Bruno Pini (*)

Un problema di valori al contorno, generalizzato, per l'equazione a derivate parziali lineare parabolica del secondo ordine. (**)

In un precedente lavoro ([1]) abbiamo trattato coi metodi di G. Cimmino ([2]) un problema generalizzato e un problema ordinario di valori al contorno per l'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} + a(x, y)u = f(x, y) .$$

Il presente lavoro costituisce una estensione, del primo dei due citati problemi, all'equazione parabolica lineare del secondo ordine

$$\sum_{1}^{n}{}_{ij}\, a_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{1}^{n}{}_{i}\, a_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial y} + a(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) ,$$

$$[a_{ij} = a_{ji}, \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n); \qquad \sum_{1}^{n}{}_{ij}\, a_{ij}\lambda_i\lambda_j \quad \text{forma quadratica definita}].$$

(*) Indirizzo: Via Giottoli 6, Forlì (Italia).

(**) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna e ricevuto il 21-VI-1951.

([1]) B. Pini, *Sulle equazioni a derivate parziali, lineari del secondo ordine in due variabili, di tipo parabolico*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **32**, 179-204 (1951).

([2]) G. Cimmino, *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico sopra una superficie chiusa*, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) **7**, 73-96, (1938); *Nuovo tipo di condizioni al contorno e nuovo metodo di trattazione per il problema generalizzato di Dirichlet*, Rend. Circolo Mat. Palermo **61**, 177-221 (1937); *Sul problema generalizzato di Dirichlet per l'equazione di Poisson*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **11**, 28-96 (1940); *Equazione di Poisson e problema generalizzato di Dirichlet*, Rend. Acc. Italia (7) **1**, 322-329 (1940).

Per comodità noi supponiamo $n = 2$ e $a_i = 0$; ciò però non costituisce una restrizione perchè l'estensione, da 2 ad n, di quanto segue, si realizza con soli adattamenti formali e, d'altra parte, con un conveniente cambiamento delle variabili x_i, si può sempre supporre verificata la seconda ipotesi.

Mostreremo l'esistenza e l'unicità della soluzione per il seguente problema [3]:

Assegnato un dominio normale all'asse y, limitato dai piani caratteristici $y = y_1$ e $y = y_2$, $(y_1 < y_2)$, e da una superficie $S[x_1 = x_1(\alpha, y)$, $x_2 = x_2(\alpha, y)$, $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$, $\alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2]$, che preciseremo più avanti, determinare una funzione $u(x_1, x_2, y)$ assolutamente continua e dotata delle derivate $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $(i = 1, 2)$, assolutamente continue in x_1, x_2, verificante quasi-dappertutto l'equazione

$$(1) \qquad \mathcal{L}[u] = \sum_{1}^{2}{}_{ij}\, a_{ij}(x_1, x_2, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial y} + a(x_1, x_2, y)u = f(x_1, x_2, y),$$

che sia nulla per $y = y_1$ e converga in media di un certo ordine su S a una assegnata funzione sommabile con una certa potenza.

La trattazione non fa ricorso alla soluzione fondamentale dell'equazione (1) [4]; ci si appoggia esclusivamente sulla conoscenza della soluzione fondamentale di una certa equazione associata alla (1) e di cui i coefficienti sono da considerare costanti; a questa viene poi sommato, per soddisfare certe necessità, un termine integrale in modo che la somma così ottenuta viene a costituire una funzione la quale presenta la stessa singolarità della soluzione fondamentale ma è tale che la funzione, da essa ottenuta mediante l'applicazione dell'operatore $\mathcal{L}$, è priva di singolarità. Basandosi su questo fatto si può trattare anche il problema ordinario per l'equazione (1); ciò è brevemente indicato alla fine del lavoro.

---

(3) Altri problemi generalizzati per l'equazione parabolica lineare si trovano in: L. AMERIO, *Sull'equazione di propagazione del calore*, Univ. Roma, Ist. Naz. Alta Mat. Rend. Mat. e Appl. (5) **5**, 84-120 (1946); F. G. DRESSEL, *A boundary value problem for the heat equation*, Amer. J. Math. **55**, 641-653 (1933); F. G. DRESSEL and E. R. ELLIOT, *A class of solutions for the heat equation and associated boundary value problems*, Amer. J. Math. **65**, 408-422 (1943); P. B. THUM, *Lösung von Randwertaufgaben der Wärmelehre und Potentialtheorie durch Reihenentwicklungen und Integraldarstellungen*, J. Reine Angew. Math. **168**, 65-90 (1932).

(4) F. G. DRESSEL, *The fundamental solution of the parabolic equation*, Duke Math. J. **7**, 186-203 (1940) e **13**, 61-70 (1946).

1. – Una proprietà di media.

Consideriamo l'equazione (1) supponendo sempre che in un certo campo C, cui limitiamo le nostre considerazioni, sia $a_{ij} = a_{ji}$, $(i, j = 1, 2)$, e $\sum_{ij}^{2}{}_{1} a_{ij}\lambda_i\lambda_j$ sia una forma quadratica definita positiva.

Ciascuna delle proposizioni che verranno successivamente stabilite sussiste sotto certe ipotesi minime per i coefficienti di $\mathcal{L}$; ipotesi variabili dall'una all'altra. Noi, per semplicità, supporremo sempre, salvo a specificare ulteriori ipotesi, che a e $\dfrac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_i\, \partial x_j}$ *siano continue in* C.

Chiameremo *soluzione generalizzata* della (1) una funzione $u(x_1, x_2, y)$, assolutamente continua in C con le $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $(i = 1, 2)$, assolutamente continue in x_1, x_2 e dotate di derivate $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ sommabili in C, verificante la (1) quasi-dappertutto in C.

Di regola indicheremo con $\mathcal{M}[u]$ l'aggiunta di $\mathcal{L}[u]$; con P il punto (x_1, x_2, y) e con Q il punto (ξ_1, ξ_2, η); con $\mathrm{d}P$ $(\mathrm{d}Q)$ l'elemento di volume $\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}y$ $(\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2\,\mathrm{d}\eta)$; con $U(P, Q)$ la funzione

$$
(2) \qquad \begin{cases} (y-\eta)^{-1} \exp \dfrac{-\sum_{ij}{}_{1}^{2} A_{ij}(P)(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j)}{4(y-\eta)} & \text{per } \; y > \eta, \\[2ex] 0 & \text{per } \; y \leqslant \eta, \end{cases}
$$

ove $A(P) = \det. \| a_{ij}(P) \|$, $\quad \| A_{ij}(P) \| = \dfrac{1}{A(P)}\,\text{agg.}\, \| a_{ij}(P) \|$.

La $U(P, Q)$ riguardata nelle variabili ξ_1, ξ_2, η è soluzione fondamentale dell'equazione

$$
\sum_{ij}{}_{1}^{2} a_{ij}(P) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i\, \partial \xi_j} + \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \, .
$$

Fissato il punto P, poniamo

$$
(3) \qquad (y-\eta) \exp \frac{\sum_{ij}{}_{1}^{2} A_{ij}(P)(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j)}{4(y-\eta)} = \varrho^2
$$

e consideriamo la superficie regolare chiusa

$$(4)\qquad \mathcal{S}_{P,\varrho} \equiv \begin{cases} x_1 = \xi_1 + 2\varrho \operatorname{sen}\theta\sqrt{\lg(1+\cot^2\theta)}\,(m\cos\omega\cos\varphi + n\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\varphi)\,, \\ x_2 = \xi_2 + 2\varrho\operatorname{sen}\theta\sqrt{\lg(1+\cot^2\theta)}\,(m\operatorname{sen}\omega\cos\varphi - n\cos\omega\operatorname{sen}\varphi), \\ y \;= \eta + \varrho^2\operatorname{sen}^2\theta\,, \end{cases}$$

dove è $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, e m, n, ω sono certe funzioni di P legate dalle seguenti relazioni

$$(5)\qquad \frac{\cos^2\omega}{m^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\omega}{n^2} = A_{11}(P)\,,\qquad \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)\operatorname{sen}\omega\cos\omega = A_{12}(P)\,,$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2\omega}{m^2} + \frac{\cos^2\omega}{n^2} = A_{22}(P)\,.$$

Indichiamo poi con $\mathcal{D}_{P,\varrho}$ il dominio regolare limitato che ha $\mathcal{S}_{P,\varrho}$ per completa frontiera.

Ciò posto cominciamo a provare la seguente

1) Proprietà di media. *Se nel campo C le a_{ij} soddisfano una condizione di Hölder ed f è sommabile in C con una potenza di esponente > 2, allora una soluzione generalizzata dell'equazione $\mathcal{L}[u] = f$, verificherà la formula di media*

$$(6)\qquad u(P) = \frac{1}{4\pi\sqrt{A(P)}}\left\{\iiint\limits_{\mathcal{D}_{P,c}}\left(u(Q)\,\mathcal{M}\left[U - \frac{1}{c^2}\right] - f(Q)\left(U - \frac{1}{c^2}\right)\right)\mathrm{d}Q \,-\right.$$

$$\left. - \iint\limits_{\mathcal{S}_{P,c}} u(Q)\left(\sum_1^2{}_i\, a_{1i}(Q)\,\frac{\partial U}{\partial\xi_i}\,\mathrm{d}\xi_2\,\mathrm{d}\eta + \sum_1^2{}_i\, a_{2i}(Q)\,\frac{\partial U}{\partial\xi_2}\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\xi_1\right)\right\},$$

in ogni punto P di C e per ogni valore di c (> 0) sufficientemente piccolo.

Fissato un numero positivo c e detto δ un numero positivo $< c$, applicando la formola di GREEN al dominio $\mathcal{D}_{P,c} - \mathcal{D}_{P,\delta}$, si ha

$$(7)\qquad \iiint\limits_{\mathcal{D}_{P,c}-\mathcal{D}_{P,\delta}}\left\{v(Q)\mathcal{L}[u(Q)] - u(Q)\,\mathcal{M}[v(Q)]\right\}\mathrm{d}Q =$$

$$= \left(\iint\limits_{\mathcal{S}_{P,c}} - \iint\limits_{\mathcal{S}_{P,\delta}}\right)\left[H_1(Q)\,\mathrm{d}\xi_2\,\mathrm{d}\eta + H_2(Q)\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\xi_1 - u(Q)v(Q)\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2\right],$$

ove

$$H_i(Q) = \sum_{1}^{2}{}_k a_{ik}(Q)\left[v(Q)\frac{\partial u(Q)}{\partial \xi_k} - u(Q)\frac{\partial v(Q)}{\partial \xi_k}\right] - u(Q)\,v(Q)\sum_{1}^{2}{}_k \frac{\partial a_{ik}(Q)}{\partial \xi_k}, \quad (i=1,2).$$

Tenendo presente che $\sum_{1}^{2}{}_{ij} a_{ij}(P)\dfrac{\partial^2 U}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \dfrac{\partial U}{\partial \eta} = 0$, se si pone al posto di u una soluzione generalizzata di (1) e al posto di v la funzione $U - 1/c^2$, si ottiene

$$v(Q)\,\mathcal{L}[u(Q)] - u(Q)\,\mathcal{M}[v(Q)] = \left(U - \frac{1}{c^2}\right)\left[f(Q) - u(Q)\left(a(Q) + \sum_{1}^{2}{}_{ij}\frac{\partial^2 a_{ij}(Q)}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\right)\right] +$$

$$+ u(Q)\,U\left\{\sum_{1}^{2}{}_{ij}(a_{ij}(P) - a_{ij}(Q))\left[\frac{1}{4(y-\eta)^2}\sum_{1}^{2}{}_{hk} A_{ih}(P)A_{jk}(P)(x_h - \xi_h)(x_k - \xi_k) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{A_{ij}(P)}{2(y-\eta)}\right] - \frac{1}{y-\eta}\sum_{1}^{2}{}_{ij}\frac{\partial a_{ij}(Q)}{\partial \xi_j}\sum_{1}^{2}{}_h A_{ih}(P)(x_h - \xi_h)\right\}.$$

L'espressione ora scritta, per l'ipotesi di hölderianità delle a_{ij}, riesce integrabile ([5]) in $\mathcal{D}_{P,c}$, onde nel primo membro di (7) si può senz'altro passare al limite per $\delta \to 0$. Il primo integrale a destra nella (7) si riduce a

$$-\iint_{\mathcal{S}_{P,c}} u(Q)\left[\sum_{1}^{2}{}_i a_{1i}(Q)\frac{\partial U}{\partial \xi_i}\,d\xi_2\,d\eta + \sum_{1}^{2}{}_i a_{2i}(Q)\frac{\partial U}{\partial \xi_i}\,d\eta\,d\xi_1\right];$$

passando poi dalle coordinate ξ_1, ξ_2, η alle ϱ, φ, θ si ottiene senza difficoltà

$$\lim_{\delta \to 0}\iint_{\mathcal{S}_{P,\delta}}\left[H_1(Q)\,d\xi_2\,d\eta + H\,(Q)\,d\eta\,d\xi_1 - u(Q)v(Q)\,d\xi_1\,d\xi_2\right] = 4\pi mnu(P),$$

da cui segue la (6), poichè, per le (5), è $mn = \sqrt{A(P)}$.

