Luigi Tanzi Cattabianchi (*)

Una classe di equazioni alle derivate parziali generalizzanti l'equazione di Bessel, e risoluzione in un caso particolare notevole. (**)

Introduzione.

L'equazione differenziale di Bessel si può porre, come è noto, sotto la forma

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+2n\frac{dy}{dx}+xy=0\,,$$

dove n è una data costante. Per ciò che segue mi riferisco all'equazione più generale

$$(1_1)\qquad x\frac{d^2y}{dx^2}+2n\frac{dy}{dx}-a^2xy=0\,,$$

dove a è una costante: per $a=i$ si ottiene la precedente equazione di Bessel. Nel caso in cui la costante n sia un intero positivo, è stato indicato per l'equazione (1_1) un interessante procedimento diretto di risoluzione [1].

In questa Nota stabilisco una generalizzazione dell'equazione di Bessel (1_1) e mi occupo della sua risoluzione in un caso particolare notevole.

Tale generalizzazione è data dalla seguente classe di equazioni alle derivate parziali, lineari, del secondo ordine, nella funzione incognita $z=z(x_1, x_2, \ldots, x_m)$,

$$(1_m)\qquad (x_1+x_2+\ldots+x_m)\mathcal{D}^2z+2mn\mathcal{D}z-a^2(x_1+x_2+\ldots+x_m)z=0\,,$$

$$(m=1, 2, 3, \ldots)\,,$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma (Italia).

(**) Lavoro eseguito nell'Istituto di Matematica della Università di Parma e ricevuto il 14-VI-1952.

(1) A. Mambriani, *Genesi ed integrazione in termini finiti di vaste classi d'equazioni differenziali lineari, aventi per coefficienti delle funzioni razionali intere*, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) **9**, 27-43 (1940); in particolare pp. 27-29.

dove è

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m} . \tag{2}$$

È manifesto che per $m = 1$ si ottiene l'equazione (1_1), salvo il cambiamento materiale di x_1 con x e di z con y.

Ho potuto stabilire che a tutte le equazioni (1_m), sempre *nel caso particolare notevole in cui la costante n sia un intero positivo*, è applicabile il nominato procedimento diretto di risoluzione di (1_1), naturalmente con opportune e non sempre immediate estensioni. Seguendo tale procedimento generalizzato, le equazioni (1_m) si possono porre sotto la forma (n. 3):

$$(\mathcal{D}^2 - a^2)^n\{(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)(\mathcal{D}^2 - a^2)^{1-n}z\} = 0 , \tag{1_m}$$

$$(m = 1, 2, 3, \ldots) ,$$

da cui segue immediatamente (n. 4), invertendo i vari operatori che nel primo membro sono applicati alla z, la *formula risolutiva*

$$\boxed{z = (\mathcal{D}^2 - a^2)^{n-1} \frac{(\mathcal{D}^2 - a^2)^{-n}0}{x_1 + x_2 + \ldots + x_m} , \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)} . \tag{3_m}$$

Di questa formula risolutiva si dànno poi (nn. 8-12) *successive trasformazioni in modo da far sparire gradualmente gli operatori integrali e differenziali in essa indicati*. A ciò si perviene dopo aver effettuato, in base a recenti risultati [2], una conveniente decomposizione dell'operatore $\mathcal{D}^2 - a^2$ e delle sue potenze ad esponente intero (§ 2).

1) Dapprima si ottiene (n. 8):

$$z = (\mathcal{D}^2 - a^2)^{n-1} \frac{\varphi(x_1 - x_2, x_1 - x_3, \ldots, x_1 - x_m)e^{ax_1} + \psi(x_1 - x_2, x_1 - x_3, \ldots, x_1 - x_m)e^{-ax_1}}{x_1 + x_2 + \ldots + x_m} , \tag{$3'_m$}$$

dove $\varphi(x_1 - x_2, x_1 - x_3, \ldots, x_1 - x_m)$ e $\psi(x_1 - x_2, x_1 - x_3, \ldots, x_1 - x_m)$ sono funzioni arbitrarie (con derivate prime e seconde) dei loro argomenti.

