Luigi Amerio (*)

Analisi delle nozioni di « nodo », « nodo a stella » e « fuoco », estese ai sistemi di due equazioni differenziali in tre variabili. (**)

Consideriamo il sistema

$$\left\{\begin{aligned} x' &= X(t, x, y)\,, \\ y' &= Y(t, x, y)\,, \end{aligned}\right. \tag{1}$$

ove $X(t, x, y)$ e $Y(t, x, y)$ sono funzioni continue del punto $P(t, x, y)$, con $-\infty < t < +\infty$, $(x, y) \subset \Omega$ [insieme aperto del piano (x, y)]. Supponiamo inoltre che X e Y siano *limitate* come funzioni di t e analitiche come funzioni di (x, y): precisamente ammettiamo che tutte le derivate parziali rispetto alle variabili x, y siano funzioni continue di P e che, preso comunque in Ω un insieme chiuso e limitato E, valgano, per $-\infty < t < +\infty$, $(x, y) \subset E$, le disuguaglianze di Cauchy

$$\left\{\begin{aligned} &\left| \frac{\partial^{m+n} X(t, x, y)}{\partial x^m \, \partial y^n} \right| \leqslant K \delta^{m+n}\,, \\ &\left| \frac{\partial^{m+n} Y(t, x, y)}{\partial x^m \, \partial y^n} \right| \leqslant K \delta^{m+n}\,, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

ove K e δ sono due costanti positive dipendenti da E.

Sia, nello spazio (t, x, y),

$$\left\{\begin{aligned} x &= x^*(t)\,, \\ y &= y^*(t)\,, \end{aligned}\right. \qquad (-\infty < t < +\infty)\,, \tag{3}$$

(*) Professore o. del Politecnico e dell'Università di Milano. Indirizzo: Via Freguglia 2, Milano (Italia).

(**) Ricevuto il 7-X-1952.

una *soluzione limitata* del sistema (1), la cui proiezione sul piano (x, y), abbia inoltre, distanza *positiva* dalla frontiera $F\Omega$. Senza ledere la generalità possiamo supporre

$$x^*(t) = y^*(t) = 0 \tag{4}$$

e quindi, per le (1),

$$X(t, 0, 0) = Y(t, 0, 0) = 0 \,. \tag{5}$$

Ammettiamo che il corrispondente sistema lineare alle variazioni

$$\begin{cases} \delta x' = X_x(t, 0, 0)\, \delta x + X_y(t, 0, 0)\, \delta y \,, \\ \delta y' = Y_x(t, 0, 0)\, \delta x + Y_y(t, 0, 0)\, \delta y \,, \end{cases} \tag{6}$$

sia riducibile secondo Liapunov. In tal caso possiamo supporre che sia

$$\begin{cases} X_x(t, 0, 0) = A \,, \qquad X_y(t, 0, 0) = B \,, \\ Y_x(t, 0, 0) = C \,, \qquad Y_y(t, 0, 0) = D \,, \end{cases} \tag{7}$$

con A, B, C, D costanti reali. È ben noto [1] che il sistema (6) è riducibile se $X_x(t, 0, 0)$, $X_y(t, 0, 0)$, $Y_x(t, 0, 0)$, $Y_y(t, 0, 0)$ sono funzioni periodiche di t con lo stesso periodo T: in particolare se $X(t, x, y)$, $Y(t, x, y)$, $x^*(t)$, $y^*(t)$ sono funzioni periodiche di t, con il periodo T.

Per le (5) e (7) il sistema (1) assume la forma

$$\begin{cases} x' = Ax + By + \varphi(t, x, y) = X(t, x, y) \,, \\ y' = Cx + Dy + \psi(t, x, y) = Y(t, x, y) \,, \end{cases} \tag{8}$$

ove φ e ψ soddisfano a limitazioni analoghe alle (2) ed è

$$\begin{cases} \varphi(t, 0, 0) = \varphi_x(t, 0, 0) = \varphi_y(t, 0, 0) = 0 \,, \\ \psi(t, 0, 0) = \psi_x(t, 0, 0) = \psi_y(t, 0, 0) = 0 \,. \end{cases} \tag{9}$$

Inoltre, *se non è*

$$A = D \,, \qquad B = C = 0 \,, \tag{10}$$

---

[1] Cfr., ad es., É. GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique*, T. II, Gauthier-Villars, Paris 1933, pp. 514-516.

si può supporre

$$B \neq 0 , \tag{11}$$

trasformando eventualmente il sistema (8) con una conveniente sostituzione lineare a coefficienti costanti

$$\begin{cases} x_1 = mx + ny , \\ y_1 = px + qy , \end{cases} \qquad (mq - pn \neq 0) . \tag{12}$$

In un recente lavoro, che indicheremo in seguito con (M) (²), mi sono occupato dell'estensione al sistema (8) [e quindi al sistema (1)] delle nozioni di *colle, nodo* e *fuoco,* ben note per i sistemi indipendenti da t.

Per questo ho ricercato *quelle superficie dello spazio* (t, x, y), *di equazioni* $y = y(t, x)$, *che siano integrali dell'equazione*

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial x} X(t, x, y) = Y(t, x, y) , \tag{13}$$

supponendo $y(t, x)$ *funzione analitica di* x (*per* $0 \leqslant |x| \leqslant r$) *e limitata di* t $\left[\text{insieme a tutte le derivate } \dfrac{\partial^n y(t, x)}{\partial x^n}\right]$ *per* $-\infty < t < +\infty$. La conoscenza di tali superficie, dette *superficie principali* (³) e costituite, come è ben noto, di

(²) L. Amerio, *Sull'estensione delle nozioni di «colle», «nodo» e «fuoco» ai sistemi di due equazioni differenziali periodiche in due variabili,* Nota I, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) **10**, 206-212 (1951); idem, Nota II, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) **10**, 289-297 (1591). Il procedimento indicato in (M) vale (come è detto nell'Osservazione II della Nota II), oltre che nel caso periodico, nel caso più generale che abbiamo qui considerato e che sarà essenziale per il seguito.