([5]) Infatti, posto

$$\sum_{1}^{2}{}_{ij} A_{ij}(P)(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j) = r^2,$$

e quindi

$$\begin{aligned} x_1 - \xi_1 &= r(m\cos\omega\cos\varphi + n\,\mathrm{sen}\,\omega\,\mathrm{sen}\,\varphi), \\ x_2 - \xi_2 &= r(m\,\mathrm{sen}\,\omega\cos\varphi - n\cos\omega\,\mathrm{sen}\,\varphi), \end{aligned} \qquad (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi),$$

indicando con D un qualsiasi dominio contenuto in C e con α_1, α_2 due interi non negativi, si ha

$$\iiint_D \frac{(x_1-\xi_1)^{\alpha_1}(x_2-\xi_2)^{\alpha_2}}{(y-\eta)^\beta}\,U\,dQ = \int_0^{2\pi}[\ldots]\,d\varphi\iint\frac{r^{\alpha+1}}{(y-\eta)^{\beta+1}}\exp\frac{-r^2}{4(y-\eta)}\,dr\,d\eta,$$

dove $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ e il simbolo $[\ldots]$ indica un polinomio in $\mathrm{sen}\,\varphi$ e $\cos\varphi$; pertanto l'integrale scritto ha senso purchè sia $\alpha + 2 - 2\beta > 0$.

La formola di media (6) può essere presentata in forma diversa. Sostituendo a c una variabile t, moltiplicando ambo i membri per t^3 e integrando da zero a c, si ha, con qualche integrazione per parti,

$$\int_0^c t^3\,\mathrm{d}t \iiint_{\mathcal{D}_{P,t}} \left\{ u(Q)\,\mathcal{M}\left[U - \frac{1}{t^2}\right] - f(Q)\left(U - \frac{1}{t^2}\right)\right\} \mathrm{d}Q =$$

$$= \frac{1}{4} \iiint_{\mathcal{D}_{P,c}} \left(\frac{(c^2 - \varrho^2)^2}{\varrho^2} \left[u(Q) \left(\sum_{1}^{2}{}_{ij} \frac{\partial^2 a_{ij}(Q)}{\partial \xi_i\, \partial \xi_j} + a(Q) \right) - f(Q) \right] + \right.$$

$$+ \frac{c^4 - \varrho^4}{\varrho^2} u(Q) \left\{ \sum_{1}^{2}{}_{ij} (a_{ij}(Q) - a_{ij}(P)) \left[\frac{1}{4(y-\eta)^2} \sum_{1}^{2}{}_{hk} A_{ih}(P) A_{jk}(P)(x_h - \xi_h)(x_k - \xi_k) - \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \frac{A_{ij}(P)}{2(y-\eta)} \right] + \frac{1}{y-\eta} \sum_{1}^{2}{}_{ij} \frac{\partial a_{ij}(Q)}{\partial \xi_j} \sum_{1}^{2}{}_{h} A_{ih}(P)(x_h - \xi_h) \right\} \right) \mathrm{d}Q\ ;$$

così pure, passando alle coordinate ϱ, φ, θ e tenendo presenti le (5), si ha

$$\int_0^c \varrho^3\,\mathrm{d}\varrho \iint_{\mathcal{S}_{P,\varrho}} u(Q) \left[\sum_{1}^{2}{}_{i}\, a_{1i}(Q) \frac{\partial U}{\partial \xi_i}\, \mathrm{d}\xi_2\, \mathrm{d}\eta + \sum_{1}^{2}{}_{i}\, a_{2i}(Q) \frac{\partial U}{\partial \xi_i}\, \mathrm{d}\eta\, \mathrm{d}\xi_1 \right] =$$

$$= -\frac{1}{8} \iiint_{\mathcal{D}_{P,c}} u(Q) \varrho^2 \frac{\sum_{1}^{2}{}_{ij}\, \alpha_{ij}(P,Q)(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j)}{(y-\eta)^2}\, \mathrm{d}Q\ ,$$

ove

$$\alpha_{ij}(P,Q) = \sum_{1}^{2}{}_{hk}\, a_{hk}(Q) A_{ih}(P) A_{jk}(P), \qquad (i, j = 1, 2),$$

onde

$$(6') \qquad u(P) = \frac{1}{4\pi c^4 \sqrt{A(P)}} \iiint_{\mathcal{D}_{P,c}} \left\{ \frac{(c^2 - \varrho^2)^2}{\varrho^2} \left[u(Q) \left(\sum_{1}^{2}{}_{ij} \frac{\partial^2 a_{ij}(Q)}{\partial \xi_i\, \partial \xi_j} + a(Q) \right) - f(Q) \right] + \right.$$

$$+ (c^4 - \varrho^4) u(Q) \left[\mathcal{M}\left[\frac{1}{\varrho^2}\right] - \frac{1}{\varrho^2} \left(a(Q) + \sum_{1}^{2}{}_{ij} \frac{\partial^2 a_{ij}(Q)}{\partial \xi_i\, \partial \xi_j} \right) \right] +$$

$$\left. + \frac{1}{2} u(Q) \varrho^2 \frac{\sum_{1}^{2}{}_{ij}\, \alpha_{ij}(P,Q)(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j)}{(y-\eta)^2} \right\} \mathrm{d}Q\ .$$

La formola di media (6), o (6′), è poi caratteristica per le soluzioni generalizzate dell'equazione (1), come risulta dalla seguente proposizione:

2) Inversione della proprietà di media. *Nelle specificate ipo-*

tesi sui coefficienti di $\mathcal{L}$ *e su* f, *una funzione* $u(x_1, x_2, y)$ *che sia assolutamente continua in* C, *con le* $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $(i = 1, 2)$, *assolutamente continue in* x_1, x_2 *e dotate delle derivate* $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ *sommabili in* C, *la quale verifichi in ogni punto* P *di* C, *e per tutti i valori di* c *sufficientemente piccoli, la proprietà di media* (6), *oppure* (6′), *soddisfa conseguentemente quasi-dappertutto in* C *l'equazione* (1).

Si ha

$$\iiint_{\mathcal{D}_{P,c}} \{ \mathcal{L}[u(Q)] - f(Q) \} \,\mathrm{d}Q = \iiint_{\mathcal{D}_{P,c}} \left[u(Q) \left(\sum_{1}^{2}{}_{ij} \frac{\partial^2 a_{ij}(Q)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + a(Q) \right) - f(Q) \right] \mathrm{d}Q -$$

$$- \iint_{\mathcal{S}_{P,c}} \left[u(Q)\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2 + 2u(Q) \sum_{1}^{2}{}_{i} \frac{\partial a_{1i}(Q)}{\partial \xi_i}\,\mathrm{d}\xi_2\,\mathrm{d}\eta + 2u(Q) \sum_{1}^{2}{}_{i} \frac{\partial a_{2i}(Q)}{\partial \xi_i}\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\xi_1 \right] +$$

$$+ \iint_{\mathcal{S}_{P,c}} \left[\sum_{1}^{2}{}_{i} \frac{\partial a_{1i}(Q) u(Q)}{\partial \xi_i}\,\mathrm{d}\xi_2\,\mathrm{d}\eta + \sum_{1}^{2}{}_{i} \frac{\partial a_{2i}(Q) u(Q)}{\partial \xi_i}\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\xi_1 \right].$$

Ora è

$$\int_0^c r^3\,\mathrm{d}r \int_0^r \frac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho^3} \iiint_{\mathcal{D}_{P,\varrho}} \left[u(Q) \left(\sum_{1}^{2}{}_{ij} \frac{\partial^2 a_{ij}(Q)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + a(Q) \right) - f(Q) \right] \mathrm{d}Q =$$

$$= \frac{1}{8} \iiint_{\mathcal{D}_{P,c}} \frac{(c^2 - \varrho^2)^2}{\varrho^2} \left[u(Q) \left(\sum_{1}^{2}{}_{ij} \frac{\partial^2 a_{ij}(Q)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + a(Q) \right) - f(Q) \right] \mathrm{d}Q\,,$$

come si riconosce eseguendo delle semplici integrazioni per parti. Poi

$$\int_0^c r^3\,\mathrm{d}r \int_0^r \frac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho^3} \iint_{\mathcal{S}_{P,\varrho}} \left[u(Q)\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2 + 2u(Q) \sum_{1}^{2}{}_{i} \frac{\partial a_{1i}(Q)}{\partial \xi_i}\,\mathrm{d}\xi_2\,\mathrm{d}\eta + 2u(Q) \sum_{1}^{2}{}_{i} \frac{\partial a_{2i}(Q)}{\partial \xi_i}\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\xi_1 \right] =$$

$$= \frac{1}{8} \iiint_{\mathcal{D}_{P,c}} (c^4 - \varrho^4) u(Q) \left[\sum_{1}^{2}{}_{ij} a_{ij}(P) \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_i \partial \xi_j} - 2 \sum_{1}^{2}{}_{ij} \frac{\partial a_{ij}(Q)}{\partial \xi_i} \frac{\partial U}{\partial \xi_j} \right] \mathrm{d}Q\,;$$

infine, passando alle coordinate ϱ, φ, θ ed eseguendo delle integrazioni parziali separatamente rispetto a ϱ, φ, θ si ha

$$\int_0^c r^3\,\mathrm{d}r \int_0^r \frac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho^2} \iint_{\mathcal{S}_{P,\varrho}} \left[\sum_i^{2}{}_1 \frac{\partial a_{1i}(Q)u(Q)}{\partial \xi_i}\,\mathrm{d}\xi_2\,\mathrm{d}\eta + \sum_i^{2}{}_1 \frac{\partial a_{2i}(Q)\,u(Q)}{\partial \xi_i}\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\xi_1 \right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\pi c^4 \sqrt{A(P)}\,u(P) + \frac{1}{8} \iiint_{\mathcal{D}_{P,c}} (c^4 - \varrho^4) u(Q) \sum_{ij}^{2}{}_1 a_{ij}(Q) \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_i \partial \xi_j} +$$

$$+ u(Q)\varrho^2 \frac{\sum_{ij}^{2}{}_1 \alpha_{ij}(P,Q)(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j)}{2(y-\eta)^2}\,\mathrm{d}Q\,,$$

onde, per la (6′), si ha

$$\int_0^c r^3\mathrm{d}r \int_0^r \frac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho^3} \iiint_{\mathcal{D}_{P,\varrho}} \Big\{ \mathcal{L}[u(Q)] - f(Q) \Big\}\,\mathrm{d}Q = 0$$

da cui, per l'arbitrarietà di P e di c, segue l'asserto.

2. – Posizione del problema e teorema di unicità.

Consideriamo la superficie continua

$$\text{(8)} \qquad S \equiv \begin{cases} x_1 = \bar{x}_1(\alpha, \beta)\,, \\ x_2 = \bar{x}_2(\alpha, \beta)\,, \qquad \text{sul rettangolo base} \quad R \equiv \begin{pmatrix} y_1 \leqslant \beta \leqslant y_2 \\ \alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2 \end{pmatrix}, \\ y = \beta\,, \end{cases}$$

tale che, per ogni valore di β, le $x_1 = \bar{x}_1(\alpha, \beta)$ e $x_2 = \bar{x}_2(\alpha, \beta)$ siano le equazioni parametriche di una curva (continua) semplice chiusa. Indichiamo con D il dominio limitato individuato da S e dai piani caratteristici $y = y_1$, $y = y_2$. Consideriamo poi la famiglia di superficie

$$\text{(9)} \qquad S(t) \equiv \begin{cases} x_1 = x_1(\alpha, \beta, t)\,, \\ x_2 = x_2(\alpha, \beta, t)\,, \qquad \text{sul rettangolo } R \quad \text{e per} \quad 0 \leqslant t < \delta\,, \\ y = \beta\,, \end{cases}$$

tali che per $t' > t$, e qualunque sia β, la curva $x_1 = x_1(\alpha, \beta, t')$, $x_2 = x_2(\alpha, \beta, t')$, sia contenuta nel dominio limitato che ha per completa frontiera la $x_1 = x_1(\alpha, \beta, t)$, $x_2 = x_2(\alpha, \beta, t)$ e sia

$$\lim_{t\to 0} x_i(\alpha, \beta, t) = \bar{x}_i(\alpha, \beta)\,, \qquad (i = 1, 2), \text{ uniformemente su } R.$$

Se $g(\alpha, \beta, t)$ è una funzione misurabile limitata e positiva per $(\alpha, \beta) \subset R$ e $0 \leqslant t < \delta$, ed $F(\alpha, \beta)$ una funzione sommabile con la sua potenza p-esima su R si dice che una funzione $u(x_1, x_2, y)$ converge in media verso $F(\alpha, \beta)$ su S d'ordine p rispetto alla famiglia $S(t)$ se, per ogni t, la $u(x_1(\alpha, \beta, t), x_2(\alpha, \beta, t), \beta)$ è una funzione di p-esima potenza sommabile su R e riesce

$$\lim_{t\to 0} \iint_R g(\alpha, \beta, t)\,|u(x_1(\alpha, \beta, t), x_2(\alpha, \beta, t), \beta) - F(\alpha, \beta)|^p \,d\alpha\, d\beta = 0\,. \tag{10}$$

Ebbene, il problema che qui interessa è il seguente:

Determinare una soluzione generalizzata dell'equazione $\mathfrak{L}[u] = f$ che si annulli per $y = y_1$ e converga in media d'ordine p su S a una assegnata funzione $\Phi(\alpha, \beta)$ rispetto alla famiglia $S(t)$.