---

[2] B. MANFREDI, *Decomposizione in prodotto di operazioni elementari delle espressioni alle derivate parziali, del primo ordine e totalmente lineari*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) **4**, 381-390 (1949).

2) Poi, dalla $(3'_m)$ si ha (n. 10):

$$(3''_m) \quad z = \left\{ \begin{matrix} x_2 & \dots & x_m \\ x_1 - x_2 & \dots & x_1 - x_m \end{matrix} \right\} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - a^2 \right)^{n-1} \frac{\varphi(x_2, \dots, x_m) e^{a x_1} + \psi(x_2, \dots, x_m) e^{-a x_1}}{m x_1 - x_2 - \dots - x_m},$$

dove il simbolo (3) $\left\{ \begin{matrix} x_2 & \dots & x_m \\ x_1 - x_2 & \dots & x_1 - x_m \end{matrix} \right\}$ indica l'operazione di sostituzione delle variabili $x_2, \dots, x_m$ ordinatamente con le differenze $x_1 - x_2, \dots, x_1 - x_m$, e le funzioni $\varphi(x_2, \dots, x_m)$ e $\psi(x_2, \dots, x_m)$ sono arbitrarie (con derivate prime e seconde).

3) Indi, dalla $(3''_m)$ segue (n. 11):

$$(3'''_m) \quad z = \left\{ \begin{matrix} x_2 & \dots & x_m \\ x_1 - x_2 & \dots & x_1 - x_m \end{matrix} \right\} \left[\Phi(x_2, \dots, x_m) e^{a x_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + 2a \right)^{n-1} \frac{1}{(m x_1 - x_2 - \dots - x_m)^n} + \right.$$
$$\left. + \Psi(x_2, \dots, x_m) e^{-a x_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - 2a \right)^{n-1} \frac{1}{(m x_1 - x_2 - \dots - x_m)^n} \right],$$

dove $\Phi(x_2, \dots, x_m)$ e $\Psi(x_2, \dots, x_m)$ sono funzioni arbitrarie (con derivate prime e seconde).

4) Si ha infine (n. 12):

$$(3^{\mathrm{IV}}_m) \quad z = \left\{ \begin{matrix} x_2 & \dots & x_m \\ x_1 - x_2 & \dots & x_1 - x_m \end{matrix} \right\} \left[\Phi(x_2, \dots, x_m) \frac{e^{a x_1}}{(n-1)!} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \binom{n-1}{r} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{(n+r-1)!\, m^r (2a)^{n-r-1}}{(m x_1 - x_2 - \dots - x_m)^{n+r}} + \Psi(x_2, \dots, x_m) \frac{e^{-a x_1}}{(n-1)!} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \binom{n-1}{r} \frac{(n+r-1)!\, m^r (-2a)^{n-r-1}}{(m x_1 - x_2 - \dots - x_m)^{n+r}} \right].$$

Ed ora un'osservazione. L'equazione (1_m) è simmetrica rispetto alle variabili indipendenti $x_1, x_2, \dots, x_m$ e tale è pure la formula risolutiva (3_m). Le formule risolutive trasformate $(3'_m)$, $(3''_m)$, ..., (3^{IV}_m) hanno però perduta tale simmetria: si vede che in esse la prima variabile x_1 ha un ufficio particolare che non hanno le altre. Per la detta simmetria dell'equazione di partenza si conclude quindi che ciascuna delle formule $(3'_m)$, $(3''_m)$, ..., (3^{IV}_m) può essere scritta in altri $m-1$ modi equivalenti, ottenuti semplicemente assegnando ad una qualsiasi delle variabili $x_2, \dots, x_m$ l'ufficio che, in dette formule, ha la prima variabile x_1.

---

(3) Loc. cit. in (2).