(³) Sia $\{x(t), y(t)\}$ l'integrale del sistema (1) che corrisponde alle condizioni iniziali, per $t = 0$,

$$x(0) = x_0 , \qquad y(0) = y_0 .$$

Ammettiamo che $X(t, x, y)$ *e* $Y(t, x, y)$ *siano funzioni periodiche di* t *con periodo* T. Se consideriamo nel piano (x, y) il punto di coordinate $x = x(t)$, $y = y(t)$, e poniamo $x_1 = x(T)$, $y_1 = y(T)$ risulterà

$$x_1 = x_1(x_0, y_0) , \qquad y_1 = y_1(x_0, y_0) . \tag{I}$$

La (I) definisce una trasformazione del piano (x, y) in sè, i cui punti uniti corrispondono alle soluzioni periodiche, ed è stata profondamente studiata. L'esistenza di curve γ trasformate in sè dalla (I) è stata dimostrata dal Poincaré, *Oeuvres*, T. I, pp. 202-204 linee integrali del sistema (8) [sistema *caratteristico* della (13)], permette di descrivere in modo soddisfacente il comportamento asintotico, per $t \to +\infty$ o per $t \to -\infty$ del sistema (8) in un intorno della soluzione $\{0, 0\}$. Si può così mettere in evidenza l'analogia di comportamento coi sistemi indipendenti da t.

Posto

$$\Delta = AD - BC\,, \qquad \lambda = (A + D)/2\,,$$

i casi già considerati in (M) sono i seguenti

a) $\Delta < 0$ (caso del *colle*),

b) $\Delta > 0$ $\begin{cases} \lambda^2 \geqslant \Delta & \text{(caso del } nodo\text{)}, \\ 0 < \lambda^2 < \Delta & \text{(caso del } fuoco\text{)}. \end{cases}$

Nel caso del colle esistono due e due sole superficie principali. Nel caso del nodo ho dimostrato che se è $\lambda^2 > \Delta$ esiste almeno una superficie principale, indicando anche la condizione semplicissima perchè ne esistano due: inoltre se è $\lambda^2 \geqslant \Delta$, non esistono più di due superficie principali.

Nel caso del nodo, a causa dell'ipotesi $B \neq 0$, è rimasto escluso il caso indicato dalle (10), che diremo (come è ben naturale per l'analogia coi sistemi indipendenti da t), caso del *nodo a stella*.

Mi propongo ora di proseguire l'analisi svolta, per i casi del nodo e del fuoco, *ammettendo come unica ipotesi che sia*

$$\lambda \neq 0\,, \tag{14}$$

potendo anche risultare

$$\Delta = 0\,. \tag{15}$$

[vedasi anche: J. HADAMARD, *Sur l'intégration et les solutions asymptotiques des équations différentielles*, Bull. Soc. Math. France **29**, 224-228 (1901); N. LEVISON, *Transformation theory of non linear differential equations of the second order*, Ann. of Math. **45**, 723-737 (1944); S. LEFSCHETZ, *Contributions to the theory of non linear oscillations*, Lecture IV by M. L. CARTWRIGHT (*Forced oscillations in non linear systems*), Princeton Univ. Press, 1950, cfr. p. 156]. Queste curve γ, invarianti per la (I), coincidono con le curve intersezioni delle superficie principali, definite in ([2]), con il piano $t = 0$. Osserviamo però che nei lavori ora ricordati l'esistenza delle linee γ è dimostrata ammettendo integrato il sistema (1), cioè note le (I), mentre in ([2]) esse sono state ottenute direttamente.

Ho studiato dapprima il caso del nodo a stella, dimostrando che passa per l'asse t un fascio di superficie principali: assumendole (mediante un cambiamento di variabili) come piani per l'asse t in uno spazio (t, u, v), *il sistema* (8) *assume allora la forma canonica* particolarmente semplice

$$\begin{cases} u' = u(\lambda + f(t, u, v)) \,, \\ v' = v(\lambda + f(t, u, v)) \,, \end{cases} \qquad [f(t, 0, 0) = 0] \,. \tag{16}$$

Considerato poi il caso del fuoco se ne prova l'*equivalenza topologica con il caso del nodo a stella*: è perciò possibile trasformare anche in questo caso il sistema (8) nel sistema (16).

Ho supposte infine verificate le (14) e (15). Si dimostra allora che *esiste almeno una superficie principale e, su questa, gli integrali sono asintotici alla soluzione* $\{0, 0\}$. Il risultato ottenuto permette di precisare il *comportamento asintotico degli integrali di un sistema indipendente da t nell'intorno di un ciclo limite.*

1. – Nel caso del nodo a stella supporremo verificate le (10) e (14): si avrà cioè

$$A = D = \lambda \neq 0 \,, \qquad B = C = 0 \,. \tag{17}$$

Il sistema (8) diventa allora

$$\begin{cases} x' = \lambda x + \varphi(t, x, y) \,, \\ y' = \lambda y + \psi(t, x, y) \,, \end{cases} \tag{18}$$

ove φ e ψ soddisfano alle (9).

Procedendo come in (M) si riconosce che esiste una famiglia ∞^1 di superficie principali, ciascuna individuata dal valore $y_1 = \dfrac{\partial y(t, 0)}{\partial x}$, che può darsi ad arbitrio. Preferiamo però ottenere questo risultato (per le conseguenze che se ne deducono assai più semplicemente) considerando, in luogo della (13), l'equazione *lineare*

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x} X(t, x, y) + \frac{\partial z}{\partial y} Y(t, x, y) = 0 \,, \qquad [z = z(t, x, y)] \,. \tag{19}$$

Come è ben noto, se $z = z(t, x, y)$ è una soluzione della (19) la superficie di equazione

$$z(t, x, y) = k,$$

(k costante arbitraria) è costituita da linee integrali del sistema (1) (caratteristiche).

Per le (18) la (19) si scrive:

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \lambda\left\{x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right\} = -\varphi\frac{\partial z}{\partial x} - \psi\frac{\partial z}{\partial y}\,. \tag{20}$$

Posto

$$z(t, x, y) = e^{-\lambda t}w(t, x, y)\,, \tag{21}$$

si ottiene l'equazione, in w,

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \lambda\left\{x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} - w\right\} = -\varphi\frac{\partial w}{\partial x} - \psi\frac{\partial w}{\partial y}\,. \tag{22}$$

Cerchiamo un integrale $w = w(t, x, y)$ il quale risulti *funzione analitica di* (x, y) *e funzione limitata di* t: precisamente risulti, per $-\infty < t < +\infty$, $|x| \leqslant r$, $|y| \leqslant r$, $(r > 0)$,

$$w(t, x, y) = \sum_{m,n}^{0\ldots\infty} w_{m,n}(t)\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\,, \tag{23}$$

dove le $w_{m,n}(t)$ sono *limitate* ed è

$$w_{0,0}(t) = 0\,. \tag{24}$$

Ammettiamo dapprima che una tale soluzione esista. Derivando la (22) rispetto a x, otteniamo

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x} + \lambda\left\{x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right\} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} - \varphi\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} - \psi\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$$

e quindi, posto $x = y = 0$, per la (23),

$$w'_{1,0}(t) = 0\,.$$

Perciò si ha

$$w_{1,0}(t) = a\,, \tag{25}$$

e analogamente

$$w_{0,1}(t) = b\,, \tag{26}$$

con a, b costanti arbitrarie.

