JAURÈS CECCONI (*)

Sul teorema di Stokes. (**)

1. – La uguaglianza di STOKES è stata finora stabilita per vaste classi di di superficie ([1], [11]) (°), ma non è ancora stata dimostrata, per quanto ci risulta (¹), per la classe delle superficie orientate di FRÉCHET, del tipo della 2-cella, per le quali si facciano le sole ipotesi della quadrabilità secondo LEBESGUE e della rettificabilità del contorno.

Le fondamentali ricerche di L. CESARI ([4], [5], [6], [7], [8]) sul problema dell'area secondo LEBESGUE delle superficie ci consentono, come vogliamo mostrare in questa Nota, di fare un ulteriore passo in modo da pervenire al seguente

Teorema. *Sia S una superficie orientata di Fréchet del tipo della 2-cella e sia*

$$(1) \qquad (T,\,Q):\qquad x = x(u,v)\,,\quad y = y(u,v)\,,\quad z = z(u,v)\,,\qquad (u,v)\in Q$$

una sua rappresentazione sul quadrato unitario $Q\equiv\{0\leqslant u\leqslant 1,\ 0\leqslant v\leqslant 1\}$, orientato positivamente, del piano (u,v).

Sia $\theta(S)$ la curva chiusa orientata immagine secondo (T,Q) del contorno orientato positivamente, Q^*, di Q; costituente perciò il contorno di S.

Sia $F(x,y,z)$ una funzione definita in un insieme aperto R contente l'insieme $[S]$ sostegno della superficie S.

Siano soddisfatte le seguenti ipotesi:

a) *L'area secondo Lebesgue $A(S)$ di S è finita.*

b) *La lunghezza $L[\theta(S)]$ della curva $\theta(S)$ è finita.*

c) *La funzione $F(x,y,z)$ è continua in R insieme con le sue derivate parziali $F_y(x,y,z)$, $F_z(x,y,z)$.*

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica LEONIDA TONELLI, Università Pisa (Italia).

(**) Ricevuto il 14-X-1952.

(°) I numeri in neretto e parentisi quadra si riferiscono alla bibliografia in fine del lavoro.

(¹) Questo lavoro era già stato preparato per la stampa quando apparve la Nota R. CACCIOPPOLI, *Misura e integrazione sulle varietà parametriche*, III [Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) **12**, 629-634 (1952)] in cui il CACCIOPPOLI studia, fra l'altro, l'uguaglianza di STOKES nella stessa classe di superficie che è qui considerata.

Allora esistono i seguenti integrali di Weierstrass, introdotti da L. Tonelli (il primo) [14] *e da L. Cesari* [7] (2),

$$\int_{\theta(S)} F(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \iint_S F_y(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,, \qquad \iint_S F_z(x, y, z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,,$$

i quali dipendono solo ([14], [7]) *dalla linea* $\theta(S)$ *e dalla superficie* S *rispettivamente, e sussiste la seguente uguaglianza (di Stokes):*

$$\iint_S F_z(x, y, z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x - \iint_S F_y(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\theta(S)} F(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,.$$

Come si è esplicitamente fatto osservare, nessuna restrizione è fatta sulla classe delle superficie considerate oltre alle due essenziali a) e b); la ipotesi fatta in c) sulla funzione $F(x, y, z)$ ci è parsa la più naturale in quanto è quella che si fa usualmente per il campo di forze della Fisica matematica. Il Teorema ora enunciato corrisponde perciò completamente alla nostra precedente analoga estensione [2] del Teorema di GAUSS-GREEN; è da rilevare, però, che mentre per il Teorema di GAUSS-GREEN occorreva una ulteriore condizione sulla misura del sostegno $[S]$ della superficie S, qui nessuna analoga condizione è necessaria.

Vogliamo inoltre osservare che i metodi impiegati consentono una ulteriore estensione al caso di un campo di forze continue rispetto alle variabili separatamente e dotate di derivate parziali soltanto approssimativamente continue. Per ragioni di brevità rimandiamo però questa estensione ad un successivo lavoro.

2. – In tutto il corso del lavoro S sarà una superficie orientata di FRÉCHET, del tipo della 2-cella, data mediante le (1), che goda almeno delle proprietà a) e b) dell'enunciato del Teorema; analogamente sarà inteso che la funzione $F(x, y, z)$ goda della proprietà ivi espressa in c).

3. – Sia S una superficie. Sia (x, y, z) un punto appartenente all'insieme $[S]$ dei punti di S. L'insieme $T^{-1}(x, y, z)$, costituito dai modelli di (x, y, z) secondo (T, Q), è chiuso ed i suoi componenti massimali sono continui g appartenenti a Q. I continui g sono perciò continui di Q sui quali le funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ sono tutte e tre costanti. Diremo G l'insieme di tutti i continui g componenti di qualche insieme $T^{-1}(x, y, z)$.