Per semplicità di scrittura, nel seguito sviluppo il procedimento risolutivo della (1_m) nel caso $m = 2$, dato che per $m = 3, 4, \ldots$ tale procedimento è lo stesso.

§ 1. – Trasformazione dell'equazione e sua risoluzione.

1. – Considero dunque [1] il caso particolare dell'equazione (1_m) ottenuto facendo $m = 2$, cioè l'equazione

$$(1_2) \qquad (x + y)(D_x + D_y)^2 z + 4n(D_x + D_y)z - a^2(x + y)z = 0 ,$$

dove, unicamente per comodità, ho sostituito, rispettivamente, x_1 e x_2 con x e y, $\dfrac{\partial}{\partial x_1}$ e $\dfrac{\partial}{\partial x_2}$ con D_x e D_y.

Scrivo subito la (1_2), nella quale il primo membro ha una *forma trinomia*, nel modo seguente

$$(4) \qquad (x + y)[(D_x + D_y)^2 - a^2]z + 4n(D_x + D_y)z = 0 ,$$

dove ora il primo membro ha una *forma binomia* che va attentamente esaminata Nel primo termine di questo primo membro è posto in evidenza l'operatore

$$(5) \qquad \mathfrak{D} = (D_x + D_y)^2 - a^2$$

che vedremo avere un ufficio essenziale nel seguito. Nel secondo termine figura invece l'operatore

$$(6) \qquad 4n(D_x + D_y)$$

che si può mostrare essere legato strettamente al precedente $\mathfrak{D}$: invero, la potenza

$$\mathfrak{D}^n = [(D_x + D_y)^2 - a^2]^n$$

[1] In conformità a quanto è detto nelle ultime righe dell'Introduzione.

ha le derivate parziali rispetto a D_x e a D_y eguali fra loro e date da

$$2n(D_x + D_y)\mathfrak{D}^{n-1};$$

pertanto la somma di tali derivate è

$$4n(D_x + D_y)\mathfrak{D}^{n-1},$$

dove il moltiplicatore di $\mathfrak{D}^{n-1}$ è proprio l'operatore (6).

2. – Le affermazioni del n. precedente sull'equazione (4) suggeriscono l'idea di porre

$$z = \mathfrak{D}^{n-1}Z, \tag{7}$$

con $Z = Z(x, y)$ nuova funzione incognita: fatta tale posizione la (4) diventa

$$(x + y)\mathfrak{D}^n Z + 4n(D_x + D_y)\mathfrak{D}^{n-1}Z = 0. \tag{4'}$$

Provo ora che *l'equazione* (4') *si può scrivere semplicemente e concisamente così*:

$$\mathfrak{D}^n\{(x + y)Z\} = 0. \tag{4''}$$

A tale scopo applico una importante generalizzazione di una nota formula di D'ALEMBERT [5], generalizzazione che, nel caso di due sole variabili indipendenti x e y, è la seguente:

$$\mathfrak{L}\{f(x, y)\cdot\varphi(x, y)\} = \sum_{r=0}^{p}\sum_{s=0}^{q}\frac{f^{(r,s)}(x, y)}{r!\,s!}\,\mathfrak{L}^{(r,s)}\varphi(x, y), \tag{8}$$

---

[5] Tale formula di D'ALEMBERT è la seguente:

$$L(f\varphi) = \sum_{r=0}^{p}\frac{f^{(r)}}{r!}L^{(r)}\varphi,$$

dove è

$$f = f(x), \quad \varphi = \varphi(x), \quad L = \sum_{h=0}^{p}a_h(x)D^h, \quad f^{(r)} = \frac{d^r}{dx^r}f, \quad L^{(r)} = \frac{d^r}{dD^r}L.$$

dove si è posto:

$$\mathfrak{L} = \sum_{h=0}^{p} \sum_{k=0}^{q} a_{h,k}(x, y) D_x^h D_y^k ,$$

$$f^{(r,s)}(x, y) = \frac{\partial^{r+s}}{\partial x^r \partial y^s} f(x, y) , \qquad \mathfrak{L}^{(r,s)} = \frac{\partial^{r+s}}{\partial D_x^r \partial D_y^s} \mathfrak{L} .$$