Derivando la (22) m volte rispetto ad x e n volte rispetto a y, con $m+n>1$, si ricava

$$\frac{\partial^{m+n+1}w}{\partial t\,\partial x^m\,\partial y^n} + \lambda\left\{(m+n-1)\frac{\partial^{m+n}w}{\partial x^m\,\partial y^n} + x\frac{\partial^{m+n+1}w}{\partial x^{m+1}\,\partial y^n} + y\frac{\partial^{m+n+1}w}{\partial x^m\,\partial y^{n+1}}\right\} = \tag{27}$$

$$= -\sum_{h,k}^{0\ldots m \atop 0\ldots n}\binom{m}{h}\binom{n}{k}\left\{\frac{\partial^{h+k+1}w}{\partial x^{h+1}\,\partial y^k}\,\frac{\partial^{m-h+n-k}\varphi}{\partial x^{m-h}\,\partial y^{n-k}} + \frac{\partial^{h+k+1}w}{\partial x^h\,\partial y^{k+1}}\,\frac{\partial^{m-h+n-k}\psi}{\partial x^{m-h}\,\partial y^{n-k}}\right\}.$$

Di qui, per $x = y = 0$, si trae

$$w'_{m,n}(t) + \lambda(m+n-1)w_{m,n}(t) = Q_{m,n}(t)\,, \tag{28}$$

ove $Q_{m,n}(t)$ è funzione lineare omogenea delle $w_{p,q}(t)$ e funzione lineare omogenea delle derivate

$$\frac{\partial^{r+s}\varphi(t,0,0)}{\partial x^r\,\partial y^s}\,,\qquad \frac{\partial^{r+s}\psi(t,0,0)}{\partial x^r\,\partial y^s}\,,$$

con $r+s \leqslant m+n$ e, per le (9) e (27), $p+q \leqslant m+n-1$. Perciò, note le $w_{p,q}(t)$, con $p+q \leqslant m+n-1$, la funzione $Q_{m,n}(t)$ risulta nota ed è anche funzione limitata di t, in virtù delle (2), se tali sono le $w_{p,q}(t)$.

Poichè risulta $m+n-1>0$, la (28) ammette l'unico integrale limitato

$$\begin{cases} w_{m,n}(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} Q_{m,n}(\tau)\,e^{-\lambda(m+n-1)(t-\tau)}\,d\tau & \text{se } \lambda>0\,, \\[2ex] w_{m,n}(t) = -\displaystyle\int_{t}^{\infty} Q_{m,n}(\tau)\,e^{-\lambda(m+n-1)(t-\tau)}\,d\tau & \text{se } \lambda<0\,. \end{cases} \tag{29}$$

Precisamente, se è

$$|Q_{m,n}(t)| \leqslant q_{m,n}\,,$$

risulta

$$(30) \qquad |w_{m,n}(t)| \leqslant \frac{q_{m,n}}{\lambda(m+n-1)} .$$

Inoltre *le $w_{m,n}(t)$ risultano funzioni lineari omogenee delle costanti arbitrarie a, b*: si ha cioè

$$(31) \qquad w_{m,n}(t) = a\overline{w}_{m,n}(t) + bw^*_{m,n}(t) ,$$

ove $\overline{w}_{m,n}$, $w^*_{m,n}$ sono le funzioni che corrispondono ai due casi $a = 1$, $b = 0$ e $a = 0$, $b = 1$.

Perciò, *assegnate a e b, la funzione $w(t, x, y)$, se esiste, è unica.*

L'esistenza si dimostra col classico metodo delle funzioni maggioranti. Infatti, detto M l'estremo superiore di $\varphi(t, x, y)$, $\psi(t, x, y)$ per $-\infty < t < +\infty$, $|x| \leqslant R$, $|y| \leqslant R$, dove R è un conveniente valore positivo e le variabili x, y assumono anche i valori complessi, si può prendere quale comune funzione maggiorante, tenendo presenti le (9), la funzione

$$M\left\{\frac{1}{\left(1-\dfrac{x}{R}\right)\left(1-\dfrac{y}{R}\right)} - 1 - \frac{x+y}{R}\right\}$$

e quindi anche la funzione

$$\frac{(x+y)^2}{R^2}\,\frac{M}{1-\dfrac{x+y}{R}} .$$

Allora le $w_{m,n}(t)$ saranno maggiorate, per le (27) e (30), dalle costanti $\alpha_{m,n}$ ottenute integrando l'equazione maggiorante

$$(32) \qquad \lambda\left\{x\frac{\partial\alpha}{\partial x} + y\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \alpha\right\} = \frac{(x+y)^2}{R^2}\,\frac{M}{1-\dfrac{x+y}{R}}\left\{\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right\}, \qquad [\alpha = \alpha(x, y)] ,$$

con le condizioni

$$(33) \qquad \alpha_{0,0} = 0 , \qquad \alpha_{1,0} = \alpha_{0,1} = |a| + |b| .$$

Infatti il precedente procedimento, applicato alla (32), dà per $\alpha_{m,n}$ la relazione [analoga alla (28)]

$$\lambda(m+n-1)\alpha_{m,n} = \beta_{m,n}, \tag{34}$$

con $\beta_{m,n}$ costante nota e inoltre

$$\beta_{m,n} \geqslant q_{m,n}. \tag{35}$$

Pertanto la $\alpha(x, y)$, se esiste, è unica. Essa si determina facilmente cercando un integrale della (32) che dipenda da $x+y$ e soddisfi alle (33).

Posto $x+y=\eta$, $\alpha(x, y)=\alpha(\eta)$, la (31) diventa l'equazione a variabili separabili

$$\lambda\{\eta\alpha'(\eta)-\alpha(\eta)\} = \frac{\eta^2}{R^2}\frac{2M}{1-\dfrac{\eta}{R}}\alpha'(\eta),$$

cioè

$$\eta\alpha'(\eta)\left\{1-\frac{2M\eta}{\lambda R^2\left(1-\dfrac{\eta}{R}\right)}\right\} = \alpha(\eta). \tag{36}$$

Ne segue

$$\alpha'(\eta) = \alpha(\eta)\left\{\frac{1}{\eta}+\gamma(\eta)\right\},$$

con $\gamma(\eta)$ funzione analitica per $|\eta| < R\Big/\left(1+\dfrac{2M}{\lambda R}\right)$.