---

(2) Il secondo ed il terzo di questi integrali, nella Nota citata di L. CESARI, sono indicati rispettivamente con le notazioni

$$\iint_S F_y(x, y, z)\cdot w\,, \qquad \iint_S F_z(x, y, z)\cdot v\,.$$

4. – Si dice che una superficie S è aperta non degenere se esiste una rappresentazione di S, sia la stessa (T, Q) del n. 1, tale che:

a) per ogni continuo g di G l'insieme aperto $Q^0 - Q^0 g$ (3) è connesso,
b) nessun continuo g di G contiene il contorno Q^* di Q.

È noto che ogni altra rappresentazione di S gode delle stesse proprietà.

Si dice che una superficie S è di tipo A se esiste una rappresentazione di S, sia la stessa (T, Q) del n. 1, tale che, detto E_2 il piano (u, v),

a) per ogni continuo g di G l'insieme $E_2 - g$ è connesso.

È noto, anche in questo caso, che ogni altra rappresentazione di S gode della stessa proprietà.

5. – Per le superficie aperte non degeneri sussiste il seguente teorema di rappresentazione ([3], [12]):

T e o r e m a. Se S è aperta non degenere, di area finita secondo LEBESGUE, esiste una sua rappresentazione sul quadrato unità Q,

$$(T, Q): \qquad x = x^*(u, v)\,, \quad y = y^*(u, v)\,, \quad z = z^*(u, v)\,, \quad (u, v) \in Q\,,$$

che gode delle seguenti proprietà:

a) Le funzioni $x^*(u, v)$, $y^*(u, v)$, $z^*(u, v)$ sono assolutamente continue secondo TONELLI su Q.

b) Le derivate parziali x^*_u, x^*_v, ..., z^*_v, che esistono in quasi tutto Q in virtù di a), sono di quadrato sommabile su Q.

c) Posto

$$E = x_u^{*2} + y_u^{*2} + z_u^{*2}\,, \quad G = x_v^{*2} + y_v^{*2} + z_v^{*2}\,, \quad F = x_u^* x_v^* + y_u^* y_v^* + z_u^* z_v^*\,,$$

è, quasi ovunque su Q,

$$E = G\,, \qquad F = 0\,.$$

Una tale rappresentazione di S è detta quasi conforme su Q.

6. – Per la classe di superficie $S \equiv (T, Q)$ che godono delle proprietà a) e b) del teorema enunciato nel precedente numero A. MAMBRIANI [10] ha conseguito un notevole risultato intorno al problema, così detto di GEÖCZE, concernente

(3) Se H è un insieme, H^0 indica l'insieme dei punti interni ad H.

l'esistenza di superficie poliedriche inscritte in S e tendenti in area ad S. Successivamente L. CESARI [8], in un lavoro in cui ha risolto il problema di GEÖCZE nel caso generale, ha fatto osservare che se la superficie S ha il contorno $\theta(S)$ rettificabile si può pervenire al seguente

Teorema. Se $S \equiv (T, Q)$ verifica le ipotesi a) e b) del teorema enunciato nel numero precedente e se il contorno $\theta(S)$ di S è una linea rettificabile, allora per ogni intero N esiste una superficie poliedrica

$$P_N \equiv (T_N, Q): \quad x = x_N(u, v), \quad y = y_N(u, v), \quad z = z_N(u, v), \quad (u, v) \in Q,$$

orientata, inscritta in S, la cui linea contorno è inscritta nella linea contorno di S, dotata delle seguenti proprietà:

a) $A(P_N) < A(S) + 1/N$,

b) $d[T(u, v), T_N(u, v)] < 1/N, \quad (u, v) \in Q$ ( ).

Risulta perciò, in particolare,

c) $L[\theta(P_N)] < L[\theta(S)]$.

7. – Osserviamo ora che il nostro Teorema è acquisito, in virtù di ragionamenti di carattere elementare, per superficie poliedriche orientate.

Osserviamo che per ogni superficie aperta non degenere, in virtù del teorema enunciato nel n. 5, sono soddisfatte le ipotesi del teorema di L. CESARI enunciato nel n. precedente, e che in virtù di questo teorema esiste una successione di superficie poliedriche orientate P_N per le quali si ha

$$\lim_{N\to\infty} A(P_N) = A(S), \quad \lim_{N\to\infty} L[\theta(P_N)] = L[\theta(S)], \quad \lim_{N\to\infty} \|P_N, S\| = 0,$$

e di conseguenza

$$\lim_{N\to\infty} \|\theta(P_N), \theta(S)\| = 0,$$

ove con $\|P_N, S\|$ e con $\|\theta(P_N), \theta(S)\|$ si sono indicate rispettivamente le distanze di FRÉCHET fra le superficie P_N, S, e fra le linee $\theta(P_N)$, $\theta(S)$.