La (8) non muta di forma passando ad un numero finito qualsiasi di variabili indipendenti $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

La detta applicazione della formula (8) all'equazione (4′) va fatta ponendo:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{D}^n , \qquad f(x, y) = x + y , \qquad \varphi(x, y) = Z ,$$

da cui

$$\mathfrak{L}^{(1,0)} = \mathfrak{L}^{(0,1)} = 2n(D_x + D_y)\mathfrak{D}^{n-1} , \qquad f^{(1,0)}(x, y) = f^{(0,1)}(x, y) = 1 .$$

Si vede allora subito che il primo membro della (8) viene a coincidere col primo membro della (4″), mentre il secondo membro della (8) diventa esattamente il primo membro della (4′).

3. – Sostituendo ora nella (4″) a Z l'espressione che si ricava dalla (7), ossia

$$Z = \mathfrak{D}^{1-n} z ,$$

si conclude infine che *l'equazione di partenza* (1$_2$) *si può scrivere nel modo seguente*:

$$(1_2') \qquad \mathfrak{D}^n\{(x + y)\mathfrak{D}^{1-n} z\} = 0 ,$$

o più estesamente, sostituendo a $\mathfrak{D}$ *la sua espressione* (5),

$$[(D_x + D_y)^2 - a^2]^n\{(x + y)[(D_x + D_y)^2 - a^2]^{1-n} z\} = 0 .$$

Si è così finalmente pervenuti a dare al primo membro dell'equazione da risolvere una elegante forma monomia assai comoda per la risoluzione dell'equazione stessa.

4. – *Dalla* ($1_2'$) *appare naturale la via da seguire per ottenere in tutta la sua generalità la funzione incognita* $z = z(x, y)$: basta invertire i successivi operatori che nel primo membro sono applicati alla z. Eseguendo la prima inversione [che è evidentemente quella che nella ($1_2'$) figura indicata come ultima sulla z], si ottiene

$$(x+y)\mathfrak{D}^{1-n}z = \mathfrak{D}^{-n}0\,,$$

da cui

$$\mathfrak{D}^{1-n}z = \frac{\mathfrak{D}^{-n}\,0}{x+y}\,.$$

Di qui si ha infine per la (1_2) la seguente *formula risolutiva*:

$$(3_2)\qquad \boxed{z = \mathfrak{D}^{n-1}\frac{\mathfrak{D}^{-n}0}{x+y}}\,,$$

ossia più estesamente, sostituendo a $\mathfrak{D}$ la sua espressione (5),

$$z = [(\mathrm{D}_x + \mathrm{D}_y)^2 - a^2]^{n-1}\frac{[(\mathrm{D}_x + \mathrm{D}_y)^2 - a^2]^{-n}0}{x+y}$$

[caso particolare della (3_m) indicata nell'Introduzione].

Tutte le operazioni integrali e differenziali figuranti in questa formula si possono eseguire elegantemente, come viene indicato nel § 3: in tale paragrafo, precisamente, sono date per il primo membro della (3_2) successive trasformazioni, nelle quali i detti operatori integrali e differenziali spariscono gradualmente.

Per rendere possibili le deduzioni del nominato § 3 sono premesse, e ciò costituisce l'argomento del § 2, alcune interessanti decomposizioni degli operatori

$$\mathfrak{D}^{\nu}, \qquad (\nu = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots)\,.$$

§ 2. – Decomposizioni dell'operatore $\mathfrak{D}$ e delle sue potenze ad esponente intero.