Pertanto la soluzione cercata è, per le (33),

$$\alpha(x, y) = (|a|+|b|)\eta\, e^{\int_0^\eta \gamma(\eta)\mathrm{d}\eta}$$

ed è analitica per

$$|x| < \frac{R}{2}\Big/\left(1+\frac{2M}{R\lambda}\right), \qquad |y| < \frac{R}{2}\Big/\left(1+\frac{2M}{R\lambda}\right).$$

Preso comunque $R' < \frac{R}{2} \Big/ \left(1 + \frac{2M}{R\lambda}\right)$, la serie (23) converge allora uniformemente e assolutamente per $|x| \leqslant R'$, $|y| \leqslant R'$, $-\infty < t < +\infty$. Inoltre per le (34) e (35) anche la serie

$$\sum_{m,n}^{0\ldots\infty} Q_{m,n}(t) \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!}$$

converge assolutamente e uniformemente. Lo stesso avviene allora, in virtù della (28), per la serie

$$\sum_{m,n}^{0\ldots\infty} w'_{m,n}(t) \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!}$$

che vale perciò $\frac{\partial w(t, x)}{\partial t}$. Ne segue che la funzione $w(t, x, y)$ espressa dalla (23) soddisfa alla (22) e fornisce la soluzione del problema proposto.

Inoltre posto

$$\bar{w}(t, x, y) = \sum_{m,n}^{0\ldots\infty} \bar{w}_{m,n}(t) \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!}, \qquad w^*(t, x, y) = \sum_{m,n}^{0\ldots\infty} w^*_{m,n}(t) \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!}, \tag{38}$$

si ricava

$$w(t, x, y) = a\bar{w}(t, x, y) + bw^*(t, x, y)$$

e quindi

$$z(t, x, y) = e^{-\lambda t}\{a\bar{w}(t, x, y) + bw^*(t, x, y)\}.$$

Se poniamo $z = 0$ otteniamo allora il fascio di superficie, passanti per l'asse t, di equazioni

$$a\bar{w}(t, x, y) + bw^*(t, x, y) = 0. \tag{39}$$

A seconda che sia $a \neq 0$ oppure $b \neq 0$ la (39) è risolubile, per le (31), rispetto a x oppure rispetto a y. Ad esempio, per $b \neq 0$, risolvendo rispetto a y si ottiene

$$y = y(t, x), \tag{40}$$

con le condizioni

$$y(t, 0) = 0 , \qquad \frac{\partial y(t, 0)}{\partial x} = -\frac{a}{b} .$$

Poichè le derivate $w_{m,n}(t)$ sono limitate, si riconosce allora, applicando il teorema delle funzioni implicite, che tutte le derivate $\frac{\partial^n y(t, 0)}{\partial x^n}$ sono limitate. La funzione $y(t, x)$ definita dalla (40) coincide perciò con quella che si otterrebbe procedendo come in (M), con la condizione $y_1 = -a/b$.

Si conclude che *nel nodo a stella le superficie principali esistono e formano il fascio di equazione* (39).

Inoltre *per ogni punto* $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y})$ *appartenente a un conveniente intorno* $(x^2 + y^2 \leqslant \sigma^2)$ *dell'asse* t, *passa una e una sola superficie principale.*

La conoscenza delle funzioni $\overline{w}(t, x, y)$, $w^*(t, x, y)$ permette di dare al sistema (18) una forma particolarmente semplice.

Poniamo

$$(41) \qquad \begin{cases} u = \overline{w}\ (t, x, y) = x + [2] , \\ v = w^*(t, x, y) = y + [2] , \end{cases}$$

dove il simbolo [2] designa termini infinitesimi di ordine superiore al primo.

Poichè si ha, per le (41),

$$(42) \qquad \left\{ \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right\}_{(t,0,0)} = 1$$

e le derivate $w_{m,n}(t)$ hanno le proprietà dianzi indicate, il sistema (41) è univocamente risolubile rispetto a x, y in un intorno $(|x| \leqslant \mu,\ |y| \leqslant \mu)$ dell'asse t, nel quale si avrà

$$(43) \qquad \begin{cases} x = \alpha(t, u, v) , \\ y = \beta(t, u, v) , \end{cases} \qquad [\alpha(t, 0, 0) = \beta(t, 0, 0) = 0] .$$

Precisamente si trova, per le (41),

$$(44) \qquad \begin{cases} x = u + [2] , \\ y = v + [2] . \end{cases}$$

Se poi $\{x(t), y(t)\}$ è un integrale del sistema (18), le funzioni $u(t) = \overline{w}(t, x(t), y(t))$, $v(t) = w^*(t, x(t), y(t))$ soddisfano al sistema

$$\begin{cases} u' = \dfrac{\partial \overline{w}}{\partial t} + \dfrac{\partial \overline{w}}{\partial x} X + \dfrac{\partial \overline{w}}{\partial y} Y, \\ v' = \dfrac{\partial w^*}{\partial t} + \dfrac{\partial w^*}{\partial x} X + \dfrac{\partial w^*}{\partial y} Y. \end{cases} \tag{45}$$

Per le (44) tale sistema si scrive nella forma

$$\begin{cases} u' = U(t, u, v), \\ v' = V(t, u, v). \end{cases} \tag{46}$$

Si ha poi, per le (41) e (44),

$$\frac{\partial \overline{w}}{\partial t} = [2], \frac{\partial \overline{w}}{\partial x} = 1 + [1], \frac{\partial \overline{w}}{\partial y} = [1], \frac{\partial w^*}{\partial t} = [2], \frac{\partial w^*}{\partial x} = [1], \frac{\partial w^*}{\partial y} = 1 + [1], \tag{47}$$

e inoltre, per le (18) e (44),

$$\begin{cases} X = \lambda x + [2] = \lambda u + [2], \\ Y = \lambda y + [2] = \lambda v + [2]. \end{cases} \tag{48}$$

Dalle (44), (45), (46), (47), (48) segue

$$\begin{cases} U(t, u, v) = \lambda u + f(t, u, v) = \lambda u + [2], \\ V(t, u, v) = \lambda v + g(t, u, v) = \lambda v + [2]. \end{cases}$$

Pertanto $u(t)$ e $v(t)$ soddisfano a un sistema del tutto analogo al sistema (18):

$$\begin{cases} u' = \lambda u + f(t, u, v), \\ v' = \lambda v + g(t, u, v). \end{cases} \tag{49}$$