([4]) $T(u, v)$ indica il punto della superficie $S \equiv (T, Q)$ corrispondente al punto (u, v) di Q, analogo significato ha $T_N(u, v)$. La notazione $d[T(u, v), T_N(u, v)]$ indica la distanza fra questi due punti.

In virtù (⁵) dei noti teoremi di approssimazione degli integrali di WEIERSTRASS di linea e di superficie, deduciamo allora il nostro Teorema nel caso in cui S sia una superficie aperta non degenere.

8. – Fino ad affermazione contraria la superficie S sarà supposta di tipo A oltre che soddisfacente alle ipotesi formulate nel n. 3.

Allo scopo di dimostrare il nostro Teorema per superficie di questa classe, avremo bisogno di una lieve estensione del concetto di integrale di WEIER-

---

(⁵) I due teoremi di cui si fa uso sono i seguenti:

Teorema I. Sia γ una curva continua orientata di FRÉCHET, rettificabile, sia $F(x, y, z)$ una funzione continua in un insieme aperto R contenente il sostegno $[\gamma]$ di γ. Sia $\{\gamma_n\}$, $(n = 1, 2, \ldots)$, una successione di curve continue orientate di FRÉCHET, rettificabili, tendente a γ nel senso di FRÉCHET, e tale che risulti

$$\lim_{n\to\infty} L(\gamma_n) = L(\gamma)\,.$$

Allora esistono gli integrali di WEIERSTRASS

$$\int_\gamma F(x, y, z)\,dx\,, \qquad \int_{\gamma_n} F(x, y, z)\,dx\,, \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

e si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_n} F(x, y, z)\,dx = \int_\gamma F(x, y, z)\,dx\,.$$

Teorema II. Sia S una superficie continua orientata di FRÉCHET, quadrabile, sia $F(x, y, z)$ una funzione continua in un insieme aperto R contenente il sostegno $[S]$ di S. Sia S_n, $(n = 1, 2, \ldots)$, una successione di superficie continue orientate di FRÉCHET, quadrabili, tendente ad S nel senso di FRÉCHET e tale che risulti

$$\lim_{n\to\infty} A(S_n) = A(S)\,.$$

Allora esistono i seguenti integrali di WEIERSTRASS:

$$\iint_S F(x, y, z)\,dy\,dz\,, \qquad \iint_{S_n} F(x, y, z)\,dy\,dz\,, \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

ed analoghi, e si ha

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{S_n} F(x, y, z)\,dy\,dz = \iint_S F(x, y, z)\,dy\,dz\,.$$

Il primo di questi teoremi è contenuto in TONELLI ([15], p. 302), tenendo presente che l'integrale di WEIERSTRASS, il quale è indipendente dalla rappresentazione di γ, coincide, per rappresentazioni assolutamente continue di γ, con quello di LEBESGUE. Il secondo di questi teoremi è un caso particolare di uno dato da L. CESARI nella Nota [7] (p. 100).

STRASS in modo da poter considerare integrali estesi ad una trasformazione (T, α), essendo α un insieme aperto relativamente a Q.

9. – Sia S una superficie e sia (T, Q) la sua rappresentazione considerata nel n. 1. Sia α un insieme aperto relativamente a Q. Sia

$$(T, \alpha): \qquad x = x(u, v)\,, \quad y = y(u, v)\,, \quad z = z(u, v)\,, \qquad (u, v) \in \alpha\,,$$

la trasformazione continua definita da (T, Q) su α.

Siano (T_1, α), (T_2, α), (T_3, α) le trasformazioni piane associate a (T, α). Anche in questo caso [6] possono definirsi le funzioni

$$\Psi(y, z;\, T_1, \alpha),\quad \Psi(z, x;\, T_2, \alpha),\quad \Psi(x, y;\, T_3, \alpha),\quad G_s(T, \alpha),\quad T_s(T, \alpha),\quad (s = 1, 2, 3)\,,$$