5. – Osservo subito che vale la decomposizione

$$\mathfrak{D} \equiv (\mathrm{D}_x + \mathrm{D}_y)^2 - a^2 = (\mathrm{D}_x + \mathrm{D}_y - a)(\mathrm{D}_x + \mathrm{D}_y + a)\,,$$

dove ciascuno dei due ultimi fattori si può nuovamente decomporre. Si ha infatti [6]:

$$D_x + D_y - a = \underline{\left\{\begin{matrix} y \\ x-y \end{matrix}\right\} e^{ax} D_x \, e^{-ax} \left\{\begin{matrix} y \\ x-y \end{matrix}\right\}},$$

$$D_x + D_y + a = \underline{\left\{\begin{matrix} y \\ x-y \end{matrix}\right\} e^{-ax} D_x \, e^{ax} \left\{\begin{matrix} y \\ x-y \end{matrix}\right\}}$$

(la sottolineatura serve, tra l'altro, a riunire le successive operazioni susseguentisi da destra a sinistra e, conformemente a quanto già è stato detto nell'Introduzione, i simboli con le graffe indicano delle sostituzioni). Si conclude pertanto:

$$\mathfrak{D} = \underline{\left\{\begin{matrix} y \\ x-y \end{matrix}\right\} e^{ax} D_x \, e^{-ax} \left\{\begin{matrix} y \\ x-y \end{matrix}\right\}} \; \underline{\left\{\begin{matrix} y \\ x-y \end{matrix}\right\} e^{-ax} D_x \, e^{ax} \left\{\begin{matrix} y \\ x-y \end{matrix}\right\}}.$$

Essendo poi $\left\{\begin{matrix} y \\ x-y \end{matrix}\right\}$ una sostituzione coincidente con la sua inversa, si ha

$$e^{-ax} \left\{\begin{matrix} y \\ x-y \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} y \\ x-y \end{matrix}\right\} e^{-ax} = e^{-2ax},$$

onde risulta:

$$\mathfrak{D} = \underline{\left\{\begin{matrix} y \\ x-y \end{matrix}\right\} e^{ax} D_x \, e^{-2ax} D_x \, e^{ax} \left\{\begin{matrix} y \\ x-y \end{matrix}\right\}}. \tag{9}$$

Ed ancora, essendo

$$\underline{e^{ax} D_x \, e^{-2ax} D_x \, e^{ax}} = D_x^2 - a^2,$$

si ha pure:

$$\mathfrak{D} = \underline{\left\{\begin{matrix} y \\ x-y \end{matrix}\right\} (D_x^2 - a^2) \left\{\begin{matrix} y \\ x-y \end{matrix}\right\}}. \tag{9'}$$

6. – Stabilisco ora analoghe decomposizioni per tutte le potenze $\mathfrak{D}^\nu$ con esponente ν intero.

Per la (9′), si ha

$$\mathfrak{D}^2 = \underline{\left\{\begin{matrix} y \\ x-y \end{matrix}\right\} (D_x^2 - a^2) \left\{\begin{matrix} y \\ x-y \end{matrix}\right\}} \; \underline{\left\{\begin{matrix} y \\ x-y \end{matrix}\right\} (D_x^2 - a^2) \left\{\begin{matrix} y \\ x-y \end{matrix}\right\}},$$

---

[6] Loc. cit. in [2].

da cui

$$\mathfrak{D}^2 = \underline{\left\{ \begin{matrix} y \\ x-y \end{matrix} \right\} (D_x^2 - a^2)^2 \left\{ \begin{matrix} y \\ x-y \end{matrix} \right\}}.$$

In generale risulta:

$$\mathfrak{D}^\nu = \underline{\left\{ \begin{matrix} y \\ x-y \end{matrix} \right\} (D_x^2 - a^2)^\nu \left\{ \begin{matrix} y \\ x-y \end{matrix} \right\}}, \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Passando in questa agli operatori inversi in ambo i membri, e sempre tenendo presente che la sostituzione $\left\{ \begin{matrix} y \\ x-y \end{matrix} \right\}$ coincide con la sua inversa, si ha subito

$$\mathfrak{D}^{-\nu} = \underline{\left\{ \begin{matrix} y \\ x-y \end{matrix} \right\} (D_x^2 - a^2)^{-\nu} \left\{ \begin{matrix} y \\ x-y \end{matrix} \right\}}, \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Manifestamente è poi

$$\mathfrak{D}^0 = \underline{\left\{ \begin{matrix} y \\ x-y \end{matrix} \right\} (D_x^2 - a^2)^0 \left\{ \begin{matrix} y \\ x-y \end{matrix} \right\}}.$$