Osserviamo però che le superficie principali del sistema (49) (costituite da linee integrali) hanno equazioni

$$au + bv = 0, \tag{50}$$

cioè coincidono con i piani passanti per l'asse t. In particolare, il sistema ha le soluzioni $\{0, v(t)\}$, $\{u(t), 0\}$, cioè deve essere $f(t, 0, v) = 0$ per valori arbitrati di v e analogamente, per valori arbitrari di u, $g(t, u, 0) = 0$. Risulta perciò $f(t, u, v) = uF(t, u, v)$, $g(t, u, v) = vG(t, u, v)$ e il sistema (49) si scrive

$$\left\{\begin{aligned} u' &= u(\lambda + F(t, u, v)) , \\ v' &= v(\lambda + G(t, u, v)) . \end{aligned}\right. \tag{51}$$

Inoltre, poichè l'integrale $\{u(t), v(t)\}$ appartiene a uno dei piani di equazione (50), risulta

$$v(t) = mu(t)$$

con m costante. Ne segue

$$v'(t) = mu'(t)$$

e quindi, per le (51),

$$G(t, u, mu) = F(t, u, mu)$$

cioè, per l'arbitrarietà di u e di m,

$$G(t, u, v) = F(t, u, v) .$$

Nel caso del nodo a stella il sistema (18) può porsi perciò, in un intorno della soluzione $\{0, 0\}$, nella forma canonica, particolarmente semplice,

$$\left\{\begin{aligned} u' &= u(\lambda + F(t, u, v)) , \\ v' &= v(\lambda + F(t, u, v)) , \end{aligned}\right. \qquad [F(t, 0, 0) = 0] . \tag{52}$$

Quanto al comportamento asintotico delle soluzioni del sistema (52) [o (18)], passando a coordinate polari e posto $u = \varrho \cos \vartheta$, $v = \varrho \operatorname{sen} \vartheta$, risulta [come si è già ricordato in (M)]

$$\lim_{t \to +\infty} \varrho(t) = 0 \qquad \text{se è } \lambda < 0 ,$$
$$\lim_{t \to -\infty} \varrho(t) = 0 \qquad \text{se è } \lambda > 0 .$$

Queste relazioni possono essere notevolmente precisate.

Infatti si ottiene dalle (52) l'equazione in $\varrho(t)$:

$$\varrho' = \varrho\{\lambda + \varrho L(t, \varrho, \vartheta)\} ,$$

dove risulterà

$$|L(t, \varrho, \vartheta)| \leqslant M \qquad \text{per} \quad 0 \leqslant \varrho \leqslant h .$$

Possiamo supporre inoltre, senza ledere la generalità,

$$\lambda = -\delta < 0 .$$

Preso k, con $0 < k \leqslant h$, $k < \delta/M$, sia $\{\varrho(t), \vartheta(t)\}$ un integrale e supponiamo che per il valore iniziale $\varrho_0 = \varrho(t_0)$ risulti

$$0 < \varrho_0 < k .$$

Si ricava allora

$$\varrho'(t_0) < -\varrho_0(\delta - kM) < 0 ,$$

cioè $\varrho(t)$ è decrescente per $t = t_0$; si deduce poi che è, per ogni $t > t_0$, $\varrho'(t) < 0$ e quindi

$$0 < \varrho(t) < k .$$

Posto

$$\varrho(t) = r(t)\, e^{-\delta(t-t_0)} , \qquad [r(t_0) = r_0 = \varrho_0] ,$$

si ottiene l'equazione, in $r(t)$,

$$r' = r^2 e^{-\delta(t-t_0)} L(t, re^{-\delta(t-t_0)}, \vartheta) .$$

Si ha perciò

$$-Me^{-\delta(t-t_0)} \leqslant r'/r^2 \leqslant Me^{-\delta(t-t_0)}$$

e quindi, integrando tra t' e t'', con $t_0 \leqslant t' < t''$,

$$\left| \frac{1}{r(t')} - \frac{1}{r(t'')} \right| < \frac{M}{\delta} e^{-\delta(t'-t_0)}.$$

Ne segue, per $t' = t_0$, $t'' = t > t_0$, osservando che è $1/\varrho_0 > M/\delta$,

$$\frac{1}{r(t)} > \frac{1}{\varrho_0} - \frac{M}{\delta}, \qquad 0 < r(t) < 1 \Big/ \left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{M}{\delta}\right) = \nu.$$

Si ha perciò, per $t_0 \leqslant t' < t''$,

$$|r(t') - r(t'')| < \frac{\nu^2 M}{\delta} e^{-\delta(t' - t_0)}$$

e quindi *esiste finito il limite*

$$\lim_{t \to +\infty} e^{\delta(t - t_0)} \varrho(t) = \lim_{t \to +\infty} r(t) = l_0 .$$

Possiamo perciò scrivere

$$\varrho(t) = (l_0 + \alpha_0(t))\, e^{-\delta(t - t_0)},$$

ove $\alpha_0(t)$ *è un infinitesimo per* $t \to +\infty$.

Sia ora $t < t_0$. Finchè vale la disuguaglianza

$$\varrho(t) < k,$$

si ricava

$$\varrho' < -\varrho(\delta - kM),$$

e quindi, integrando tra t e t_0, con $t < t_0$,

$$\varrho(t) > \varrho_0 e^{(\delta - kM)(t_0 - t)}.$$

Poichè il secondo membro ha come limite $+\infty$, per $t \to -\infty$, segue che *esiste un valore* t_1 *finito, tale che per* $t \leqslant t_1$ *si abbia*

$$\varrho(t) \geqslant k .$$

Osserviamo infine che, quando ci si riferisce al sistema (25), si ha, per un integrale $\{u(t), v(t)\}$, $\vartheta(t) = \text{cost.}$. In coordinate polari il sistema (52) equivale perciò all'unica equazione

$$\varrho' = \varrho\{\lambda + \varrho L(t, \varrho, \vartheta)\}$$

da integrarsi considerando ϑ come una costante.