$$G(T, \alpha)\,, \qquad T(T, \alpha)\,,$$

essendo, ad esempio,

$$\begin{aligned} \Psi(y, z;\, T_1, \alpha) &= \operatorname{ext}_{\sigma_r}\sup \sum |O(y, z;\, T_1, r_i)|\,, \\ G_1(T, \alpha) &= \operatorname{ext}_{\sigma_r}\sup \sum \iint |O(y, z;\, T_1, r_i)|\, dy\, dz\,, \\ T_1(T, \alpha) &= \operatorname{ext}_{\sigma_r}\sup \sum \left| \iint O(y, z;\, T_1, r_i)\, dy\, dz \right|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(T,\alpha) = \operatorname{ext}_{\sigma_r}\sup \sum \Big[\Big(\iint |O(y, z;\, T_1, r_i)|\, dy\, dz\Big)^2 + \\ + \Big(\iint |O(z, x;\, T_2, r_i)|\, dz\, dx\Big)^2 + \Big(\iint |O(x, y;\, T_3, r_i)|\, dx\, dy\Big)^2 \Big]^{1/2}, \end{aligned}$$

ove con σ_r abbiamo indicato un qualsiasi gruppo finito di regioni di JORDAN $r_1, r_2, \ldots, r_n$ semplicemente connesse, appartenenti ad α, prive a due a due di punti interni in comune, e con $O(y, z;\, T_1, r_i)$ abbiamo indicato l'indice topologico del punto (y, z) rispetto alla curva $T_1(r_i^*)$ immagine del contorno r_i^* di r_i secondo (T_1, Q), se $(y, z) \notin T_1(r_i^*)$, abbiamo indicato zero altrimenti.

Parimenti si introducono le quantità

$$W_1(T, \alpha) = \iint \Psi(y, z;\, T_1, \alpha)\, dy\, dz$$

ed analoghe, e si dimostrano le uguaglianze

$$G(T, \alpha) = W(T, \alpha)\,, \qquad G_s(T, \alpha) = T_s(T, \alpha) = W_s(T, \alpha)\,, \quad (s = 1, 2, 3).$$

Anche in questo caso, ed in virtù della ipotesi che $A(S)$ è finita, si può provare che, fissato ad arbitrio $\gamma > 0$, esistono quanti si vogliono gruppi finiti di poligoni $[\pi_i, (i = 1, 2, \ldots, n)]$ appartenenti ad α, a due a due privi di punti interni in comune, per i quali, posto

$$\delta = \max_{i=1,2,\dots,n} \operatorname{diam}\,[T(\pi_i)]\,, \qquad m = \max_{s=1,2,3} |E_s|\,, \qquad E_s = \sum_{i=1}^{n} T_s(\pi_i^*)\,,$$

$$\mu = \max\left[T(T,\alpha) - \sum_{i=1}^{n} t(\pi_i),\ T_s(T,\alpha) - \sum_{i=1}^{n} t_s(\pi_i),\ (s=1,2,3)\right],$$

$$t_1(\pi_i) = |\tau_1(\pi_i)| = \left|\iint O(y,z;\,T_1,\pi_i)\,dy\,dz\right| \quad \text{ed analoghe,}$$

$$t(\pi_i) = [t_1^2(\pi_i) + t_2^2(\pi_i) + t_3^2(\pi_i)]^{1/2}\,,$$

si ha

$$\delta < \gamma\,, \qquad m < \gamma\,, \qquad \mu < \gamma\,.$$

I numeri δ, m, μ si chiamano indici del gruppo di poligoni $[\pi_i]$.

10. – Sia $S \equiv (T, Q)$ una superficie e sia α un insieme aperto relativamente a Q.

Sia $f(x, y, z, u, v, w)$ una funzione dei sei argomenti x, y, z, u, v, w definita per ogni (x, y, z) appartenente all'insieme aperto R considerato nel n. 1 e per ogni terna di numeri reali u, v, w, la quale soddisfi le seguenti condizioni:

a) Sia continua in ogni punto $(x, y, z) \in R$ e per ogni terna di numeri reali non tutti nulli.

b) Sia positivamente omogenea di grado 1 rispetto alle variabili u, v, w.

c) Sia $f(x, y, z, 0, 0, 0) = 0$ per ogni $(x, y, z) \in R$.

Sia $[\pi_i,\ (i = 1, 2, \dots, n)]$ un gruppo finito di poligoni appartenenti ad α, privi a due a due di punti interni in comune. Prendiamo in ciascuno dei poligoni $[\pi_i]$ un punto (u_i, v_i). Sia (x_i, y_i, z_i) il punto ad esso corrispondente sulla superficie S. Consideriamo infine la somma

$$\sum_{i=1}^{n} f[x_i, y_i, z_i, \tau_1(\pi_i), \tau_2(\pi_i), \tau_3(\pi_i)]\,.$$

Con lo stesso ragionamento effettuato da L. CESARI nella Nota [7] si dimostra che esiste il limite

$$\lim_{\delta, m, \mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} f[x_i, y_i, z_i, \tau_1(\pi_i), \tau_2(\pi_i), \tau_3(\pi_i)]$$

che sarà chiamato nel seguito «integrale di WEIERSTRASS di $f(x, y, z, u, v, w)$ esteso alla trasformazione (T, α)» ed indicato con il simbolo

$$\iint_{(T,\,\alpha)} f(x, y, z, u, v, w) \,.$$

Se in particolare $\alpha \equiv Q$ si ricade nell'integrale considerato da L. CESARI [7].