Cominciamo a fare alcune ipotesi sulle superficie S, $S(t)$ e sulla funzione peso g.

Supponiamo che le $S(t)$ siano superficie regolari le quali per $0 \leqslant t < \delta$ invadano tutto il dominio D o per lo meno una zona attorno ad S; le x_1 e x_2 siano dotate delle derivate prime rispetto ad α, β, t e seconde rispetto ad α, t, continue. Le derivate $\dfrac{\partial x_i}{\partial \alpha}$, $(i = 1, 2)$, per ogni coppia di valori di β e t, non si annullino mai contemporaneamente e sia $\dfrac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\alpha, t)} > 0$. Allora per $0 < t < \delta$ le $x_1 = x_1(\alpha, \beta, t)$, $x_2 = x_2(\alpha, \beta, t)$ si potranno univocamente risolvere rispetto ad α e t, onde si avrà $t = t(x_1, x_2, y)$ dotata delle derivate $\dfrac{\partial^2 t}{\partial x_i \partial x_j}$, $\dfrac{\partial t}{\partial y}$ continue.

Poniamo

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = -\varphi A \sum_{1}^{2}{}_i A_{2i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} + \psi \frac{\partial x_1}{\partial \alpha}, \qquad \frac{\partial x_2}{\partial t} = \varphi A \sum_{1}^{2}{}_i A_{1i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} + \psi \frac{\partial x_2}{\partial \alpha}, \tag{11}$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} \varphi = \dfrac{\dfrac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\alpha, t)}}{A \sum_{1}^{2}{}_{ij} A_{ij} \dfrac{\partial x_i}{\partial \alpha} \dfrac{\partial x_j}{\partial \alpha}} = \dfrac{1}{A \left(\dfrac{\partial t}{\partial x_2} \sum_{1}^{2}{}_i A_{1i} \dfrac{\partial x_i}{\partial \alpha} - \dfrac{\partial t}{\partial x_1} \sum_{1}^{2}{}_i A_{2i} \dfrac{\partial x_i}{\partial \alpha} \right)}, \\[2ex] \psi = \dfrac{\sum_{1}^{2}{}_{ij} A_{ij} \dfrac{\partial x_i}{\partial \alpha} \dfrac{\partial x_j}{\partial t}}{\sum_{1}^{2}{}_{ji} A_{ij} \dfrac{\partial x_i}{\partial \alpha} \dfrac{\partial x_j}{\partial \alpha}} = \varphi A \left(\dfrac{\partial t}{\partial x_2} \sum_{1}^{2}{}_i A_{1i} \dfrac{\partial x_i}{\partial t} - \dfrac{\partial t}{\partial x_1} \sum_{1}^{2}{}_i A_{2i} \dfrac{\partial x_i}{\partial t} \right). \end{cases} \tag{12}$$

Supponiamo che g sia una funzione continua con le derivate prime e positiva per $0 \leqslant t < \delta$, e φg sia una funzione continua insieme alle derivate $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$ in tutto D; se eventualmente le $S(t)$ invadessero solo una zona attorno ad S, penseremo φg prolungata in tutto D in modo da soddisfare le condizioni poste.

In modo del tutto simile a quanto è stato fatto nei lavori citati in (²), si ha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_R g\,|u|^p_{S(t)}\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta = \iint_R \frac{\partial g}{\partial t}\,|u|^p_{S(t)}\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta + p\iint_R g\left(\frac{|u|^p}{u}\right)_{S(t)}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t}\right)_{S(t)}\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta$$

che, mediante le (11) e con una integrazione per parti, si può scrivere

$$\text{(13)}\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_R g\,|u|^p_{S(t)}\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta = \iint_R |u|^p_{S(t)}\left[\frac{\partial g}{\partial t} - \frac{d\psi g}{\partial\alpha}\right]\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta +$$

$$+ p\iint_R \varphi g\left(\frac{|u|^p}{u}\right)_{S(t)}\left[\frac{\partial x_1}{\partial\alpha}\sum_{1}^{2}{}_i\, a_{2i}\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial x_2}{\partial\alpha}\sum_{1}^{2}{}_i\, a_{1i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]_{S(t)}\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta\,.$$

Ora, sotto certe ipotesi di regolarità per u e v e per $p \geqslant 1$, sussiste l'identità

$$\iiint_D v\,\frac{|u|^p}{u}\,\mathcal{L}[u]\,\mathrm{d}P = \frac{1}{p}\iiint_D |u|^p\left(\mathcal{M}[v] + (p-1)av\right)\mathrm{d}P -$$

$$-(p-1)\iiint_D v\,|u|^{p-2}\sum_{1}^{2}{}_{ij}\, a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,\mathrm{d}P - \frac{1}{p}\iint_{FD}|u|^p\left[\sum_{1}^{2}{}_i\frac{\partial a_{1i}v}{\partial x_i}\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}y +\right.$$

$$\left.+\sum_{1}^{2}{}_i\frac{\partial a_{2i}v}{\partial x_i}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x_1 + v\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\right] + \iint_{FD} v\,\frac{|u|^p}{u}\left[\sum_{1}^{2}{}_i\, a_{1i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}y + \sum_{1}^{2}{}_i\, a_{2i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\mathrm{d}y\mathrm{d}x_1\right].$$

Ponendo in quest'ultima φg al posto di v e intendendo che u sia una soluzione generalizzata dell'equazione $\mathcal{L}[u] = 0$, indicando con $D(t)$ il dominio limitato individuato dai piani caratteristici $y = y_1$, $y = y_2$ e dalla superficie $S(t)$, si ottiene

$$\text{(14)}\qquad \iint_R \varphi g\left(\frac{|u|^p}{u}\right)_{S(t)}\left[\frac{\partial x_1}{\partial\alpha}\sum_{1}^{2}{}_i\, a_{2i}\frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial x_2}{\partial\alpha}\sum_{1}^{2}{}_i\, a_{1i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]_{S(t)}\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta =$$

$$= \frac{1}{p}\iiint_{D(t)}|u|^p\left(\mathcal{M}[\varphi g] + (p-1)a\varphi g\right)\mathrm{d}P - (p-1)\iiint_{D(t)}\varphi g\,|u|^{p-2}\sum_{1}^{2}{}_{ij}\, a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\mathrm{d}P +$$

$$+\frac{1}{p}\iint_R |u|^p_{S(t)}\left[\frac{\partial x_1}{\partial\alpha}\sum_{1}^{2}{}_i\frac{\partial a_{2i}\varphi g}{\partial x_i} - \frac{\partial x_2}{\partial\alpha}\sum_{1}^{2}{}_i\frac{\partial a_{1i}\varphi g}{\partial x_i}\right]_{S(t)}\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta - \frac{1}{p}\iint_{FD(t)}\varphi g\,|u|^p\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,.$$

Si ha poi

$$(15)\qquad \iint_R |u|^p_{S(t)} \left(\frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial \psi g}{\partial \alpha}\right) d\alpha\, d\beta = \iint_R |u|^p_{S(t)} \left[\varphi g \sum_{1}^{2}{}_{ij}\, a_{ij} \frac{\partial^2 t}{\partial x_i \partial x_j} + \right.$$

$$\left. + \sum_{1}^{2}{}_{ij} \frac{\partial a_{ij}\varphi g}{\partial x_i} \frac{\partial t}{\partial x_j}\right] \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\alpha, t)} d\alpha\, d\beta\,.$$

L'ultimo integrale a secondo membro nella (14), tenendo presente che $u=0$ per $y = y_1$, si può scrivere

$$\iint_{\sigma_2(t)} \varphi g\, |u|^p\, dx_1\, dx_2 + \iint_R \varphi g\, |u|^p_{S(t)} \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\alpha, \beta)} d\alpha\, d\beta\,,$$

indicando con $\sigma_2(t)$ la porzione di $\mathrm{F}D(t)$ che appartiene al piano $y = y_2$. Introducendo la (14) e la (15) nella (13) e osservando che

$$\left[\frac{\partial x_1}{\partial \alpha} \sum_{1}^{2}{}_i \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{2i}\varphi g) - \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} \sum_{1}^{2}{}_i \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{1i}\varphi g)\right]_{S(t)} \frac{\partial(\alpha, t)}{\partial(x_1, x_2)} + \varphi g \frac{\partial t}{\partial y} +$$

$$+ \varphi g \sum_{1}^{2}{}_{ij}\, a_{ij} \frac{\partial^2 t}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{1}^{2}{}_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\varphi g) \frac{\partial t}{\partial x_j} = \mathcal{M}[\varphi g t] - t\, \mathcal{M}[\varphi g]\,,$$

si ha in definitiva

$$(16)\qquad \frac{d}{dt} \iint_R g\, |u|^p_{S(t)}\, d\alpha\, d\beta = \iint_R |u|^p_{S(t)} \left(\mathcal{M}[\varphi g t] - t\, \mathcal{M}[\varphi g]\right) \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\alpha, t)} d\alpha\, d\beta +$$

$$+ \iiint_{D(t)} |u|^p (\mathcal{M}[\varphi g] + (p-1) a \varphi g)\, dP - p(p-1) \iiint_{D(t)} \varphi g\, |u|^{p-2} \sum_{1}^{2}{}_{ij}\, a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}\, dP -$$

$$- \iint_{\sigma_2(t)} \varphi g\, |u|^p\, dx_1\, dx_2\,.$$

Dall'identità ora stabilita discende il seguente

Teorema di unicità. *Se $g(\alpha, \beta, t)$ è una funzione continua e positiva in R, $0 \leq t < \delta$, soddisfacente le ipotesi già specificate, se riesce*

$$(17)\qquad \mathcal{M}[\varphi g] + (p-1) a \varphi g \leq 0$$

in tutto D e se, almeno per t in un intorno dello zero, riesce

$$\frac{1}{g}\left(\mathfrak{M}[\varphi g t] - t\,\mathfrak{M}[\varphi g]\right)\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\alpha, t)} < M \quad (18)$$ [6]

([6]) G. CIMMINO, nei lavori citati in ([2]), ha mostrato come, sotto certe ipotesi di regolarità, per la FD, sia possibile scegliere in modo semplice la funzione g così da soddisfare tutte le condizioni indicate.

Supponiamo che la sezione di S col piano caratteristico y sia dotata di curvatura, $1/r$, che sia una funzione di α e β continua su R. Inoltre le $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$ abbiano le derivate $\dfrac{\partial^3}{\partial\alpha^3}$ e $\dfrac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}$ continue su R. Indichiamo con $\tau(x_1, x_2, y)$ la distanza che un qualsiasi punto (x_1, x_2, y) di D ha da S, misurata sul piano caratteristico cui tale punto appartiene; sia $\mu(\tau)$ una funzione di τ nulla per $\tau = 0$, dotata delle derivate dei primi due ordini continue e con la derivata prima sempre positiva. Poniamo $t = \mu(\tau)$ e indichiamo con $\tau = \lambda(t)$ la relativa funzione inversa. Definiamo le $x_1(\alpha, y, t)$, $x_2(\alpha, y, t)$ come segue:

$$x_1(\alpha, y, t) = \bar{x}_1(\alpha, y) - \lambda(t)\frac{\dfrac{\partial\bar{x}_2}{\partial\alpha}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\bar{x}_1}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\bar{x}_2}{\partial\alpha}\right)^2}}, \quad x_2(\alpha, y, t) = \bar{x}_2(\alpha, y) + \lambda(t)\frac{\dfrac{\partial\bar{x}_1}{\partial\alpha}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\bar{x}_1}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\bar{x}_2}{\partial\alpha}\right)^2}}.$$

Se $\dfrac{1}{\gamma} = \max_R\left|\dfrac{1}{r}\right|$, sia δ un numero positivo tale che per $t \leq \delta$ riesca $\tau = \lambda(t) < \gamma$ e quindi $\dfrac{\lambda(t)}{|r|} < 1$. Poichè $\dfrac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\alpha, t)} = \lambda'(t)\sqrt{\left(\dfrac{\partial\bar{x}_1}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\bar{x}_2}{\partial\alpha}\right)^2}\left(1 - \dfrac{\lambda(t)}{r}\right)$, si può allora prendere

$$g = \frac{1}{\varphi}\exp(-p\max_D|a|\,y).$$

Con ciò la condizione (17) è automaticamente soddisfatta mentre il primo membro della (18) diventa

$$\frac{\left(\dfrac{\partial\bar{x}_1}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\bar{x}_2}{\partial\alpha}\right)^2}{A\sum_{ij}^{2}{}_{1} A_{ij}\dfrac{\partial x_i}{\partial\alpha}\dfrac{\partial x_j}{\partial\alpha}}\left(1 - \frac{\lambda}{r}\right)^2\lambda'^2\mathfrak{M}[t]\,.$$

dove

$$\lambda'^2\,\mathfrak{M}[t] = \lambda'\sum_{1}^{2}{}_{ij}\,a_{ij}\frac{\partial^2\tau}{\partial x_i\,\partial x_j} - \frac{\lambda''}{\lambda'}\sum_{1}^{2}{}_{ij}\,a_{ij}\frac{\partial\tau}{\partial x_i}\frac{\partial\tau}{\partial x_j} +$$
$$+ 2\lambda'\sum_{1}^{2}{}_{ij}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial\tau}{\partial x_j} + t\lambda'^2\sum_{1}^{2}{}_{ij}\frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_i\,\partial x_j} + \lambda'\frac{\partial\tau}{\partial y} + \lambda'^2 a t\,,$$

e quindi per le ipotesi fatte su $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, μ e tenendo presente l'espressione di $\dfrac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\alpha, t)}$, si vede come si possa sempre soddisfare la (18) almeno in un intorno di $t = 0$.