Osservazioni. *Se le funzioni $\varphi(t, x, y)$, $\psi(t, x, y)$ sono periodiche, come funzioni di t, con il periodo T, anche $w(t, x, y)$ è funzione periodica di t, con periodo T.* Infatti lo sono $w_{1,0} = a$ e $w_{0,1} = b$. Ammesso che siano periodiche tutte le $w_{h,k}(t)$ con $h + k < m + n$, è periodica, per le (27) e (28), la funzione $Q_{m,n}(t)$: allora lo è anche $w_{m,n}(t)$, avendosi per la prima delle (29) (se è, ad esempio, $\lambda > 0$),

$$w_{m,n}(t + T) = \int_{-\infty}^{t+T} Q_{m,n}(\tau) e^{-(m+n-1)\lambda(t+T-\tau)} \, d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} Q_{m,n}(\tau + T) e^{-(m+n-1)\lambda(t-\tau)} \, d\tau = \int_{-\infty}^{t} Q_{m,n}(\tau) e^{-(m+n-1)\lambda(t-\tau)} \, d\tau = w_{m,n}(t) .$$

Più in generale, *supponiamo che φ e ψ siano quasi periodiche, ottenute ponendo $\eta = t$* in due funzioni continue $\Phi(t, \eta, x, y)$, $\Psi(t, \eta, x, y)$, le quali siano *periodiche in t ed η, coi periodi rispettivi T e T'*: risulti cioè

$$\varphi(t, x, y) = \Phi(t, t, x, y) , \qquad \psi(t, x, y) = \Psi(t, t, x, y) .$$

In tal caso anche $w(t, x, y)$ è della stessa natura. Ammettiamo infatti che lo sia $Q_{m,n}(t)$: risulterà perciò

$$Q_{m,n}(t) = R_{m,n}(t, t) ,$$

con $R_{m,n}(t, \eta)$ funzione continua periodica, di periodi T e T'.

Posto allora

$$W_{m,n}(t, \eta) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda(t-\tau)} R_{m,n}(\tau, \eta - t + \tau) \, d\tau ,$$

la funzione $W_{m,n}(t, \eta)$ risulta continua. Inoltre, detti p e q due interi arbitrari, risulta

$$W_{m,n}(t + pT, \ \eta + qT') = \int_{-\infty}^{t+pT} e^{-\lambda(t+pT-\tau)} R_{m,n}(\tau, \eta + qT' - t - pT + \tau) d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda(t-\tau)} R_{m,n}(\tau + pT, \ \eta + qT' - t + \tau) \, d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda(t-\tau)} R_{m,n}(\tau, \eta - t + \tau) \, d\tau = W_{m,n}(t, \eta) ,$$

cioè $W_{m,n}(t, \eta)$ è funzione periodica di t, η, coi periodi T, T'.

Poichè si ha

$$w_{m,n}(t) = W_{m,n}(t)\,, \qquad \operatorname*{extr\,sup}_{-\infty<t<+\infty} |w_{m,n}(t) = \max_{\substack{0\leq t\leq T \\ 0\leq \eta\leq T'}} = |W_{m,n}(t,\eta)|\,,$$

la tesi è allora provata.

Lo stesso risultato si ottiene se è

$$\begin{cases} \varphi(t,x,y) = \Phi(t,\eta_1,\dots,\eta_p,x,y)\,, \\ \psi(t,x,y) = \Psi(t,\eta_1,\dots,\eta_p,x,y)\,, \end{cases} \qquad (\eta_1 = \eta_2 \dots = \eta_p = t)\,,$$

con Φ, Ψ funzioni continue e periodiche di $t, \eta_1, \dots, \eta_p$, con i periodi rispettivi $T, T_1, T_2, \dots, T_p$. Infine, per un teorema noto (4), φ e ψ sono funzioni quasi periodiche di Bohr, anche $w(t,x,y)$ risulta funzione quasi periodica di Bohr.

2. – Consideriamo ora il caso del fuoco, supponendo

$$0 < \lambda^2 < \Delta\,. \tag{53}$$

Con una conveniente sostituzione lineare a coefficienti reali e costanti:

$$\begin{cases} x_1 = px + qy\,, \\ y_1 = rx + sy\,, \end{cases} \qquad (ps - qr \neq 0)\,,$$

ci si riduce al caso

$$A = D = \lambda\,, \qquad B = -C \neq 0\,. \tag{54}$$

Il sistema assume perciò la forma

$$\begin{cases} x' = \lambda x + By + \varphi(t,x,y)\,, \\ y' = -Bx + \lambda y + \psi(t,x,y)\,. \end{cases} \tag{55}$$

Facciamo un cambiamento di incognite, ponendo

$$\begin{cases} x = u\cos\alpha(t) - v\sin\alpha(t)\,, \\ y = u\sin\alpha(t) + v\cos\alpha(t)\,, \end{cases} \tag{56}$$

con u, v nuove incognite, $\alpha(t)$ funzione da determinarsi.

Le (56) equivalgono a fare una rotazione degli assi x, y dipendente da t;

---

(4) Cfr., ad es., G. Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale*, Parte II, N. Zanichelli, Bologna 1941, pp. 362-363 (teorema di Bohr e Neugebauer).

si ha inoltre

$$(57)\qquad \begin{cases} u = x\cos\alpha(t) + y\sin\alpha(t)\,, \\ v = -x\sin\alpha(t) + y\cos\alpha(t)\,. \end{cases}$$

Dalle (56), (57) segue che u e v soddisfano al sistema

$$(58)\qquad \begin{cases} u' = U(t, u, v)\,, \\ v' = V(t, u, v)\,, \end{cases}$$

dove è

$$(59)\qquad \begin{cases} U(t, u, v) = X\cos\alpha + Y\sin\alpha + \alpha' v\,, \\ V(t, u, v) = -X\sin\alpha + Y\cos\alpha - \alpha' u\,. \end{cases}$$

Si ha inoltre

$$U_u = X_u\cos\alpha + Y_u\sin\alpha = (X_x\cos\alpha + X_y\sin\alpha)\cos\alpha + (Y_x\cos\alpha + Y_y\sin\alpha)\sin\alpha =$$

$$= \frac{X_x + Y_y}{2} + \frac{X_x - Y_y}{2}\cos 2\alpha + \frac{X_y + Y_x}{2}\sin 2\alpha\,,$$

$$U_v = X_v\cos\alpha + Y_v\sin\alpha + \alpha' =$$

$$= (-X_x\sin\alpha + X_y\cos\alpha)\cos\alpha + (-Y_x\sin\alpha + Y_y\cos\alpha)\sin\alpha + \alpha' =$$

$$= \alpha' + \frac{X_y - Y_x}{2} + \frac{X_y + Y_x}{2}\cos 2\alpha - \frac{X_x - Y_y}{2}\sin 2\alpha\,,$$

$$V_u = -X_u\sin\alpha + Y_u\cos\alpha - \alpha' =$$

$$= -(X_x\cos\alpha + X_y\sin\alpha)\sin\alpha + (Y_x\cos\alpha + Y_y\sin\alpha)\cos\alpha - \alpha' =$$

$$= -\alpha' - \frac{X_y - Y_x}{2} + \frac{X_y + Y_x}{2}\cos 2\alpha - \frac{X_x - Y_y}{2}\sin 2\alpha\,,$$

$$V_v = -X_v\sin\alpha + Y_v\cos\alpha =$$

$$= -(-X_x\sin\alpha + X_y\cos\alpha)\sin\alpha + (-Y_x\sin\alpha + Y_y\cos\alpha)\cos\alpha =$$

$$= \frac{X_x + Y_y}{2} - \frac{X_x - Y_y}{2}\cos 2\alpha - \frac{X_y + Y_x}{2}\cos 2\alpha\,.$$