Se $f(x, y, z, u, v, w) = G(x, y, z)\cdot w$, con $G(x, y, z)$ funzione continua per $(x, y, z) \in R$, l'integrale ora definito sarà indicato con

$$\iint_{(T,\,\alpha)} G(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \,,$$

ed in modo analogo sarà definito

$$\iint_{(T,\,\alpha)} G(x, y, z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x \,.$$

11. - Nel seguito faremo uso del seguente

Lemma. *Sia S una superficie data mediante le* (1). *Sia $f(x, y, z, u, v, w)$ una funzione che goda delle proprietà espresse nel* n. *precedente. Siano α e β due insiemi aperti relativamente a Q, privi di punti in comune, per i quali si abbia*

$$G(T, Q) = G(T, \alpha) + G(T, \beta)\,, \qquad G_s(T, Q) = G_s(T, \alpha) + G_s(T, \beta)\,, \qquad (s = 1, 2, 3).$$

Allora è anche

$$\iint_{(T,\,Q)} f(x, y, z, u, v, w) = \iint_{(T,\,\alpha)} f(x, y, z, u, v, w) + \iint_{(T,\,\beta)} f(x, y, z, u, v, w) \,.$$

Dimostrazione. Fissato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, determiniamo $\gamma > 0$ in modo che per ogni gruppo finito di poligoni di Q, privi a due a due di punti interni in comune, $[\pi_i,\ (i = 1, 2, ..., n)]$, di indici $< \gamma$, e per ogni scelta del punto (u_i, v_i) in π_i si abbia

$$\left| \iint_{(T,\,Q)} f(x, y, z, u, v, w) - \sum_{i=1}^{n} f[x_i, y_i, z_i, \tau_1(\pi_i)\ \tau_2(\pi_i), \tau_3(\pi_i)] \right| < \varepsilon \,.$$

Determiniamo quindi due gruppi finiti di poligoni $[\pi_j^{(1)},\ (j = 1, 2, ..., n_1)]$, $[\pi_k^{(2)},\ (k = 1, 2, ..., n_2)]$, privi a due a due di punti interni in comune, appartenenti rispettivamente ad α e β e di indici minori di $\gamma/2$ rispetto ad α e β

ordinatamente, per i quali con lo stesso significato di sopra si abbia

$$\left| \iint_{(T,\alpha)} f(x,y,z,u,v,w) - \sum_{j=1}^{n_1} f[x_j^{(1)}, y_j^{(1)}, z_j^{(1)}, \tau(\pi_j^{(1)}), \tau_2(\pi_j^{(1)}), \tau_3(\pi_j^{(1)})] \right| < \varepsilon/2 ,$$

$$\left| \iint_{(T,\beta)} f(x,y,z,u,v,w) - \sum_{k=1}^{n_2} f[x_k^{(2)}, y_k^{(2)}, z_k^{(2)}, \tau_1(\pi_k^{(2)}), \tau_2(\pi_k^{(2)}), \tau_3(\pi_k^{(2)})] \right| < \varepsilon/2 .$$

Il gruppo di poligoni di Q, $[\pi_i^{(s)}, (i = 1, 2, ..., n_s;\ s = 1, 2)]$, è, come subito si riconosce, di indici $< \gamma$ rispetto a Q.

Si ha perciò simultaneamente

$$\left| \iint_{(T,Q)} f(x,y,z,u,v,w) - \sum_{s=1}^{2} \sum_{i=1}^{n_s} f[x_i^{(s)}, y_i^{(s)}, z_i^{(s)}, \tau_1(\pi_i^{(s)}), \tau_2(\pi_i^{(s)}), \tau_3(\pi_i^{(s)})] \right| < \varepsilon ,$$

$$\left| \iint_{(T,\alpha)} f(x,y,z,u,w) + \iint_{(T,\beta)} f(x,y,z,u,v,w) - \right.$$
$$\left. - \sum_{s=1}^{2} \sum_{i=1}^{n_s} f[x_i^{(s)}, y_i^{(s)}, z_i^{(s)}, \tau_1(\pi_i^{(s)}), \tau_2(\pi_i^{(s)}), \tau_3(\pi_i^{(s)})] \right| < \varepsilon ,$$

e quindi

$$\left| \iint_{(T,Q)} f(x,y,z,u,v,w) - \iint_{(T,\alpha)} f(x,y,z,u,v,w) - \iint_{(T,\beta)} f(x,y,z,u,v,w) \right| < 2\varepsilon ,$$

dalla quale, in virtù della arbitrarietà di ε, si deduce il nostro asserto.