Si conclude quindi:

(10) $$\mathfrak{D}^\nu = \underline{\left\{ \begin{matrix} y \\ x-y \end{matrix} \right\} (D_x^2 - a^2)^\nu \left\{ \begin{matrix} y \\ x-y \end{matrix} \right\}}, \quad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

§ 3. – Varie trasformazioni della formula risolutiva.

7. – Mi occupo ora, come è stato detto alla fine del n. 4, della *esecuzione di tutte le operazioni integrali e differenziali figuranti nella formula risolutiva* (3_2).

Calcolo anzitutto $\mathfrak{D}^{-n}0$. Per la (10) si ha intanto

$$\mathfrak{D}^{-n}0 = [(D_x + D_y)^2 - a^2]^{-n}0 = \underline{\left\{ \begin{matrix} y \\ x-y \end{matrix} \right\} (D_x^2 - a^2)^{-n} \left\{ \begin{matrix} y \\ x-y \end{matrix} \right\}} 0,$$

ossia

$$\mathfrak{D}^{-n}0 = \left\{ \begin{matrix} y \\ x-y \end{matrix} \right\} (D_x^2 - a^2)^{-n}0.$$

Ma è

$$(D_x^2 - a^2)^{-n}0 = \Phi_0 + x\Phi_1 + x^2\Phi_2 + \ldots + x^{n-1}\Phi_{n-1},$$

avendo posto

$$\Phi_k = \varphi_{1,k}(y)e^{ax} + \varphi_{2,k}(y)e^{-ax}, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

dove $\varphi_{1,k}(y)$ e $\varphi_{2,k}(y)$ sono funzioni arbitrarie della y, con derivate prime e seconde. Ne segue

$$\mathfrak{D}^{-n}0 = \begin{Bmatrix} y \\ x-y \end{Bmatrix} (\Phi_0 + x\Phi_1 + x^2\Phi_2 + \dots + x^{n-1}\Phi_{n-1}) . \tag{11}$$

8. – In virtù della (11) la formula risolutiva (3_2) diventa

$$z = \mathfrak{D}^{n-1} \frac{\begin{Bmatrix} y \\ x-y \end{Bmatrix} (\Phi_0 + x\Phi_1 + x^2\Phi_2 + \dots + x^{n-1}\Phi_{n-1})}{x+y} ,$$

che si può scrivere

$$z = \mathfrak{D}^{n-1} \begin{Bmatrix} y \\ x-y \end{Bmatrix} \frac{\Phi_0 + x\Phi_1 + x^2\Phi_2 + \dots + x^{n-1}\Phi_{n-1}}{2x-y} .$$

Al rapporto che qui figura, sfruttando l'arbitrarietà delle funzioni $\varphi_{1,k}(y)$ e $\varphi_{2,k}(y)$ che entrano in Φ_k, conviene dare la forma

$$\frac{\Psi_0 + (2x-y)\Psi_1 + (2x-y)^2\Psi_2 + \dots + (2x-y)^{n-1}\Psi_{n-1}}{2x-y} ,$$

avendosi ora

$$\Psi_k = \psi_{1,k}(y)e^{ax} + \psi_{2,k}(y)e^{-ax} , \qquad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1),$$

dove $\psi_{1,k}(y)$ e $\psi_{2,k}(y)$ sono funzioni arbitrarie della y, con derivate prime e seconde. Segue quindi:

$$z = \mathfrak{D}^{n-1} \begin{Bmatrix} y \\ x-y \end{Bmatrix} \frac{\Psi_0}{2x-y} + \mathfrak{D}^{n-1} \begin{Bmatrix} y \\ x-y \end{Bmatrix} [\Psi_1 + (2x-y)\Psi_2 + \dots + (2x-y)^{n-2}\Psi_{n-1}],$$