Ne segue, per le (54),

$$U_u(t, 0, 0) = \lambda\,, \quad U_v(t, 0, 0) = \alpha' + B\,, \quad V_u(t, 0, 0) = -\alpha' - B\,, \quad V_v(t, 0, 0) = \lambda\,.$$

Perciò, se prendiamo

$$\alpha = -Bt\,,$$

il sistema (58) si scrive

$$\text{(60)} \qquad \begin{cases} u' = \lambda u + F(t, u, v)\,, \\ v' = \lambda v + G(t, u, v)\,, \end{cases}$$

con $F = [2]$, $G = [2]$. *Il sistema (60) è del tipo del nodo a stella.*

I due casi del fuoco e del nodo a stella sono perciò topologicamente equivalenti, poichè si passa dall'uno all'altro mediante la trasformazione (56), con $\alpha = -Bt$.

Osserviamo però che se $X(t, x, y)$ e $Y(t, x, y)$ sono funzioni periodiche di t, di periodo T, le $U(t, u, v)$, $V(t, u, v)$ risultano, in generale, quasi periodiche. Infatti $U(t, u, v)$, ad esempio, si ottiene, per le (58) e (59), ponendo $\eta = t$ nella funzione

$$U(t, \eta, u, v) = X(t, u \cos B\eta + v \sin B\eta, -u \sin B\eta + v \cos B\eta) \cos B\eta -$$
$$- Y(t, u \cos B\eta + v \sin B\eta, -u \sin B\eta + v \cos B\eta) \sin B\eta - Bv\,,$$

la quale è periodica, in t e in η, con i periodi T e $2\pi/B = T'$. Siamo perciò nel caso considerato nelle Osservazioni del precedente paragrafo. Se $w(t, u, v) = 0$ è una superficie principale relativa al sistema (60), la superficie, nello spazio (t, x, y), di equazione

$$\text{(61)} \qquad w(t, x \cos Bt - y \sin Bt, x \sin Bt + y \cos Bt) = 0$$

si dirà una *superficie principale relativa al caso del fuoco.*

Si deve però notare che [in accordo con quanto si è detto in (M), § 1] non è possibile esprimere, risolvendo la (61), y in funzione di (t, x) in *tutto* l'intervallo $-\infty < t < +\infty$. La (61) è equivalente nell'intorno di un punto $(\bar{t}, 0, 0)$ a un'equazione del tipo $y = y(t, x)$, oppure $x = x(t, y)$, ma solo per t variabile in un conveniente intervallo limitato $(\bar{t} - h_1) \leqslant t \leqslant (\bar{t} + h_2)$. Infine per ogni punto $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y})$, appartenente a un conveniente intorno $(x^2 + y^2 \leqslant \sigma^2)$ dell'asse t, passa una e una sola superficie principale.

3. – La teoria svolta in (M) permette di studiare alcuni altri casi notevoli. Infatti l'esistenza di una superficie principale [relativa alla soluzione $\{0, 0\}$ del sistema (8)] di equazione

$$y = y(t, x)$$

con le condizioni

$$y(t, 0) = 0 , \qquad \frac{\partial y(t, 0)}{\partial x} = y_1$$

è assicurata se sono soddisfatte le condizioni seguenti [5]:

a) Risulta

$$B \neq 0 . \tag{62}$$

b) La y_1 è una radice dell'equazione

$$By_1^2 + (A - D)y_1 - C = 0 . \tag{63}$$

c) Si ha

$$A + By_1 \neq 0 \tag{64}$$

e inoltre

$$\varrho_n = (n + 1)(A + By_1) - (D - By_1) \neq 0 , \qquad (n = 1, 2, ...). \tag{65}$$

Possiamo perciò considerare anche i seguenti casi.

I. – Sia

$$\lambda^2 = \Delta > 0 , \qquad B \neq 0 . \tag{66}$$

L'equazione (63) ha allora radici coincidenti e si ottiene per y_1 l'unico valore

$$y_1 = -\frac{A - D}{2B} . \tag{67}$$

Non può essere poi

$$y_1 = -A/B$$

(5) L. AMERIO, loc. cit. in (2), formule (17), (24), (31), (39).

poichè si avrebbe, per la (63),

$$\dot{B}\frac{A^2}{B^2} - (A - D)\frac{A}{B} - C = \frac{\Delta}{B} = 0$$

contro la (66).

Si ha infine, per le (65) e (67),

$$\varrho_n = n\lambda \neq 0 \, .$$

Perciò *se valgono le* (66) *esiste una e una sola superficie principale.*

II. - *Siano verificate le condizioni*

$$\lambda \neq 0 \, , \tag{68}$$

$$\Delta = 0 \, . \tag{69}$$

Per la (68) non può essere

$$A = D = 0 \, .$$

Supponiamo, ad esempio,

$$A \neq 0 \, . \tag{70}$$

Allora la (69) equivale a scrivere

$$C = kA \, , \qquad D = kB \, ,$$

con k costante. Il sistema (8) si scrive perciò

$$\begin{cases} x' = Ax + By + \varphi \, , \\ y' = kAx + kBy + \psi \, . \end{cases} \tag{71}$$

Possiamo inoltre supporre verificata la (62). Infatti, se è $B = 0$ il sistema (71) diventa

$$\begin{cases} x' = Ax + \varphi \, , \\ y' = kAx + \psi \, . \end{cases} \tag{72}$$

Posto allora

$$z = x + my\ ,$$

si ricava

$$z' = x' + my' = A(1 + km)x + \varphi + m\psi = A(1 + km)(z - my) + \omega(t, z, y)\ .$$

Se la costante m si prende in modo che risulti

$$1 + km \neq 0\ , \qquad m \neq 0\ ,$$

il sistema

$$\begin{cases} z' = A(1 + km)(z - my) + \omega(t, z, y)\ , \\ y' = kA(z - my) + \psi(t, z - my, y) \end{cases}$$

è allora del tipo richiesto.

In virtù della (69) si ottengono per y_1, risolvendo la (63), i valori

$$\overline{y}_1 = -\frac{A - D}{2B} + \frac{\lambda}{B} = \frac{D}{B}\ ;$$

$$y_1^* = -\frac{A - D}{2B} - \frac{\lambda}{B} = -\frac{A}{B}\ .$$

Per il valore y_1^* risulta

$$A + By_1^* = 0$$

e quindi non è soddisfatta la (64).