12. – È evidente il seguente

L e m m a. *Sia* $S \equiv (T, Q)$ *una superficie e sia* α *un insieme aperto relativamente a* Q. *Sia* $f(x, y, z, u, v, w)$ *una funzione che gode delle proprietà espresse nel* n. 10. *Si abbia inoltre*

$$G(T, \alpha) = 0 ,$$

Allora è anche

$$\iint_{(T,\alpha)} f(x,y,z,u,v,w) = 0 .$$

13. – Sia $S \equiv (T, Q)$ una superficie di tipo A. Sia G l'insieme introdotto nel n. 3 dei continui massimali di Q sui quali le funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ sono tutte e tre costanti. Sia $\{g^*\}$ la collezione dei continui g di G che incontrano la frontiera Q^* di Q. Sia F l'insieme dei punti di Q occupati dai continui g di $\{g^*\}$. Tale insieme, come è stato provato da L. CESARI ([5], p. 907), è chiuso. Consideriamo, con L. CESARI, l'insieme aperto $A = Q - F$. Siano $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots$ i componenti (6) massimali di A. Tali insiemi sono aperti e semplicemente connessi.

In virtù di un risultato stabilito da L. CESARI ([5], p. 914 e seguenti) (7), e del quale faremo uso più volte, ciascuna delle quantità $G(T, \alpha_n)$ è finita e si ha

$$G(T, Q) = \sum_{n=1}^{\infty} G(T, \alpha_n)\,, \qquad G_s(T, Q) = \sum_{n=1}^{\infty} G_s(T, \alpha_n)\,, \qquad (s = 1, 2, 3).$$

14. – Sia $f(x, y, z, u, v, w)$ una funzione che goda delle proprietà nel n. 10. Sia $\{\alpha_n\}$ la successione degli insiemi aperti considerata nel n. precedente. Mi propongo di dimostrare che, nelle nostre ipotesi, si ha

$$\iint_{(T,\, Q)} f(x, y, z, u, v, w) = \sum_{n=1}^{\infty} \iint_{(T,\, \alpha_n)} f(x, y, z, u, v, w)\,.$$

Fissato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, sia $\gamma > 0$ tale che per ogni gruppo finito di poligoni di Q, $[\pi_i, (i = 1, 2, \ldots, n)]$, di indici $< \gamma$ si abbia, con le stesse notazioni del n. 11,

$$\left| \iint_{(T,\, Q)} f(x, y, z, u, v, w) - \sum_{i=1}^{n} f[x_i, y_i, z_i, \tau_1(\pi_i), \tau_2(\pi_i), \tau_3(\pi_i)] \right| < \varepsilon/2\,.$$

Indicato con M il massimo del valore assoluto di $f(x, y, z, u, v, w)$ per $(x, y, z) \in [S]$ ed $u^2 + v^2 + w^2 = 1$, diciamo n_0 un intero tale che per esso e per tutti i suoi successivi si abbia

$$\sum_{n_0+1}^{\infty} G(T, \alpha_n) < \frac{1}{M+1} \min\,[\varepsilon, \gamma/2]\,.$$

Sia γ_1 un numero positivo $< \gamma/(2n_0)$ tale che per ogni gruppo finito di poligoni $[\pi_i^{(r)}, (i = 1, 2, \ldots, n_r)$ di α_r, $(r = 1, 2, \ldots, n_0)$, di indici $< \gamma_1$ si abbia, con lo stesso significato dei simboli,

$$\left| \iint_{(T,\, \alpha_r)} f(x, y, z, u, v, w) - \sum_{i=1}^{n_r} f[x_i^{(r)}, y_i^{(r)}, z_i^{(r)}, \tau_1(\pi_i^{(r)}), \tau_2(\pi_i^{(r)}), \tau_3(\pi_i^{(r)})] \right| < \varepsilon/(2n_0)\,.$$

(6) Il numero di questi componenti può essere eventualmente finito.

(7) Si noti che una nuova dimostrazione di questo risultato è contenuta nei nn. 18, 19, 20 del presente lavoro.