e poichè qui, come sarà provato al n. 9, l'ultimo termine del secondo membro è nullo, si ha semplicemente

$$z = \mathfrak{D}^{n-1} \begin{Bmatrix} y \\ x-y \end{Bmatrix} \frac{\Psi_0}{2x-y} ,$$

cioè

$$z = \mathfrak{D}^{n-1} \frac{\begin{Bmatrix} y \\ x-y \end{Bmatrix} \Psi_0}{x+y} .$$

Tenendo ora presente l'espressione di Ψ_0 e indicando per semplicità le funzioni arbitrarie $\psi_{1,0}(y)$ e $\psi_{2,0}(y)$ rispettivamente con $\varphi(y)$ e $\psi(y)$, si ottiene

$$z = \mathfrak{D}^{n-1}\frac{\varphi(x-y)e^{ax}+\psi(x-y)e^{-ax}}{x+y} \tag{$3'_2$}$$

ossia più estesamente, sostituendo a $\mathfrak{D}$ la sua espressione (5),

$$z = [(D_x+D_y)^2 - a^2]^{n-1}\frac{\varphi(x-y)e^{ax}+\psi(x-y)e^{-ax}}{x+y}.$$

9. – Resta da provare, come si è sopra asserito, che è proprio

$$\mathfrak{D}^{n-1}\begin{Bmatrix} y \\ x-y \end{Bmatrix}[\Psi_1+(2x-y)\Psi_2+\ldots+(2x-y)^{n-2}\Psi_{n-1}] = 0.$$

Invero, la quantità precedente in parentesi quadre si può anche scrivere nella forma

$$\overline{\Psi}_1 + x\overline{\Psi}_2 + \ldots + x^{n-2}\overline{\Psi}_{n-1},$$

dove le $\overline{\Psi}_k$ sono funzioni analoghe alle Ψ_k. Applicando la (11) si ha poi

$$\begin{Bmatrix} y \\ x-y \end{Bmatrix}(\overline{\Psi}_1 + x\overline{\Psi}_2 + \ldots + x^{n-2}\overline{\Psi}_{n-1}) = \mathfrak{D}^{1-n}0;$$

pertanto il primo membro dell'identità da dimostrare diventa

$$\mathfrak{D}^{n-1}\mathfrak{D}^{1-n}0,$$

quantità manifestamente nulla.

10. – Tenendo ora presente che per la (10) si ha

$$\mathfrak{D}^{n-1} = \begin{Bmatrix} y \\ x-y \end{Bmatrix}(D_x^2 - a^2)^{n-1}\begin{Bmatrix} y \\ x-y \end{Bmatrix};$$

la ($3'_2$) diventa

$$z = \begin{Bmatrix} y \\ x-y \end{Bmatrix}(D_x^2 - a^2)^{n-1}\frac{\varphi(y)e^{ax}+\psi(y)e^{-ax}}{2x-y}. \tag{$3''_2$}$$

11. — La $(3''_2)$ pone in evidenza che la soluzione $z(x, y)$ è la somma delle due funzioni

$$z_1(x, y) = \begin{Bmatrix} y \\ x - y \end{Bmatrix} (D_x^2 - a^2)^{n-1} \frac{\varphi(y)\, e^{ax}}{2x - y},$$

$$z_2(x, y) = \begin{Bmatrix} y \\ x - y \end{Bmatrix} (D_x^2 - a^2)^{n-1} \frac{\varphi(y) e^{-ax}}{2x - y},$$

la seconda delle quali si ottiene dalla prima scambiando a in $-a$.