(per una certa costante positiva M), allora esiste al più una funzione $u(x_1, x_2, y)$ che sia in D soluzione generalizzata di $\mathfrak{L}[u] = f$, che assuma su σ_1 valori prefissati e converga in media d'ordine $p \geq 1$ su S rispetto alla famiglia $S(t)$ verso una assegnata funzione $\Phi(\alpha, \beta)$.

La dimostrazione si consegue immediatamente per assurdo osservando che dalla (16), sotto le ipotesi (17) e (18), se per u si intende la differenza di due soluzioni come quelle dell'enunciato, si ottiene

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_R g\,|u|^p\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta \leq M\iint_R g\,|u|^p\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta\,,$$

da cui segue che

$$e^{-Mt}\iint_R g\,|u|^p\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta$$

è una funzione non decrescente per $t \to 0$ e quindi non può convergere a zero a meno che non sia $\iint_R g|u|^p\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta = 0$, ossia $u \equiv 0$.

3. – Preliminari al teorema di convergenza.

Alle ipotesi già fatte sulle a_{ij} aggiungiamo d'ora in poi l'ipotesi che a, $\dfrac{\partial a_{ij}}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_h \partial x_k}$ *siano lipschitziane in* x_1, x_2, y, nel campo $y_1 \leq y \leq y_2$, $(x_1, x_2) \subset T$ (contenente D).

Indichiamo con D_y il dominio prodotto di D per lo strato $y_1 \leq \eta \leq y$. Si ha:

1) *Se $b(P)$ è una funzione misurabile e limitata in D, l'integrale*

$$I(P) = \iiint_{D_y} b(Q)\,U\,\mathrm{d}Q$$

riesce lipschitziano in x_1, x_2, y mentre le derivate $\dfrac{\partial I}{\partial x_i}$, $(i = 1, 2)$, risultano lipschitziane in x_1, x_2.

La prova si può conseguire imitando un ragionamento di DRESSEL [7].

[7] Cfr. il primo dei lavori citati in [4], pp. 189-196. Richiamiamo questo risultato perchè di esso ci serviremo più avanti. Diciamo col DRESSEL che $f(P)$, $(x_1, x_2) \subset T$, $y_1 \leq y \leq y_2$, è una funzione della classe A nel punto $P \equiv (x_1, x_2, y)$ se essa soddisfa le seguenti condizioni:

1) $$\int_{y_1}^{y_2}\iint_T |f(Q)|\,\mathrm{d}Q < +\infty\,;$$

Supponiamo che sia, per esempio, $\Delta y > 0$. Esplicitando la sola variabile che interessa, si ha

$$|I(P+\Delta y) - I(P)| = \left| \iiint_{D_{y+\Delta y}} b\,U(y+\Delta y)\,\mathrm{d}Q - \iiint_{D_y} b\,U(y)\,\mathrm{d}Q \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_y^{y+\Delta y} \iint_{\sigma(\eta)} b\,U(y+\Delta y)\,\mathrm{d}Q \right| + \left| \int_{y_1}^{y} \iint_{\sigma(\eta)} b[U(y+\Delta y) - U(y)]\,\mathrm{d}Q \right| ;$$

il primo integrale all'ultimo membro è ovviamente dell'ordine di Δy; il secondo integrale si può scrivere

$$\left(\int_{y_1}^{y-\delta} \iint_{\sigma(\eta)} + \int_{y-\delta}^{y} \iint_{\sigma(\eta)-\omega} + \int_{y-\delta}^{y} \iint_{\omega} \right) b[U(y+\Delta y) - U(y)]\,\mathrm{d}Q ,$$

indicando con ω un cerchio del piano x_1, x_2 col centro nella proiezione di P, e con δ un certo numero positivo. Il primo e secondo integrale, una volta

---

2) $f(Q)$ è limitata in ogni insieme chiuso per cui $\eta > y_1$;

3) $f(Q)$ soddisfa una condizione di HÖLDER di ordine γ, $(0 < \gamma \leqslant 1)$, nel punto P, ossia

$$|f(P) - f(Q)| \leqslant N[|y-\eta|^\gamma + \sum_1^2{}_i |\xi_i - x_i|^\gamma]$$

per $y_1 < y - \delta \leqslant \eta \leqslant y + \delta$, $x_i - l \leqslant \xi_i \leqslant x_i + l$, $(i = 1, 2)$.

Ebbene la funzione

$$Z(P) = \int_{y_1}^{y} \iint_T U(P, Q) f(Q)\,\mathrm{d}Q$$

è dotata delle derivate prima rispetto a y e seconde rispetto alle x_i, in ogni punto P ove f appartiene alla classe A. Inoltre riesce

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = 4\pi\sqrt{A(P)}\, f(P) + \int_{y_1}^{y} \iint_T [f(Q) - f(P)] \frac{\partial U}{\partial y}\,\mathrm{d}Q + f(P) \int_{y_1}^{y} \left\{ \iint_T \frac{\partial U}{\partial y}\,\mathrm{d}\xi_1 \mathrm{d}\xi_2 \right\} \mathrm{d}\eta ,$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial x_j} = \int_{y_1}^{y} \iint_T [f(Q) - f(P)] \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}\,\mathrm{d}Q + f(P) \int_{y_1}^{y} \left\{ \iint_T \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}\,\mathrm{d}\xi_1 \mathrm{d}\xi_2 \right\} \mathrm{d}\eta ,$$

tenendo presente che la funzione che DRESSEL indica con $F(x, y)$ attualmente è

$$2 \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{A_{11}(P)\cos^2\varphi + 2A_{12}(P)\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi + A_{22}(P)\,\mathrm{sen}^2\varphi} = 4\pi\sqrt{A(P)} ,$$

perchè $A_{11}(P)A_{22}(P) - A_{12}^2(P) = \dfrac{1}{A(P)}$.

fissato δ, poichè $\dfrac{\partial U}{\partial y}$ è una funzione integrabile nei corrispondenti domini, è dell'ordine di Δy. Il terzo, se nell'integrale contenente $U(y+\Delta y)$ si muta η in $\eta+\Delta y$, si può scrivere

$$\int_{y-\delta-\Delta y}^{y-\delta} \iint_{\omega} b\overline{U}\,\mathrm{d}Q + \int_{y-\delta}^{y-\Delta y} \iint_{\omega} b(\overline{U}-U)\,\mathrm{d}Q - \int_{y-\Delta y}^{y} \iint_{\omega} bU\,\mathrm{d}Q\,,$$

ponendo

$$\overline{U} = \frac{1}{y-\eta}\exp\frac{-\sum_{1}^{2}{}_{ij}\,A_{ij}(x_1,x_2,y+\Delta y)(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j)}{4(y-\eta)}\,.$$

Poichè esistono finiti i limiti

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\Delta y}\int_{y-\delta-\Delta y}^{y-\delta}\iint_{\omega}\overline{U}\,\mathrm{d}Q\,,\qquad \lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\Delta y}\int_{y-\Delta y}^{y}\iint_{\omega}U\,\mathrm{d}Q\,,$$

e poichè, essendo

$$\overline{U}-U = \Delta y\cdot\frac{1}{y-\eta}\cdot\exp\frac{-\sum_{1}^{2}{}_{ij}\,A_{ij}(x_1,x_2,y+\theta\Delta y)(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j)}{4(y-\eta)}\,\cdot$$

$$\cdot\frac{-\sum_{1}^{2}{}_{ij}\left(\dfrac{\partial A_{ij}(x_1,x_2,y)}{\partial y}\right)_{y+\theta\Delta y}(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j)}{4(y-\eta)}\,,\qquad (0<\theta<1)\,,$$

esiste finito il $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\displaystyle\int_{y-\delta}^{y-\Delta y}\iint_{\omega}\frac{\overline{U}-U}{\Delta y}\,\mathrm{d}Q$, resta provata la lipschitzianità di I rispetto a y. Si ha poi $\dfrac{\partial I}{\partial x_i} = \displaystyle\iiint_{D_y} b\,\frac{\partial U}{\partial x_i}\,\mathrm{d}Q$, $(i=1,2)$; e queste derivate parziali, come si riconosce con un ragionamento analogo a quello indicato sopra, sono lipschitziane in x_1, x_2.

Poniamo ora $\mathcal{M} = \mathfrak{M} + a$ e, per ogni punto P di $D-\mathrm{F}D$, indichiamo con $V(P,Q)$ una funzione soddisfacente le seguenti proprietà:

$$V = U \quad \text{su} \quad S \quad \text{e su} \quad \sigma_1\,,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \xi_i} = \frac{\partial U}{\partial \xi_i} \quad \text{su} \quad S\,,$$

$$V = 0 \quad \text{per} \quad y \leqslant \eta\,;$$

la V sia dotata delle derivate $\frac{\partial V}{\partial \eta}$ e $\frac{\partial^2 V}{\partial \xi_i \partial \xi_j}$ continue in D e queste siano dotate delle derivate $\frac{\partial}{\partial y}$ e $\frac{\partial^2}{\partial x_h \partial x_k}$ continue.

2) *Se $u(P)$ è una funzione continua soddisfacente in ogni punto di $D - \mathrm{F}D$ l'equazione integrale*

$$u(P) = \frac{1}{4\pi\sqrt{A(P)}} \iint_{D_y} u(Q)\mathfrak{M}[U - V]\,\mathrm{d}Q\,, \tag{19}$$

allora essa riesce, di più, lipschitziana in x_1, x_2, y con le derivate $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ lipschitziane in x_1, x_2.

Cominciamo con l'osservare che se v è soluzione dell'equazione

$$\sum_{ij}^{2} a_{ij}(P) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0\,,$$

dalla formola di GREEN si ha

$$\iint_{D_y - \mathcal{D}_{P,\delta}} v\mathfrak{M}[V - U]\,\mathrm{d}Q = -\iint_{\mathcal{S}_{P,\delta}} [H_1\,\mathrm{d}\xi_2\,\mathrm{d}\eta + H_2\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\xi_1 + v(V - U)\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2],$$

indicando con $\mathcal{D}_{P,\delta}$ il dominio considerato nel n. 1, con $\mathcal{S}_{P,\delta}$ la sua frontiera e con H_1, H_2 le espressioni corrispondenti a quelle che figurano nella (7) relative ad $U - V$. Passando al limite per $\delta \to 0$ si ha

$$v(P) = \frac{1}{4\pi\sqrt{A(P)}} \iiint_{D_y} v(Q)\mathfrak{M}[U - V]\,\mathrm{d}Q\,.$$

Se allora, per comodità, indichiamo brevemente con $\mathfrak{M}$ l'espressione $\frac{1}{4\pi\sqrt{A(P)}}\mathfrak{M}[U(P, Q) - V(P, Q)]$, la (19) si scriverà

$$u(P) = \iiint_{D_y} u(Q)\mathfrak{M}\,\mathrm{d}Q\,, \tag{19'}$$

mentre, essendo 1, x_1, x_2 soluzioni regolari dell'equazione $\sum_{ij}^{2} a_{ij}(P) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0$, si avrà

$$1 = \iiint_{D_y} \mathfrak{M}\,\mathrm{d}Q\,, \tag{20}$$

$$x_i = \iiint_{D_y} \xi_i \mathfrak{M}\,\mathrm{d}Q\,, \qquad (i = 1, 2). \tag{21}$$

Indicando genericamente con $B_{\alpha,\beta}$ un'espressione del tipo

$$\frac{(x_1-\xi_1)^{\alpha_1}(x_2-\xi_2)^{\alpha_2}}{(y-\eta)^{\beta}}\cdot\exp\frac{-\sum_1^2{}_{ij} A_{ij}(P)(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j)}{4(y-\eta)},$$

essendo α_1 e α_2 interi non negativi con $\alpha_1+\alpha_2=\alpha$, si vede che $\mathfrak{M}$, $\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial x_i}$, $\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial y}$, $\frac{\partial^2\mathfrak{M}}{\partial x_i\,\partial x_j}$, $\frac{\partial^2\mathfrak{M}}{\partial x_i\,\partial y}$ sono combinazioni lineari a coefficienti funzioni continue (limitate per l'ultima) di termini $B_{\alpha,\beta}$ per cui si ha, rispettivamente, $\alpha-2\beta\geqslant-3$, -4, -5, -5, -6.