Si ha invece

$$A + B\overline{y}_1 = A + D = 2\lambda \neq 0$$

e inoltre, per la (65),

$$\varrho_n = (n + 1)\lambda \neq 0\ .$$

Esiste perciò almeno una superficie principale S e precisamente quella per cui è

$$\frac{\partial y(t, 0)}{\partial x} = \frac{D}{B}\ . \tag{73}$$

Studiamo il comportamento asintotico degli integrali appartenenti ad S.

Mediante la trasformazione

$$(74)\qquad \begin{cases} \xi = x\,, \\ \eta = y - y(t, x) = y - x\dfrac{D}{B} + [2] \end{cases}$$

otterremo un sistema in $\{\xi(t), \eta(t)\}$ che ammette come superficie principale il piano $\eta = 0$.

Si ha precisamente, per la (69), il sistema

$$(75)\qquad \begin{cases} \xi' = x' = Ax + By + [2] = A\xi + B\left(\eta + \xi\dfrac{D}{B}\right) + [2] = 2\lambda\xi + B\eta + [2] \\ \eta' = y' - \dfrac{\partial y}{\partial t} - \dfrac{\partial y}{\partial x}\,x' = \\ \qquad = Cx + Dy - \dfrac{D}{B}(Ax + By) + [2] = -\dfrac{\Delta}{B}x + [2] = [2]\,. \end{cases}$$

Poichè il sistema (75) deve ammettere la soluzione $\{\xi(t), 0\}$ con il valore iniziale $\xi_0 = \xi(t_0)$ arbitrario, esso assume la forma

$$\begin{cases} \xi' = 2\lambda\xi + B\eta + F(t, \xi, \eta)\,, \\ \eta' = \eta G(t, \xi, \eta)\,. \end{cases}$$

Pertanto gli integrali appartenenti a S soddisfano all'equazione

$$\xi' = 2\lambda\xi + F(t, \xi, 0) = 2\lambda\xi + \xi^2 f(t, \xi)\,,$$

dove è

$$|f(t, \xi)| \leqslant M \qquad \text{per} \qquad |\xi| \leqslant h.$$

Preso k, con $0 < k \leqslant h$, $k < 2|\lambda|/M$, supponiamo inoltre che per un integrale $\xi(t)$ il valore iniziale ξ_0 soddisfi alla condizione

$$|\xi_0| < k\,.$$

Si dimostra allora, come al § 1, che risulta

$$(76)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{t\to+\infty} e^{2|\lambda|t}\,\xi(t) = \mu_0 & \text{se} \quad \lambda < 0, \\ \lim\limits_{t\to-\infty} e^{2\lambda|t|}\,\xi(t) = \mu_0 & \text{se} \quad \lambda > 0, \end{cases}$$

dove μ_0 ha un valore *finito*. Esiste inoltre un valore *finito* $t_1 < t_0$ (se è $\lambda < 0$) tale che per $t \leqslant t_1$ risulti

$$|\xi(t)| \geqslant k \,.$$

Le (76) precisano in modo molto espressivo il modo con cui l'integrale $\xi(t)$ diventa infinitesimo per $t \to +\infty$ oppure per $t \to -\infty$.

Possiamo applicare quanto precede allo studio del comportamento asintotico degli integrali nell'intorno di un ciclo limite σ per un sistema del tipo

$$\left\{\begin{aligned} x' &= X(x, y)\,, \\ y' &= Y(x, y)\,. \end{aligned}\right. \tag{77}$$

In tal caso, nello spazio (t, x, y) esiste una superficie cilindrica s, con le generatrici parallele all'asse t, tutta costituita da integrali del tipo

$$\left\{\begin{aligned} x &= x^*(t-k)\,, \\ y &= y^*(t-k)\,, \end{aligned}\right. \tag{78}$$

ove $\{x^*(t), y^*(t)\}$ è una soluzione periodica, di periodo T, del sistema (77) e k è una costante arbitraria.

Fissiamo un valore $\bar{k}$ di k, cioè uno degli integrali, $\bar{l}$, appartenenti a s, e cerchiamo di individuare quegli integrali del sistema (77) che sono asintotici a $\bar{l}$.

Posto

$$\left\{\begin{aligned} u &= x - x^*(t-\bar{k})\,, \\ v &= y - y\;\,(t-\bar{k})\,, \end{aligned}\right. \tag{79}$$

otteniamo un sistema in $\{u(t), v(t)\}$ del tipo

$$\left\{\begin{aligned} u'(t) &= U(t, u, v)\,, \\ v'(t) &= V(t, u, v)\,, \end{aligned}\right. \qquad [U(t, 0, 0) = V(t, 0, 0) = 0]\,, \tag{80}$$

ove U e V sono funzioni periodiche di t, con periodo T.

Alla soluzione $\{0, 0\}$ del sistema (80) [trasformato in modo da rendere il sistema alle variazioni a coefficienti costanti] corrispondono, come è noto, valori $\Delta = 0$ e, almeno nel caso generale, $\lambda \neq 0$.

Allora nello spazio (t, u, v) esiste una superficie $\bar{S}'$ la quale è costituita, per quanto si è precedentemente visto, di linee integrali asintotiche alla linea $\{0, 0\}$.

Questa superficie è perciò distinta dalla superficie $\bar{s}'$ trasformata, mediante le (79), di s, poichè $\bar{s}'$ è costituita da soluzioni *periodiche* del sistema (80).

Pertanto $\bar{S}'$ coincide con quella superficie principale relativa alla soluzione $\{0, 0\}$ di cui abbiamo dimostrato l'esistenza. Si noti che in questo caso, pur valendo le (68) e (69), esistono tutte e due le superficie principali relative alla soluzione $\{0, 0\}$ e sono s' e $\bar{S}'$.

Inoltre, essendo $\lambda^2 > \Delta$, s' ed $\bar{S}'$ non sono mai tangenti. Sia $\bar{S}$ la trasformata, nello spazio (t, x, y), di $\bar{S}'$; allora $\bar{S}$ è il luogo cercato. Si tratta di una superficie la cui sezione coi piani $t = \text{cost.}$ presenta il periodo T, e che *interseca* la superficie s secondo la linea $\bar{l}$.

Lo stesso avviene per tutte le altre linee l che costituiscono s, a ciascuna delle quali pertanto corrisponde *una* superficie S, luogo delle linee integrali del sistema (77) asintotiche a l.