Trasformiamo la prima funzione, analogamente si procede per la seconda. Abbiamo:

$$(D_x^2 - a^2)^{n-1} = (D_x + a)^{n-1}(D_x - a)^{n-1},$$

dove è

$$(D_x - a)^{n-1} = \underline{e^{ax} D_x^{n-1} e^{-ax}},$$

e quindi risulta

$$z_1(x, y) = \begin{Bmatrix} y \\ x - y \end{Bmatrix} (D_x + a)^{n-1}\, \underline{e^{ax} D_x^{n-1} e^{-ax}}\, \frac{e^{ax} \varphi(y)}{2x - y},$$

ossia, semplificando,

$$\underline{z_1(x, y) = \begin{Bmatrix} y \\ x - y \end{Bmatrix} \varphi(y)(D_x + a)^{n-1}}\; e^{ax} D_x^{n-1} (2x - y)^{-1}.$$

Essendo poi

$$D_x^{n-1}(2x - y)^{-1} = (n - 1)!\, (-2)^{n-1}(2x - y)^{-n}$$

ed avendosi

$$(12) \qquad \underline{(D_x + a)^{n-1} e^{ax}} = \underline{e^{-ax} D_x^{n-1} e^{ax} e^{ax}} = \underline{e^{-ax} D_x^{n-1} e^{2ax}} =$$

$$= e^{ax} \cdot \underline{e^{-2ax} D_x^{n-1} e^{2ax}} = e^{ax}(D_x + 2a)^{n-1},$$

si conclude

$$z_1(x, y) = \begin{Bmatrix} y \\ x - y \end{Bmatrix} \Phi(y) e^{ax}(D_x + 2a)^{n-1} \frac{1}{(2x - y)^n},$$

dove si è posto

$$\Phi(y) = (n - 1)!\, (-2)^{n-1} \varphi(y).$$

Espressione analoga vale per $z_2(x, y)$. Onde risulta

$$(3_2''')\quad z = \begin{Bmatrix} y \\ x-y \end{Bmatrix} \left[\Phi(y) e^{ax} (D_x + 2a)^{n-1} \frac{1}{(2x-y)^n} + \right.$$
$$\left. + \Psi(y) e^{-ax} (D_x - 2a)^{n-1} \frac{1}{(2x-y)^n} \right].$$

12. – Infine, essendo

$$(D_x \pm 2a)^{n-1} \frac{1}{(2x-y)^n} = \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n-1}{r} (\pm 2a)^{n-r-1} D_x^r \frac{1}{(2x-y)^n},$$

si ha subito, eseguendo le derivazioni indicate,

$$(3_2^{\mathrm{IV}})\quad z = \begin{Bmatrix} y \\ x-y \end{Bmatrix} \left[\Phi(y) \frac{e^{ax}}{(n-1)!} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \binom{n-1}{r} \frac{(n+r-1)!\, 2^r (2a)^{n-r-1}}{(2x-y)^{n+r}} + \right.$$
$$\left. + \Psi(y) \frac{e^{-ax}}{(n-1)!)} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \binom{n-1}{r} \frac{(n+r-1)!\, 2^r (-2a)^{n-r-1}}{(2x-y)^{n+r}} \right].$$

13. – In particolare per $n = 1, 2, 3$ si ha rispettivamente, dalla (3_2^{IV}),

$$z = \frac{1}{x+y} [\varphi_1(x-y) e^{ax} + \psi_1(x-y) e^{-ax}],$$

$$z = \frac{1}{(x+y)^3} [\varphi_2(x-y)\{a\cdot(x+y) - 2\} e^{ax} + \psi_2(x-y)\{a\cdot(x+y) + 2\} e^{-ax}],$$

$$z = \frac{1}{(x+y)^5} [\varphi_3(x-y)\{a^2(x+y)^2 - 6a\cdot(x+y) + 12\} e^{ax} +$$
$$+ \psi_3(x-y)\{a^2(x+y)^2 + 6a\cdot(x+y) + 12\} e^{-ax}],$$

dove $\varphi_r(x-y)$ e $\psi_r(x-y)$, $(r = 1, 2, 3)$, sono funzioni arbitrarie di $x-y$ con derivate prime e seconde.