Ora è

$$|u(P+\Delta x)-u(P)|\leqslant\left|\int_{y-\delta}^{y}\iint u(Q)\mathfrak{M}(P+\Delta x)\,\mathrm{d}Q\right|+$$
$$+\left|\int_{y-\delta}^{y}\iint u(Q)\mathfrak{M}(P)\,\mathrm{d}Q\right|+\left|\int_{y_1}^{y-\delta}\iint u(Q)[\mathfrak{M}(P+\Delta x)-\mathfrak{M}(P)]\,\mathrm{d}Q\right|,$$

indicando con Δx un incremento Δx_1, o Δx_2, indifferentemente, e con $P+\Delta x$ il punto $(x_1+\Delta x_1, x_2, y)$ oppure $(x_1, x_2+\Delta x_2, y)$. Il primo e secondo termine a destra sono dell'ordine di $\sqrt{\delta}$ (8); il terzo, essendo $\mathfrak{M}(P+\Delta x)-\mathfrak{M}(P)=\Delta x\left(\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial x}\right)_{P+\theta\Delta x}$, $0<\theta<1$, è dell'ordine di $|\Delta x|\,|\lg\delta|$. Pertanto se si prende $\delta=\Delta x^2$ si ha

$$(22)\qquad |u(P+\Delta x)-u(P)|<K_1|\Delta x|\,|\lg|\Delta x||$$

---

(8) Se si tiene presente quanto è stato detto nella annotazione (5) si riconosce subito che l'integrale

$$\int_{y-\delta}^{y}\iint B_{\alpha,\beta}\,\mathrm{d}Q\,,$$

se $\alpha+4-2\beta>0$, è un infinitesimo con δ d'ordine $\frac{1}{2}(\alpha+4-2\beta)$; mentre l'integrale

$$\int_{y_1}^{y-\delta}\iint B_{\alpha,\beta}\,\mathrm{d}Q\,,$$

se $\alpha+4-2\beta=0$, è un infinito logaritmico con δ e, se $\alpha+4-2\beta<0$, è un infinito con $\frac{1}{\delta}$ d'ordine $\frac{1}{2}(2\beta-\alpha-4)$.

indicando con K_1 una certa costante (positiva) indipendente da P al variare di questo in un dominio interno a D. Analogamente

$$|u(P+\Delta y)-u(P)|\leq\Big|\int_{y-\delta}^{y+\Delta y}\iint u(Q)\mathfrak{M}(P+\Delta y)\,\mathrm{d}Q\Big|+$$

$$+\Big|\int_{y-\delta}^{y}\iint u(Q)\mathfrak{M}(P)\,\mathrm{d}Q\Big|+\Big|\int_{y_1}^{y-\delta}\iint u(Q)[\mathfrak{M}(P+\Delta y)-\mathfrak{M}(P)]\,\mathrm{d}Q\,.$$

Prendiamo $\delta=2|\Delta y|$; il primo e secondo termine sono del tipo già considerato; il terzo, essendo $\mathfrak{M}(P+\Delta y)-\mathfrak{M}(P)=\Delta y\left(\dfrac{\partial\mathfrak{M}}{\partial y}\right)_{P+\theta\Delta y}$, $0<\theta<1$, riesce dell'ordine di $\sqrt{|\Delta y|}$. Perciò

$$(23)\qquad |u(P+\Delta y)-u(P)|<K_2|\Delta y|^{1/2}\,,$$

con K_2 costante (positiva) analoga a K_1.

Dalla (19′) si ha

$$u(P+\Delta x)-u(P)=\iiint_{D_y}u(Q)[\mathfrak{M}(P+\Delta x)-\mathfrak{M}(P)]\,\mathrm{d}Q\,,$$

mentre dalla (20) si ha

$$0=\iiint_{D_y}[\mathfrak{M}(P+\Delta x)-\mathfrak{M}(P)]\,\mathrm{d}Q\;;$$

si può quindi scrivere

$$u(P+\Delta x)-u(P)=\Delta x\iiint_{D_y}[u(Q)-u(P+\theta\,\Delta x)]\left(\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial x}\right)_{P+\theta\Delta x}\mathrm{d}Q\,,$$

e perciò, in base alle (22) e (23), decomponendo opportunamente la differenza $u(Q)-u(P+\theta\,\Delta x)$, si ha

$$(22')\qquad |u(P+\Delta x)-u(P)|<K|\Delta x|\,.$$

Segue poi subito

$$(24)\qquad \frac{\partial u(P)}{\partial x_i}=\iiint_{D_y}[u(Q)-u(P)]\,\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial x_i}\,\mathrm{d}Q\,,\qquad (i=1,2).$$

Analogamente, dalle

$$u(P+\Delta y)-u(P)=\iiint_{D_{y+\Delta y}} u(Q)\mathfrak{M}(P+\Delta y)\,\mathrm{d}Q-\iiint_{D_y} u(Q)\mathfrak{M}(P)\,\mathrm{d}Q$$

$$0=\iiint_{D_{y+\Delta y}} \mathfrak{M}(P+\Delta y)\,\mathrm{d}Q-\iiint_{D_y} \mathfrak{M}(P)\,\mathrm{d}Q\,,$$

si ha

$$u(P+\Delta y)-u(P)=\int_y^{y+\Delta y}\iint [u(Q)-u(P+\theta\,\Delta y)]\mathfrak{M}(P+\Delta y)\,\mathrm{d}Q+$$

$$+\Delta y\iiint_{D_y}[u(Q)-u(P+\theta\,\Delta y)]\left(\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial y}\right)_{P+\theta\Delta y}\mathrm{d}Q\,,$$

e di qui, in base alle (23) e (22′), qualora si decomponga opportunamente la differenza $u(Q)-u(P+\theta\,\Delta y)$, si ottiene

$$(23') \qquad |u(P+\Delta y)-u(P)|< K_3|\Delta y|\,|\log|\Delta y||$$

che migliora la (23).

Dalla (24) si ha

$$\left|\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{P+\Delta x}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_P\right|=\left|\iiint_{D_y}\left\{[u(Q)-u(P+\Delta x)]\left(\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial x}\right)_{P+\Delta x}-[u(Q)-u(P)]\left(\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial x}\right)_P\right\}\mathrm{d}Q\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_{y-\delta}^{y}\iint[u(Q)-u(P+\Delta x)]\left(\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial x}\right)_{P+\Delta x}\mathrm{d}Q\right|+\left|\int_{y-\delta}^{y}\iint[u(Q)-u(P)]\left(\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial x}\right)_P\mathrm{d}Q\right|+$$

$$+\left|\int_{y_1}^{y-\delta}\iint[u(Q)-u(P)]\left[\left(\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial x}\right)_{P+\Delta x}-\left(\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial x}\right)_P\right]\mathrm{d}Q\right|+$$

$$+\left|\int_{y_1}^{y-\delta}\iint[u(P)-u(P+\Delta x)]\left(\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial x}\right)_{P+\Delta x}\mathrm{d}Q\right|;$$

il primo e secondo termine all'ultimo membro sono, per cose viste, dell'ordine di $\delta^{1/2}$; il quarto, in forza della (22′) risulta dell'ordine di $|\Delta x|\,|\lg\delta|$; lo stesso avviene del terzo in forza di (22′) e (23′), se si decompone opportunamente la differenza $u(Q) - u(P)$ e si tiene presente che $\left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x}\right)_{P+\Delta x} - \left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x}\right)_P = \Delta x \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{M}}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{P+\theta\Delta x}$, $(0 < \theta < 1)$. In definitiva, se si prende $\delta = |\Delta x|$, si ha

$$\left|\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{P+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_P\right| < K_4 |\Delta x|^{1/2}. \tag{25}$$

In modo del tutto simile, poichè

$$\left|\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{P+\Delta y} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_P\right| = \left|\iiint_{D_{y+\Delta y}} [u(Q) - u(P+\Delta y)] \left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x}\right)_{P+\Delta y} dQ - \iiint_{D_y} [u(Q) - \right.$$

$$\left. - u(P)] \left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x}\right)_P dQ \right| \leqslant \left|\int_{y-\delta}^{y+\Delta y} \iint [u(Q) - u(P+\Delta y)] \left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x}\right)_{P+\Delta y} dQ\right| + \left|\int_{y-\delta}^{y} \iint [u(Q) - \right.$$

$$\left. - u(P)] \left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x}\right)_P dQ\right| + \left|\int_{y_1}^{y-\delta} \iint [u(Q) - u(P)] \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x}\right)_{P+\Delta y} - \left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x}\right)_P\right] dQ\right| +$$

$$+ \left|\int_{y_1}^{y-\delta} \iint [u(P) - u(P+\Delta y)] \left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x}\right)_{P+\Delta y} dQ\right|,$$

prendendo $\delta = 2|\Delta y|$, si ha

$$\left|\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{P+\Delta y} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_P\right| < K_5 |\Delta y|^{1/2}. \tag{26}$$

Possiamo ora migliorare la (23'). In base alle (20) e (21) si può scrivere

$$u(P+\Delta y) - u(P) = \iiint_{D_{y+\Delta y}} \left[u(Q) - u(P) - \sum_1^2{}_i (\xi_i - x_i) \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_P\right] \mathfrak{M}(P+\Delta y)\, dQ -$$

$$- \iiint_{D_y} \left[u(Q) - u(P) - \sum_1^2{}_i (\xi_i - x_i) \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_P\right] \mathfrak{M}(P)\, dQ =$$

$$= \int_y^{y+\Delta y} \iint \left[u(Q) - u(P) - \sum_1^2{}_i (\xi_i - x_i) \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_P\right] \mathfrak{M}(P+\Delta y)\, dQ +$$

$$+ \Delta y \iiint_{D_y} \left[u(Q) - u(P) - \sum_1^2{}_i (\xi_i - x_i) \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_P\right] \left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y}\right)_{P+\theta\Delta y} dQ.$$

Ora si ha

$$\left| u(Q) - u(P) - \sum_{1}^{2}{}_i (\xi_i - x_i) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| = \left| u(Q) - u(x_1, \xi_2, \eta) + u(x_1, \xi_2, \eta) - \right.$$

$$\left. - u(x_1, x_2, \eta) + u(x_1, x_2, \eta) - u(x_1, x_2, y) - \sum_{1}^{2}{}_i (\xi_i - x_i) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \leqslant$$

$$\leqslant |\xi_1 - x_1| \left| \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)_{\xi'_1, \xi_2, \eta} - \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)_{x_1, x_2, y} \right| + |\xi_2 - x_2| \left| \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)_{x_1, \xi'_2, \eta} - \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)_{x_1, x_2, y} \right| +$$

$$+ K_3(y - \eta) |\log (y - \eta)| \ ;$$

si ha poi

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{\xi'_1, \xi_2, \eta} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_1, x_2, y} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{\xi'_1, \xi_2, \eta} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{\xi'_1, \xi_2, y} +$$

$$+ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{\xi'_1, \xi_2, y} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_1, \xi_2, y} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_1, \xi_2, y} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_1, x_2, y}, \quad \text{ecc.}$$

e quindi, per le (25) e (26),

$$|u(P + \Delta y) - u(P)| < K' |\Delta y| \ . \tag{23''}$$

Le (22') e (23'') assicurano che $u(P)$ è lipschitziana.

Passiamo ora a migliorare la (25). Dalle (20) e (21) si ha

$$\Delta x = \iiint_{D_y} \xi[\mathfrak{M}(P + \Delta x) - \mathfrak{M}(P)]\,\mathrm{d}Q\ , \qquad 0 = \iiint_{D_y} [\mathfrak{M}(P + \Delta x) - \mathfrak{M}(P)]\,\mathrm{d}Q\ ,$$

dove ξ sta ad indicare ξ_1 o ξ_2 secondochè l'incremento Δx è stato dato a x_1 oppure a x_2, dalle quali poi si deduce

$$1 = \iiint_{D_y} (\xi - x) \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x}\,\mathrm{d}Q\ . \tag{27}$$

Di qui segue, convenendo che sia $\Delta x_i = \Delta x$ se l'incremento è stato dato a x_i,

$\Delta x_i = 0$ in caso contrario, che

$$\left|\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{P+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_P\right| = \left|\iiint_{D_y} \left[u(Q) - u(P+\Delta x) - \sum_{1}^{2}{}_i\,(\xi_i - x_i - \Delta x_i)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_P\right] \cdot \right.$$

$$\left. \cdot\left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x}\right)_{P+\Delta x} \mathrm{d}Q - \iiint_{D_y} \left[u(Q) - u(P) - \sum_{1}^{2}{}_i\,(\xi_i - x_i)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_P\right]\left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x}\right)_P \mathrm{d}Q\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_{y-\delta}^{y}\iint \left[u(Q) - u(P+\Delta x) - \sum_{1}^{2}{}_i\,(\xi_i - x_i - \Delta x_i)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_P\right]\left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x}\right)_{P+\Delta x} \mathrm{d}Q\right| +$$

$$+ \left|\int_{y-\delta}^{y}\iint \left[u(Q) - u(P) - \sum_{1}^{2}{}_i\,(\xi_i - x_i)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_P\right]\left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x}\right)_P \mathrm{d}Q\right| +$$

$$+ \left|\int_{y_1}^{y-\delta}\iint \left[u(Q) - u(P) - \sum_{1}^{2}{}_i\,(\xi_i - x_i)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_P\right]\left[\left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x}\right)_{P+\Delta x} - \left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x}\right)_P\right] \mathrm{d}Q\right| +$$

$$+ \left|\int_{y_1}^{y-\delta}\iint \left[u(P) - u(P+\Delta x) + \Delta x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_P\right]\left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x}\right)_{P+\Delta x} \mathrm{d}Q\right| .$$

Di qui coi soliti ragionamenti, decomponendo nel modo già indicato le differenze tra parentesi quadre e appoggiandosi alle (22′), (23″), (25) e (26), si ha

$$\left|\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{P+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_P\right| < K''\,|\Delta x|\,. \tag{25′}$$

Con ciò resta provato che le $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ sono lipschitziane in x_1, x_2.

