sen}^2 (\theta/2).$$

Concludendo è

$$(8/\pi^2) m \operatorname{sen}^2 (\theta/2) < \mathcal{E} < 30 \sqrt{2}\, M \operatorname{sen}^2 (\theta/2).$$

Il Teorema è così dimostrato.

8. – Dimostriamo ora il seguente

Teorema: *Se l'insieme A è limitato e chiuso e la funzione $F(x, y, z, u_1, u_2, u_3)$ soddisfa alle ipotesi* 1ª), 2ª), 3ª), 4ª), *se $\mathcal{J}_s$ è definito positivo e regolare positivo, ed è $\varphi(x, y, z, u_1, u_2, u_3) > 0$ per ogni punto (x, y, z) di A e per ogni vettore (u_1, u_2, u_3) non nullo, se S_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ è una successione di superficie di area finita secondo Lebesgue, convergente verso una superficie S pure di area finita secondo Lebesgue, se infine $\lim_{n\to\infty} \mathcal{J}_{S_n} = \mathcal{J}_S$, allora risulta*

$$\lim_{n\to\infty} L(S_n) = L(S).$$

Dimostrazione. Notiamo anzitutto che $L(S)$ è l'integrale che si ottiene assumendo come funzione F la funzione $G = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$. La funzione G

soddisfa manifestamente alle ipotesi 1ª), 2ª), 3ª), 4ª), e, se ψ è la relativa funzione φ, dopo semplici calcoli si trova

$$\psi = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^{-2} > 0 .$$

In virtù del Teorema del n. 7 esistono certe costanti $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$, $0 < \alpha < \beta < +\infty$, $0 < \alpha' < \beta' < +\infty$, tali che

$$\alpha < F < \beta , \qquad \alpha \operatorname{sen}^2(\theta/2) < \mathcal{E}_F < \beta \operatorname{sen}^2(\theta/2) ,$$

$$\alpha' < G < \beta' , \qquad \alpha' \operatorname{sen}^2(\theta/2) < \mathcal{E}_G < \beta' \operatorname{sen}^2(\theta/2) .$$

Indichiamo con h una costante positiva tale che $\beta' h < \alpha$, onde se $H = F - hG$ è una nuova funzione analoga alle funzioni F e G e $\mathcal{J}'_S$ è il relativo integrale, la H soddisfa alle ipotesi 1ª), 2ª), 3ª), 4ª) e inoltre si ha

$$H > \alpha - h\beta' > 0 , \qquad \mathcal{E}_H = \mathcal{E}_F - h\,\mathcal{E}_G > (\alpha - h\beta') \operatorname{sen}^2(\theta/2) ,$$

onde $\mathcal{J}'_S$ è al pari di $\mathcal{J}_S$ ed $L(S)$, definito positivo e regolare positivo. Pertanto $\mathcal{J}'_S$, $\mathcal{J}_S$, $L(S)$ sono tutti semicontinui inferiormente e si ha

$$\mathcal{J}'_S \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \mathcal{J}_{S_n}, \qquad L(S) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} L(S_n) , \tag{10}$$

ossia

$$\mathcal{J}_S - hL(S) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \left[\mathcal{J}_{S_n} - hL(S_n)\right] , \qquad \mathcal{J}_S = \lim_{n\to\infty} \mathcal{J}_{S_n} .$$

Segue

$$\mathcal{J}_S - hL(S) \leqslant \mathcal{J}_S - h \varlimsup_{n\to\infty} L(S_n) ,$$

e, tenendo conto della seconda delle (10),

$$\varlimsup_{n\to\infty} L(S_n) \leqslant L(S) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} L(S_n) ,$$

infine

$$L(S) = \lim_{n\to\infty} L(S_n) .$$

Il Teorema è dimostrato.

In modo analogo si dimostra il

Teorema: *Se l'insieme A è limitato e chiuso ed F e G sono due funzioni soddisfacenti alle ipotesi* 1a), 2a), 3a), 4a), *se gli integrali $\mathcal{I}_S$, $\mathcal{H}_S$ ad esse corrispondenti sono definiti positivi e regolari positivi, se le funzioni φ, ψ relative alle F e G sono positive per ogni punto (x, y, z) di A e per ogni vettore (u_1, u_2, u_3) non nullo, se S_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ è una successione di superficie di area finita secondo Lebesgue, convergente verso una superficie S pure di area finita secondo Lebesgue, se infine $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{I}_{S_n} = \mathcal{I}_S$, allora risulta*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{H}_{S_n} = \mathcal{H}_S .$$