Si ha perciò in conseguenza

$$(2)\qquad \left| \sum_{r=1}^{n_0} \iint_{(T,\,\alpha_r)} f(x,y,z,u,v,w) - \sum_{r=1}^{n_0} \sum_{i=1}^{n_r} f[x_i^{(r)}, y_i^{(r)}, z_i^{(r)}, \tau_1(\pi_i^{(r)}), \tau_2(\pi_i^{(r)}), \tau_3(\pi_i^{(r)})] \right| < \varepsilon/2 .$$

Osserviamo ora che il gruppo di poligoni di Q, $[\pi_i^{(r)}, \ (i = 1, 2, ..., n_r;\ r = 1, 2, ..., n_0)]$, è di indici $< \gamma$.

È infatti

$$\operatorname*{diam}_{\substack{i=1,...,n_r\\ r=1,...,n_0}} [T(\pi_i^{(r)})] < \gamma_1 < \gamma , \qquad \max_{s=1,2,3} \left| \sum_{r=1}^{n_0} \sum_{i=1}^{n_r} T_s(\pi_i^{(r)*}) \right| \leqslant \sum \gamma/(2n_0) = \gamma/2 ,$$

$$T(T, Q) - \sum_{r=1}^{n_0} \sum_{i=1}^{n_r} t(\pi_i^{(r)}) =$$

$$= \sum_{r=1}^{n_0} [T(T, \alpha_n) - \sum_{i=1}^{n_r} t(\pi_i^{(r)})] + \sum_{n_0+1}^{\infty} T(T, \alpha_r) \leqslant \sum_{r=1}^{n_0} \gamma/(2n_0) + \gamma/2 = \gamma ,$$

ed analogamente

$$T_s(T, Q) - \sum_{r=1}^{n_0} \sum_{i=1}^{n_r} t_s(\pi_i^{(r)}) \leqslant \gamma , \qquad (s = 1, 2, 3),$$

per essere

$$T_s(T, \alpha_r) \leqslant T(T, \alpha_r) = G(T, \alpha_r) , \qquad (s = 1, 2, 3).$$

È quindi

$$\left| \iint_{(T,\,Q)} f(x, y, z, u, v, w) - \sum_{r=1}^{n_0} \sum_{i=1}^{n_r} f[x_i^{(r)}, y_i^{(r)}, z_i^{(r)}, \tau_1(\pi_i^{(r)}), \tau_2(\pi_i^{(r)}), \tau_3(\pi_i^{(r)})] \right| < \varepsilon/2 ,$$

e dal confronto con la (2) si ottiene

$$\left| \iint_{(T,\,Q)} f(x, y, z, u, v, w) - \sum_{r=1}^{n_0} \iint_{(T,\,\alpha_r)} f(x, y, z, u, v, w) \right| < \varepsilon .$$

D'altra parte è, in virtù delle ipotesi fatte su $f(x, y, z, u, v, w)$,

$$f(x, y, z, u, v, w) =$$

$$= \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \cdot f\left[x, y, z, \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}, \frac{w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\right]$$

e quindi, per ogni r,

$$\left| \iint_{(T,\,\alpha_r)} f(x, y, z, u, v, w) \right| \leqslant M \iint_{(T,\,\alpha_r)} \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}\,,$$

dalla quale, in virtù della definizione di integrale di Weierstrass, si deduce [8]

$$\left| \iint_{(T,\,\alpha_r)} f(x, y, z, u, v, w) \right| \leqslant M \cdot G(T, \alpha_r)\,.$$

Si ha quindi

$$\left| \iint_{(T,\,Q)} f(x, y, z, u, v, w) - \sum_{r=1}^{\infty} \iint_{(T,\,\alpha_r)} f(x, y, z, u, v, w) \right| =$$

$$= \left| \iint_{(T,\,Q)} f - \sum_{r=1}^{n_0} \iint_{(T,\,\alpha_r)} f - \sum_{n_0+1}^{\infty} \iint_{(T,\,\alpha_r)} f \right| \leqslant \left| \iint_{(T,\,Q)} f - \sum_{r=1}^{n_0} \iint_{(T,\,\alpha_r)} f \right| + \left| \sum_{n_0+1}^{\infty} \iint_{(T,\,\alpha_r)} f \right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + \frac{M}{M+1}\varepsilon < 2\varepsilon\,,$$

dalla quale per l'arbitrarietà di ε scende l'asserto.