4. - Teorema di convergenza.

Sia $u_n(x_1, x_2, y)$, $(n = 1, 2, \ldots)$, *una successione di funzioni continue insieme a* $\dfrac{\partial u_n}{\partial y}$ *e* $\dfrac{\partial^2 u_n}{\partial x_i\,\partial x_j}$ *in* D, *nulle per* $y = y_1$; *se esistono due funzioni* $f(x_1, x_2, y)$ *e* $F(\alpha, \beta)$ *rispettivamente di* r*-esima e di* s*-esima potenza sommabile rispettivamente in* D *e in* R, *per cui sia*

$$\lim_{n\to\infty}\iiint_D |f - \mathcal{E}[u_n]|^r\,\mathrm{d}P = 0\,, \qquad \lim_{n\to\infty}\iint_R |F - (u_n)_S|^s\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta = 0\,, \tag{28}$$

con $r > 2$ *ed* $s > 1$, *e se esiste una costante (positiva)* N *tale che sia*

$$\iiint_D |u_n|^m \,\mathrm{d}P < N. \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{29}$$

per $m > \begin{cases} \dfrac{r(s-1)}{r-1} \\ 4 \end{cases}$, *allora, in ogni dominio interno a* D, *la successione* $\{u_n\}$, *o per lo meno una sua sottosuccessione, convergerà uniformemente a una funzione* u *la quale assumerà in media d'ordine* s *su* S *i valori* F *e soddisferà la proprietà di media. Se, di più,* f *si suppone limitata, allora* u *sarà soluzione generalizzata dell'equazione* $\mathcal{L}[u] = f$.

Procedendo come nel n. 2, si ha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_R g|u|^s_{S(t)}\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta = \iint_R |u|^s_{S(t)}(\mathcal{M}[g\varphi t] - t\,\mathcal{M}[\varphi g])\,\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\alpha, t)}\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta +$$

$$+\iiint_{D(t)} |u|^s\{\mathcal{M}[\varphi g] + (s-1)a\varphi g\}\mathrm{d}P - s\iiint_{D(t)} \varphi g|u|^{s-2}u\,\mathcal{L}[u]\,\mathrm{d}P -$$

$$-s(s-1)\iiint_{D(t)} \varphi g|u|^{s-2}\sum_{1}^{2}{}_{ij}\, a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,\mathrm{d}P - \iint_{\sigma_2(t)} \varphi g|u|^s\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,.$$

Nelle ipotesi del teorema di unicità, si ha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_R g|u|^s_{S(t)}\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta < -s\iiint_{D(t)} \varphi g|u|^{s-2}u\,\mathcal{L}[u]\,\mathrm{d}P + M\iint_R g|u|^s_{S(t)}\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta\,.$$

Ponendo al posto di u la differenza $u_\mu - u_\nu$, integrando tra ε e t e facendo tendere ε a zero, si ha

$$\iint_R g|u_\mu - u_\nu|^s_{S(t)}\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta < \iint_R g|u_\mu - u_\nu|^s_S\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta - s\int_0^t \mathrm{d}t\iiint_{D(t)} \varphi g|u_\mu - u_\nu|^{s-2}(u_\mu - u_\nu)\cdot$$

$$\cdot\,\mathcal{L}[u_\mu - u_\nu]\,\mathrm{d}P + M\int_0^t \mathrm{d}t\iint_R g|u_\mu - u_\nu|^s_{S(t)}\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta.$$

Il primo integrale a secondo membro è indipendente da t e $\to 0$ per $\mu, \nu \to \infty$ in base alla seconda delle (28); il secondo integrale converge uniformemente a zero per $\mu, \nu \to \infty$ in base alla prima delle (28) e alla (29); detto $\omega_{\mu,\nu}(t)$ il primo membro ed $\eta_{\mu,\nu}(t)$ il massimo della somma dei due primi integrali a destra, si ha

$$\omega_{\mu,\nu}(t) < \eta_{\mu,\nu}(t) + M \int_0^t \omega_{\mu,\nu}(t)\, dt,$$

da cui per iterazione segue che $\omega_{\mu,\nu} \to 0$ per $\mu, \nu \to \infty$, uniformemente rispetto a t. Perciò anche

$$\lim_{\mu,\nu\to\infty} \iint_R |u_\mu - u_\nu|^s_{S(t)}\, d\alpha\, d\beta = 0 \qquad (^9)$$

uniformemente rispetto a t (almeno in un intorno dello zero).

Ora, ragionando come nel n. 3, 2), fermo restando il significato colà indicato per la funzione V, dalla formula di GREEN si ottiene

$$(30) \qquad u_n(P) = \frac{1}{4\pi\sqrt{A(P)}} \iiint_{D_y} \{ u_n \mathcal{M}[U - V] - (U - V)\, \mathcal{L}[u_n] \}\, dQ\,.$$

Di qui, in base alla prima delle (28) e alla (29), appoggiandoci alla diseguaglianza di SCHWARZ-HÖLDER e tenendo presente che $\mathcal{M}[U - V]$ è sommabile in D_y con una potenza di esponente $< 4/3$, si deduce che le $u_n(P)$ sono egualmente limitate in ogni dominio interno a D. Dopo di ciò, sempre in base alla (28) e per le considerazioni fatte nel n. 3, è subito visto che le u_n verificano una condizione di HÖLDER uniforme in tale dominio. Pertanto, per il teorema di scelta di ASCOLI, dalla successione $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ si potrà estrarre una sottosuccessione uniformemente convergente. Riferendoci a quest'ultima, detta u la funzione limite, dalla formula di media

$$u_n(P) = \frac{1}{4\pi c^4 \sqrt{A(P)}} \iiint_{\mathcal{D}_{P,c}} \left\{ \frac{(c^2-\varrho^2)^2}{\varrho^2} \left[u_n(Q) \left(\sum_{1}^{2}{}_{ij} \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial\xi_i \partial\xi_j} + a \right) - \mathcal{L}[u_n] \right] + \right.$$
$$- (c^4 - \varrho^4) u_n(Q) \left[\mathcal{M}\left[\frac{1}{\varrho^2}\right] - \frac{1}{\varrho^2}\left(a(Q) + \sum_{1}^{2}{}_{ij} \frac{\partial^2 a_{ij}(Q)}{\partial\xi_i \partial\xi_j} \right) \right] +$$
$$\left. + \frac{1}{2}\, u_n(Q) \varrho^2 \, \frac{\sum_{1}^{2}{}_{ij}\, \alpha_{ij}(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j)}{(y - \eta)^2} \right\} dQ\,,$$

---

(9) Abbiamo soppresso la funzione peso g perchè in $D - D(\bar{t})$, con $\bar{t}$ sufficientemente piccolo, la g si può sempre definire continua e maggiore di una costante positiva e soddisfacente le ipotesi del teorema di unicità, come si è dimostrato nella annotazione (6).

passando al limite per $n \to \infty$, si vede che u soddisfa la proprietà di media (6′). Inoltre, poichè

$$\lim_{n\to\infty} \iint_R |u - u_n|^s_{S(t)} \,d\alpha\, d\beta = 0 \quad \text{uniformemente rispetto a } t,$$

$$\lim_{n\to\infty} \iint_R |F - (u_n)_S|^s \,d\alpha\, d\beta = 0\,,$$

$$\lim_{t\to 0} \iint_R |(u_n)_{S(t)} - (u_n)_S|^s \,d\alpha\, d\beta = 0\,, \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

segue

$$\lim_{t\to 0} \iint_R |(u_n)_{S(t)} - F|^s \,d\alpha\, d\beta = 0\,.$$

Con ciò resta provata la prima parte del teorema di convergenza.

Supposto ora che f sia una funzione limitata, poichè dalla (30) si deduce

$$u(P) = \frac{1}{4\pi\sqrt{A(P)}} \iiint_{D_y} \{ u(Q)\, \mathcal{M}[U - V] - f(Q)(U - V) \}\, dQ\,,$$

le proposizioni 1) e 2) del n. 3 assicurano che la u è lipschitziana e dotata delle derivate $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ lipschitziane in x_1, x_2. Sarà allora lecito applicare la proposizione 2) del n. 1. Con ciò il teorema è completamente dimostrato.

5. – **Teorema di completezza.**

Siano p e q due numeri > 1. Denotiamo con Σ lo spazio delle coppie $\{ f(x_1, x_2, y), F(\alpha, \beta) \}$ con f di $\dfrac{p}{p-1}$-esima potenza sommabile in D ed F di $\dfrac{q}{q-1}$-esima potenza sommabile in R; sia $\Sigma_{\mathcal{L}}$ il sottospazio di Σ delle coppie $\{ \mathcal{L}[v],\ v(x_1(\alpha, \beta), x_2(\alpha, \beta)) \}$, dove v è una funzione continua in D insieme a $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}$, tale che $v = 0$ per $y = y_1$; sia Σ' lo spazio, duale di Σ, delle coppie $\{u(x_1, x_2, y),\ \Phi(\alpha, \beta)\}$ la prima di p-esima potenza sommabile in D e la seconda di q-esima potenza sommabile su R.

Vogliamo provare che $\Sigma_{\mathcal{L}}$ *è completo in* Σ. Cioè:

Un vettore $\{u, \Phi\}$ *di* Σ' *ortogonale a tutti i vettori di* $\Sigma_{\mathcal{L}}$, *ossia tale che riesca*

$$\iint_D u(P)\, \mathcal{L}[v(P)]\, dP + \iint_R v(\bar{x}_1(\alpha, \beta), \bar{x}_2(\alpha, \beta), \beta)\Phi(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = 0, \tag{31}$$

qualunque sia il vettore $\{\mathcal{L}[v], v\}$ di $\Sigma_{\mathcal{L}}$, è il vettore nullo, cioè u è quasi-dappertutto eguale a zero in D e Φ è quasi-dappertutto eguale a 0 in R.

Poniamo

$$(32)\qquad U^*(P, Q) = U(P, Q) + \int_\eta^y \iint_T \frac{U(P, Q_1)}{4\pi\sqrt{A(Q_1)}} \Bigg\{ \mathcal{L}[U(Q_1, Q)] +$$

$$+ \int_\eta^{\eta_1} \iint_T \frac{\mathcal{L}[U(Q_1, Q_2)]}{4\pi\sqrt{A(Q_2)}} \Bigg[\mathcal{L}[U(Q_2, Q)] + \int_\eta^{\eta_2} \iint_T \frac{\mathcal{L}[U(Q_2, Q_3)]\,\mathcal{L}[U(Q_3, Q)]}{4\pi\sqrt{A(Q_3)}} \mathrm{d}Q_3 \Bigg] \mathrm{d}Q_2 \Bigg\} \mathrm{d}Q_1,$$

da cui segue [10]

$$(33)\qquad \mathcal{L}[U^*(P, Q)] = \int_\eta^y \iint_T \mathcal{L}[U(P, Q_1)] \Bigg\{ \frac{1}{4\pi\sqrt{A(Q_1)}} \int_\eta^{\eta_1} \iint_T \mathcal{L}[U(Q_1, Q_2)] \cdot$$

$$\cdot \Bigg[\frac{1}{4\pi\sqrt{A(Q_2)}} \int_\eta^{\eta_2} \iint_T \frac{\mathcal{L}[U(Q_2, Q_3)]\,\mathcal{L}[U(Q_3, Q)]}{4\pi\sqrt{A(Q_3)}} \mathrm{d}Q_3 \Bigg] \mathrm{d}Q_2 \Bigg\} \mathrm{d}Q_1 .$$

---

(10) Dai risultati di DRESSEL (loc. cit. in (4), p. 197 e seguenti), secondo quanto si è ricordato nella annotazione (7), posto

$$V(P, Q) = U(P, Q) + \int_\eta^y \iint_T U(P, Q_1) \frac{f(Q_1, Q)}{4\pi\sqrt{A(Q_1)}} \mathrm{d}Q_1,$$

si ha

$$\mathcal{L}[V(P, Q)] = \mathcal{L}[U(P, Q)] - f(P, Q) + \int_\eta^y \iint_T \frac{\mathcal{L}[U(P, Q_1)]\, f(Q_1, Q)}{4\pi\sqrt{A(Q_1)}} \mathrm{d}Q_1$$

nell'ipotesi che f sia una funzione della classe A. Ora essendo

$$W(P, Q; \alpha, h) = \frac{1}{(y-\eta)^\alpha} \exp\left[-h \frac{\sum_1^2{}_i (x_i - \xi_i)^2}{4(y-\eta)} \right]$$

se $0 \leqslant \alpha, \beta < 2$ e h, l sono delle costanti positive, DRESSEL ha provato che

$$\int_\eta^y \iint_T W(P, Q_1; \alpha, h)\, W(Q_1, Q; \beta, l)\, \mathrm{d}Q_1 \leqslant K(\alpha, \beta, l, h)\, W(P, Q; \alpha + \beta - 2, p),$$

dove $4p = \min(h, l)$ e $K(\alpha, \beta, l, h)$ è una costante dipendente da α, β, h, l. In base a ciò si riconosce che la funzione tra $\{\ \}$ in (32) appartiene alla classe A onde segue la (33); di più, per le ipotesi di lipschitzianità dei coefficienti di $\mathcal{L}$ e delle loro derivate, la $\mathcal{L}[U^*]$ fornita da (33) risulta limitata.

Ciò posto, fissiamo un punto $Q(\xi_1, \xi_2, \eta)$ interno a D e poniamo

$$v_\mu = \left\{1 - \left[1 - \left(\frac{y-\eta}{y_2-y_1}\right)^4\right]^\mu\right\} U^*, \qquad (y_1 \leqslant \eta \leqslant y \leqslant y_2,\ \mu = 1, 2, \ldots). \tag{34}$$

Queste funzioni dànno luogo a vettori di $\Sigma_{\mathcal{E}}$ e si ha

$$\mathcal{E}[v_\mu] = \frac{4\mu}{(y_2-y_1)^4}(y-\eta)^3\left[1 - \left(\frac{y-\eta}{y_2-y_1}\right)^4\right]^{\mu-1} U^* + \left\{1 - \left[1 - \left(\frac{y-\eta}{y_2-y_1}\right)^4\right]^\mu\right\}\mathcal{E}[U^*],$$

onde

$$\begin{aligned}(35)\qquad &\lim_{\mu\to\infty}\iiint_{D_\eta} u(P)\frac{4\mu}{(y_2-y_1)^4}(y-\eta)^3\left[1 - \left(\frac{y-\eta}{y_2-y_1}\right)^4\right]^{\mu-1} U^*\,\mathrm{d}P + \\ &+ \lim_{\mu\to\infty}\iiint_{D_\eta} u(P)\left\{1 - \left[1 - \left(\frac{y-\eta}{y_2-y_1}\right)^4\right]^\mu\right\}\mathcal{E}[U^*]\,\mathrm{d}P + \\ &+ \lim_{\mu\to\infty}\iint_{R_\eta}\left\{1 - \left[1 - \left(\frac{\beta-\eta}{y_2-y_1}\right)^4\right]^\mu\right\} U_s^*\Phi(\alpha,\beta)\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta = 0,\end{aligned}$$

indicando con D_η il dominio prodotto di D per lo strato $\eta \leqslant y \leqslant y_2$ e con R_η il prodotto di R per la striscia $\eta \leqslant y \leqslant y_2$, e con U_s^* la funzione

$$U^*(\bar{x}_1(\alpha,\beta),\ \bar{x}_2(\alpha,\beta),\ \beta;\ \xi_1, \xi_2, \eta).$$

Osservando ora che, per $\mu \to \infty$, è $\mu\left[1 - \left(\frac{y-\eta}{y_2-y_1}\right)^4\right]^{\mu-1} \to 0$ uniformemente rispetto a y per $\eta + \varepsilon \leqslant y \leqslant y_2$, qualunque sia $\varepsilon > 0$, e tenendo presente la (33), si riconosce che nel secondo e terzo integrale della (35) è lecito senz'altro passare al limite sotto al segno di integrale, mentre per calcolare il primo limite basta, nell'espressione (32) di U^*, riferirsi al solo termine U; inoltre, posto $D_\eta = D_{\eta+\varepsilon} + \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2$ [essendo $\mathcal{J}_1$ l'insieme dei punti (x_1, x_2, y) per cui

$$\sum_{ij}^{2}{}_{1} A_{ij}(Q)(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j) = \sqrt{y-\eta}, \qquad (\eta \leqslant y \leqslant \eta + \varepsilon), \tag{36}$$

e $\mathcal{J}_2 = D_\eta - D_{\eta+\varepsilon} - \mathcal{J}_1$], basta esaminare il comportamento dell'integrale in oggetto solo in $\mathcal{J}_1$ e $\mathcal{J}_2$. Posto

$$M = 4\int_\eta^y (y-\eta)^3\,\mathrm{d}y \iint_{\sigma''(y)} u(P)\,U\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2,$$

ove $\sigma''(y)$ indica la sezione di $\mathcal{F}_2$ col piano caratteristico y, si ha

$$\lim_{y\to\eta} \frac{M}{(y-\eta)^4} = \lim_{y\to\eta} \iint\limits_{\sigma''(y)} u(P)\, U \,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = 0 \ ,$$

poichè

$$\left| \iint\limits_{\sigma''(y)} u(P)\, U\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \right| < \frac{1}{y-\eta}\, e^{-\frac{\gamma}{4\sqrt{y-\eta}}} \iint\limits_{\sigma''(y)} |u(P)|\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \ ,$$

dato che il rapporto

$$\frac{\sum_1^2{}_{ij}\, A_{ij}(P)(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j)}{\sum_1^2{}_{ij}\, A_{ij}(Q)(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j)} \ ,$$

si mantiene compreso tra due quantità positive; e quindi

$$\frac{4\mu}{(y_2-y_1)^4} \iiint\limits_{\mathcal{F}_2} (y-\eta)^3 \left[1-\left(\frac{y-\eta}{y_2-y_1}\right)^4\right]^{\mu-1} u(P)\, U\,\mathrm{d}P =$$

$$= \frac{\mu}{(y_2-y_1)^4} \int\limits_{\eta}^{\eta+\varepsilon} \left[1-\left(\frac{y-\eta}{y_2-y_1}\right)^4\right]^{\mu-1} \frac{\partial M}{\partial y}\,\mathrm{d}y \underset{\mu\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ .$$

Posto poi

$$N = 4 \int\limits_{\eta}^{y} (y-\eta)^3\,\mathrm{d}y \iint\limits_{\sigma'(y)} u(P)\, U\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \ ,$$

indicando ora con $\sigma'(y)$ la sezione di $\mathcal{F}_1$ col piano caratteristico di quota y, si ha

$$\lim_{y\to\eta} \frac{N}{(y-\eta)^4} = \lim_{y\to\eta} \iint\limits_{\sigma'(y)} u(P)\, U\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = u(Q) \lim_{y\to\eta} \iint\limits_{\sigma'(y)} U\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \ ,$$

escludendo al più i punti Q di un insieme di misura nulla.

Dalla (36), essendo

$$x_1 = \xi_1 + \tau(m\cos\omega\cos\varphi + n \operatorname{sen}\omega \operatorname{sen}\varphi)\ ,$$
$$x_2 = \xi_2 + \tau(m \operatorname{sen}\omega\cos\varphi - n\cos\omega\operatorname{sen}\varphi)\ , \qquad (0 \leqslant \tau \leqslant \sqrt[4]{y-\eta}),$$

dove m, n, ω hanno lo stesso significato già specificato all'inizio col solo mutamento di P in Q, si ha

$$\lim_{y\to\eta}\iint_{\sigma'(y)} U\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = mn\lim_{y\to\eta}\int_0^{\sqrt[4]{y-\eta}}\int_0^{2\pi}\frac{1}{y-\eta}\,e^{-\frac{\tau^2}{4(y-\eta)}}\tau\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\varphi = 4mn\pi = 4\pi\sqrt{A(Q)}\,,$$

poichè

$$\lim_{y\to\eta}\int_{\sigma'(y)}\frac{1}{y-\eta}\left\{\exp\frac{-\sum_{1}^{2}{}_{ij}A_{ij}(P)(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j)}{4(y-\eta)} - \exp\frac{-\sum_{1}^{2}{}_{ij}A_{ij}(Q)(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j)}{4(y-\eta)}\right\}\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = 0\,.$$

Segue

$$\lim_{\mu\to\infty}\frac{4\mu}{(y_2-y_1)^4}\iiint_{\mathcal{J}_1}(y-\eta)^3\left[1-\left(\frac{y-\eta}{y_2-y_1}\right)^4\right]^{\mu-1}u(P)\,U^*\,\mathrm{d}P =$$

$$= \lim_{\mu\to\infty}\frac{\mu}{(y_2-y_1)^4}\int_\eta^{\eta+\varepsilon}\left[1-\left(\frac{y-\eta}{y_2-y_1}\right)^4\right]^{\mu-1}\frac{\partial N}{\partial y}\,\mathrm{d}y = 4\pi\sqrt{A(Q)}\,u(Q),$$

come si riconosce integrando per parti, tenendo presente che $\lim_{y\to\eta}\dfrac{N}{(y-\eta)^4} = 4\pi\sqrt{A(Q)}\,u(Q)$ e nuovamente integrando per parti.

Pertanto in quasi-tutti i punti Q di D si ha

$$u(Q) = -\frac{1}{4\pi\sqrt{A(Q)}}\left[\iiint_{D_\eta}u(P)\mathcal{L}[U^*]\,\mathrm{d}P + \iint_{R_\eta}\Phi(\alpha,\beta)\,U_s^*\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta\right]. \tag{37}$$

Sia ora $V^*(P, Q)$ una funzione regolare soddisfacente le condizioni

$$V^* = 0 \qquad \text{per} \quad \eta \leqslant y\,,$$
$$V_s^* = U_s^* \qquad \text{qualunque sia } \eta\,;$$

per la (31) si ha

$$0 = -\frac{1}{4\pi\sqrt{A(Q)}}\left[\iiint_{D_\eta}u(P)\mathcal{L}[V^*]\,\mathrm{d}P + \iint_{R_\eta}\Phi(\alpha,\beta)\,V^*\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta\right]$$

che sottratta dalla (37) fornisce

$$u(Q) = -\frac{1}{4\pi\sqrt{A(Q)}}\iiint_{D_\eta} u(P)\mathcal{L}[U^* - V^*]\,dP\,, \tag{38}$$

da cui segue, in base a quanto si è detto nel n. 3, che u possiede quell'ordine di regolarità che compete alle soluzioni generalizzate.

Mostriamo ora che, in conseguenza della (31), la u verifica quasi-dappertutto in D una proprietà di media caratteristica per le soluzioni generalizzate dell'equazione $\mathcal{M}[u] = 0$ (ciò potrebbe dedursi anche direttamente dalla (38)). Allo scopo, in luogo della successione (34), si consideri la nuova successione

$$v_\nu = \begin{cases} \left\{1-\left[1-\left(\dfrac{y-\eta}{c^2}\right)^4\right]^\mu\right\}\displaystyle\int_\varrho^c \left[1-\left(\frac{2\varrho^2}{c^2}-1\right)^{2\nu}\right]^3 \frac{d\varrho}{\varrho^3} & \text{per} \quad P \subset \mathcal{D}'_{Q,c}\,, \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases} \tag{34'}$$

essendo $\mu = \dfrac{50}{3A(Q)}(2\nu+1)(2\nu+2)(2\nu+3)(2\nu+4)$, $(\nu = 1, 2, \ldots)$; $\mathcal{D}'_{Q,c}$ è il dominio relativo a Q come quello introdotto all'inizio salvo che ora Q si ritiene fisso e P variabile; $\dfrac{1}{\varrho^2} = \dfrac{1}{y-\eta}\exp\left[-\dfrac{\sum_{ij}^{2} A_{ij}(Q)(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j)}{4(y-\eta)}\right]$, e c è un numero positivo abbastanza piccolo perchè $\mathcal{D}'_{Q,c}$ sia tutto contenuto in D.

Tenendo presente che le (34′) dànno luogo a vettori dello spazio $\Sigma_{\mathcal{L}}$, dalla (31) si deduce

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\iiint_{\mathcal{D}'_{Q,c}} u(P)\mathcal{L}\left[\frac{1}{\varrho^2}-\frac{1}{c^2}\right]dP - \lim_{\nu\to\infty}\frac{4\mu}{c^8}\iiint_{\mathcal{D}'_{Q,c}} u(P)\left[1-\left(\frac{y-\eta}{c^2}\right)^4\right]^{\mu-1}(y-\eta)^3\,\cdot \\
&\cdot\int_\varrho^c\left[1-\left(\frac{2\varrho^2}{c^2}-1\right)^{2\nu}\right]^3\frac{d\varrho}{\varrho^3} + \lim_{\nu\to\infty}\frac{6\nu}{c^2}\iiint_{\mathcal{D}'_{Q,c}} u(P)\left\{1-\left[1-\left(\frac{y-\eta}{c^2}\right)^4\right]^\mu\right\}\cdot \\
&\cdot\left(\frac{2\varrho^2}{c^2}-1\right)^{2\nu-1}\left[1-\left(\frac{2\varrho^2}{c^2}-1\right)^{2\nu}\right]^2\frac{\sum_{ij}^{2}\alpha_{ij}(Q,P)(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j)}{4(y-\eta)^2}\,dP = 0\,.
\end{aligned} \tag{35'}$$

Con ragionamenti analoghi a quelli già fatti si riconosce che il primo dei limiti scritti è zero. Il secondo coincide con

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{2\nu}{c^2}\iiint\limits_{\mathcal{D}'_{Q,c}} u(P)\left\{1-\left[1-\left(\frac{y-\eta}{c^2}\right)^4\right]^\mu\right\}\left(\frac{2\varrho^2}{c^2}-1\right)^{2\nu-1}\frac{\sum_{ij}^{2}{}_1\,\alpha_{ij}(Q,P)(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j)}{4(y-\eta)^2}\,\mathrm{d}P=$$

$$=\lim_{\nu\to\infty}\frac{16mn\nu}{c^2}\int_0^c\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}u(P)\left[1-\left(1-\frac{\varrho^8\,\mathrm{sen}^8\,\theta}{c^8}\right)^\mu\right]\left(\frac{2\varrho^2}{c^2}-1\right)^{2\nu-1}\Psi\varrho\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,,$$

dove il significato di Ψ è deducibile dal cambiamento di coordinate.

Poichè $\nu\left(\dfrac{2\varrho^2}{c^2}-1\right)^{2\nu-1}$ converge a zero per $\mu\to\infty$, uniformemente rispetto a ϱ, per $0<\varepsilon\leqslant\varrho\leqslant c-\varepsilon$, è sufficiente calcolare i due limiti che dal precedente si deducono prendendo una volta $\mathcal{D}'_{Q,\varepsilon}$ e una seconda volta $\mathcal{D}'_{Q,c}-\mathcal{D}'_{Q,c-\varepsilon}$ al posto di $\mathcal{D}'_{Q,c}$. Procedendo in modo del tutto simile a quanto si è fatto precedentemente, posto

$$M=\int_0^\varrho\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}u(P)\left[1-\left(1-\frac{\varrho^8\,\mathrm{sen}^8\,\theta}{c^8}\right)^\mu\right]\Psi\varrho\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,,$$

$$N=\int_\varrho^c\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}u(P)\left[1-\left(1-\frac{\varrho^8\,\mathrm{sen}^8\,\theta}{c^8}\right)^\mu\right]\Psi\varrho\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,,$$

riesce

$$\lim_{\varrho\to0}\frac{M}{\varrho^{10}}=u(Q)\mu\frac{\pi m^2n^2}{250c^8}\,,$$

$$\lim_{\varrho\to c}\frac{N}{c^2-\varrho^2}=-\frac{1}{8mn}\iint\limits_{\mathcal{S}'_{Q,c}}u\left(\sum_{1}^{2}{}_i\,a_{1i}\,\frac{\partial(1/\varrho^2)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}y+\sum_{1}^{2}{}_i\,a_{2i}\,\frac{\partial(1/\varrho^2)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x_1\right),$$

da cui, operando certe integrazioni per parti, si arriva a concludere che, almeno per Q quasi-dappertutto in D, è

$$u(Q)=\frac{1}{4\pi\sqrt{A(Q)}}\left\{\iiint\limits_{\mathcal{D}'_{Q,c}}u(P)\mathcal{L}\left[\frac{1}{\varrho^2}-\frac{1}{c^2}\right]\mathrm{d}P-\right.$$

$$\left.-\iint\limits_{\mathcal{S}'_{Q,c}}u(P)\left(\sum_{1}^{2}{}_i\,a_{1i}(P)\,\frac{\partial(1/\varrho^2)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}y+\sum_{1}^{2}{}_i\,a_{2i}(P)\,\frac{\partial(1/\varrho^2)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x_1\right)\right\}.$$

Ora questa formola, analoga alla (6), esprime la proprietà di media caratteristica per le soluzioni generalizzate di $\mathcal{M}[u] = 0$.

Pertanto $u(Q)$ differisce al più nei punti di un insieme di misura nulla da una soluzione generalizzata di $\mathcal{M}[u] = 0$.

Esaminiamo ora il comportamento di u su S. A questo scopo riprendiamo la formola (37); da questa si deduce subito che $u(Q) \to 0$ se Q tende a un punto interno di σ_2 (porzione della FD appartenente al piano caratteristico $y = y_2$).

Dopo di ciò, prendendo Q esterno a D e ragionando tal quale come nella prima parte del presente numero, si ha

$$0 = \iint_{D_\eta} u(P)\mathcal{L}[U^*]\,\mathrm{d}P + \iint_{R_\eta} \Phi(\alpha, \beta)U_s^*\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta\,.$$

Pertanto se con Q_+ e Q_- si intendono due punti l'uno sulla normale interna e l'altro sulla normale esterna alla curva intersezione di S col piano caratteristico $y = \eta$, e a distanza τ da questa, si ha

$$u(Q_+) = -\frac{1}{4\pi\sqrt{A(Q_+)}}\left\{\iiint_{D_\eta} u(P)\mathcal{L}[U^*(P, Q_+) - U^*(P, Q_-)]\,\mathrm{d}P + \right.$$
$$\left. + \iint_{R_\eta} \Phi(\alpha, \beta)[U^*(P, Q_+) - U^*(P, Q_-)]_s\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta\right\}.$$

Per quanto si è detto su $\mathcal{L}[U^*]$, l'integrale triplo si mantiene limitato e converge a zero per $\tau \to 0$; per le ipotesi fatte nel n. 2 sulla superficie S, lo stesso si può dire dell'integrale doppio. Pertanto si ha

$$\lim_{\tau\to 0}\iint_R |u(Q)|_{S(\tau)}^p\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta = 0\,,$$

dove $S(\tau)$ ha il significato precisato nel n. 2, annotazione (6), essendo lecito applicare il teorema di LEBESGUE sul passaggio al limite sotto al segno di integrale. Perciò, per il teorema di unicità del n. 2 (relativo al problema aggiunto omogeneo) e tenendo presente che la u considerata all'inizio coincide quasi-dappertutto con la u qui considerata, si può concludere che u è quasi-dappertutto eguale a zero in D.

Segue infine da

$$\iint_R v(\bar{x}_1(\alpha, \beta), \bar{x}_2(\alpha, \beta), \beta)\Phi(\alpha, \beta)\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta = 0\,,$$

qualunque sia la funzione continua v, che $\Phi = 0$ quasi-dappertutto in R.

Con ciò il teorema di completezza è provato.
Segue senza difficoltà il seguente teorema di esistenza.

6. – Teorema di esistenza.

Se in $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$, $(x_1, x_2) \subset T$, *le funzioni* a, $\dfrac{\partial a_{ij}}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_h \partial x_k}$ *sono lipschitziane ed* f *è misurabile e limitata, data una funzione* $F(\alpha, \beta)$ *sommabile in* R *con una potenza di esponente* > 1, *esiste una (ed una sola) funzione* $u(x_1, x_2, y)$ *che in* $D - \mathbf{F}D$ *è soluzione generalizzata di* $\mathcal{E}[u] = f$, *che si annulla per* $y = y_1$ *e converge in media ad* F *su* S *rispetto alla famiglia* $S(t)$.

Infatti il teorema di completezza assicura che lo spazio funzionale $\Sigma_{\mathcal{E}}$ è completo in Σ, cioè coincide con Σ lo spazio $\Sigma^*_{\mathcal{E}}$ ottenuto aggregando a $\Sigma_{\mathcal{E}}$ i vettori limiti (secondo la metrica relativa allo spazio Σ che resta determinata prendendo

$$\| f(x_1, x_2, y), F(\alpha, \beta) \| = \Big(\iiint_D |f(P)|^{\frac{p}{p-1}} \mathrm{d}P \Big)^{\frac{p-1}{p}} + \Big(\iint_R |F(\alpha, \beta)|^{\frac{q}{q-1}} \mathrm{d}\alpha\, \mathrm{d}\beta \Big)^{\frac{q-1}{q}},$$

come norma di $\{f, F\}$). Dunque, date le funzioni f ed F, soddisfacenti le condizioni dichiarate, è sempre possibile determinare una successione di funzioni $u_n(x_1, x_2, y)$ nulle per $y = y_1$ e dotate delle derivate $\dfrac{\partial u_n}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial^2 u_n}{\partial x_i \partial x_j}$ continue in D, per le quali sia

$$\lim_{n\to\infty} \iiint_D |f - \mathcal{E}[u_n]|^{\frac{p}{p-1}} \mathrm{d}P = 0 , \qquad \lim_{n\to\infty} \iint_R |F - (u_n)_S|^{\frac{q}{q-1}} \mathrm{d}\alpha\, \mathrm{d}\beta = 0 , \tag{39}$$

per un certo $p > 1$ e un certo $q > 1$. Perciò il teorema di esistenza è senz'altro assicurato dal teorema di convergenza qualora sia soddisfatta l'ulteriore condizione (29). Ma questa si può senz'altro supporre verificata perchè, in caso contrario, dalla successione $u_n(x_1, x_2, y)$, $(n = 1, 2, \ldots)$, si potrebbe estrarre una sottosuccessione $u_{\nu_n}(x_1, x_2, y)$, $(n = 1, 2, \ldots)$, per cui

$$\lim_{n\to\infty} \iiint_D |u_{\nu_n}|^m \mathrm{d}P = +\infty .$$

Allora, posto $v_n = \dfrac{u_{r_n}}{\left(\iiint\limits_D |u_{r_n}|^m \, dP\right)^{1/m}}$, si avrebbe

$$(40) \qquad \iiint\limits_D |v_n|^m dP = 1 \, , \qquad \lim_{n\to\infty} \iiint\limits_D |\mathcal{L}[v_n]|^{\frac{p}{p-1}} dP = 0 \, ,$$
$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_R |(v_n)_S|^{\frac{q}{q-1}} \, d\alpha d\beta = 0 \, .$$

Quindi per il teorema del n. 4 la successione v_n, $(n = 1, 2, \ldots)$, o per lo meno una sua sottosuccessione, convergerebbe a una soluzione di $\mathcal{L}[u] = 0$ la quale poi, convergendo in media a zero su S, dovrebbe essere identicamente nulla in base al teorema di unicità, il che contraddice la prima delle (40).

7. – Cenno sul problema ordinario.

Vogliamo ora brevemente indicare come i ragionamenti svolti possano adattarsi a trattare il problema ordinario (11) della ricerca di una funzione $u(x_1, x_2, y)$ continua con le derivate $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, tale che $\mathcal{L}[u] = f$ in $D - \mathrm{F}D$, $u = \begin{cases} 0 & \text{su } \sigma_1 \, , \\ F(\alpha, \beta) & \text{su } S \, , \end{cases}$ nell'ipotesi che F sia una funzione continua ed f lipschitziana.

Nel lavoro citato in (1) è stato fatto quanto si è ora detto per l'equazione $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \alpha(x, y) u = f(x, y)$; però nel provare un teorema di convergenza ci si è fondati sulla conoscenza della soluzione fondamentale per l'equazione completa. Ciò può essere evitato mediante una scelta diversa da quella colà fatta degli spazi funzionali relativi al teorema di completezza; il che è possibile per la sostituzione di U^* e U, essendo $\mathcal{L}[U^*]$ limitata. Precisamente indichiamo ora con Σ lo spazio delle coppie $\{f, F\}$ con F continua in R ed f misu-

(11) Recentemente C. CILIBERTO, *Sul problema di Holmgren-Levi per l'equazione del calore*, Giorn. Mat. Battaglini (4) **80**, 1-13 (1950-51), ha trattato il problema ordinario per l'equazione del calore $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ coi metodi dell'Analisi funzionale, prendendo a modello i ragionamenti di cui si è valso C. MIRANDA per la trattazione del problema di DIRICHLET per le funzioni armoniche e del problema fondamentale per le funzioni biarmoniche.

rabile in D e, a prescindere dai punti di un insieme di misura nulla, limitata; con $\Sigma_{\mathcal{L}}$ lo spazio delle coppie $\{\mathcal{L}[v], v_S\}$ con v funzione dotata delle derivate $\frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}$ lipschitziane; con Σ' il duale di Σ, cioè lo spazio delle coppie $\{u, \Phi\}$ con u sommabile e Φ funzione additiva a variazione limitata d'insieme misurabile.

Procedendo in modo simile a quello tenuto qui, si può mostrare la completezza di $\Sigma_{\mathcal{L}}$ in Σ (dopo aver spinta oltre l'analisi svolta nel n. 3) e quindi l'esistenza di una successione di funzioni $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ come quelle di $\Sigma_{\mathcal{L}}$ per cui

$$v_n = 0 \quad \text{su} \quad \sigma_1 ; \qquad \lim_{n\to\infty} \operatorname{extr\,sup}_D |f - \mathcal{L}[v_n]| = 0 ; \qquad \lim_{n\to\infty} \max_S |F - v_n| = 0$$

(dove la notazione $\operatorname{extr\,sup} |\psi|$ sta ad indicare lo pseudo estremo superiore, cioè l'estremo inferiore dei valori di M per cui si ha, quasi-dappertutto in D, $|\psi| \leq M$).

Dopo di ciò le formole di maggiorazione di M. PICONE [12] conducono subito al teorema di esistenza.

---

[12] M. PICONE, *Maggiorazione degli integrali delle equazioni totalmente paraboliche alle derivate parziali del secondo ordine*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 7, 145-192 (1930).