Lo stesso ragionamento serve a provare il seguente Lemma che costituisce una estensione del Lemma dimostrato nel n. 11:

Lemma. Se (T, Q) è data come nel n. 1, se $f(x, y, z, u, v, w)$ è data come nel n. 10, se ω è un insieme aperto relativamente a Q, se $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$ sono insiemi aperti relativamente a Q appartenenti ad ω e privi a due a due di punti in comune, per i quali è

$$G(T, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} G(T, \omega_n)\,, \qquad G_s(T, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} G_s(T, \omega_n)\,, \qquad (s = 1, 2, 3),$$

allora è anche

$$\iint_{(T,\,\omega)} f(x, y, z, u, v, w) = \sum_{n=1}^{\infty} \iint_{(T,\,\omega_n)} f(x, y, z, u, v, w)\,.$$

---

[8] Si noti che da questa disuguaglianza discende la convergenza assoluta della serie

$$\sum_{r=1}^{\infty} \iint_{(T,\,\alpha_r)} f(x, y, z, u, v, w).$$

15. – Sia α uno degli insiemi aperti e semplicemente connessi introdotti nel n. 13. Sia $\{g\}$ la collezione dei continui di $\{g^*\}$ che hanno almeno un punto in comune con la frontiera α^* di α ed inoltre separano Q. Sia g uno di questi continui.

Sia $\gamma(g)$ l'arco chiuso di Q^* costituito dai punti di Q^* che appartengono a g, oppure che g separa da α. Tale arco, i cui estremi appartengono a g, non può esaurire tutto Q^* nè può ridursi ad un punto. Nè può accadere (ved. L. CESARI, [5], p. 908) che a continui distinti g' e g'' di $\{g\}$ corrispondano archi $\gamma(g')$, $\gamma(g'')$ aventi punti in comune.

La collezione $\{g\}$ è perciò una collezione numerabile di continui. Siano $g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots$ i continui di $\{g\}$.

Sia $(T^{(1)}, Q)$ la trasformazione che è dedotta da (T, Q) nel seguente modo. Consideriamo il continuo g_1 di $\{g\}$ e l'insieme aperto $Q - Q^* - g_1$. Tale insieme aperto ha un numero finito o una infinità numerabile di componenti, dei quali uno solo, sia esso δ_1, contiene α. Definiamo allora $(T^{(1)}, Q)$ coincidente con (T, Q) in $\delta_1 + \delta_1^*$. Definiamo $(T^{(1)}, Q)$ in $Q - (\delta_1 + \delta_1^*)$ in modo che essa sia ivi costante con il valore che ha sul continuo g_1.

La trasformazione $(T^{(1)}, Q)$ così definita è continua.

Ripetiamo la operazione a partire dalla trasformazione $(T^{(1)}, Q)$ con il continuo g_2. Otterremo in tal modo una trasformazione continua $(T^{(2)}, Q)$; e così indefinitamente.

Otteniamo con ciò una successione $\{(T^{(n)}, Q)\}$ di trasformazioni continue, la quale, per il fatto che gli insiemi $Q - \delta_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$, non hanno punti in comune, converge verso una trasformazione $(T^{(0)}, Q)$.

Il modulo di continuità

$$\omega(\delta) = \underset{d[(u,v),(u',v')]\leq\delta}{\text{ext sup}} \left[\{x(u,v) - x(u',v')\}^2 + \{y(u,v) - y(u',v')\}^2 + \right.$$
$$\left. + \{z(u,v) - z(u',v')\}^2\right]^{1/2}$$

di (T, Q) è maggiore od uguale al modulo di continuità $\omega_n(\delta)$ di ciascuna delle trasformazioni $(T^{(n)}, Q)$. Perciò le trasformazioni $(T^{(n)}, Q)$ sono ugualmente continue. Da ciò si deduce che la convergenza [9] di $(T^{(n)}, Q)$ verso $(T^{(0)}, Q)$ è uniforme e che quindi anche $(T^{(0)}, Q)$ è una trasformazione continua.

---

[9] Ciò vuol dire che, se si è posto

$$(T^{(n)}, Q): \quad x = x_n(u,v), \quad y = y_n(u,v), \quad z = z_n(u,v), \quad (u,v) \in Q,$$
$$(T^{(0)}, Q): \quad x = x_0(u,v), \quad y = y_0(u,v), \quad z = z_0(u,v), \quad (u,v) \in Q,$$

la successione $\{x_n(u,v)\}$ converge uniformemente su Q verso $x_0(u,v)$, ed analogamente per $y_n(u,v)$, $z_n(u,v)$.

Osserviamo infine che la trasformazione $(T^{(0)}, Q)$ è aperta non degenere. Diciamo infatti G_0 la collezione dei continui associata a $(T^{(0)}, Q)$ così come, nel n. 3, G è stata associata a (T, Q). Se g_0 appartiene a G_0, non può contenere un punto P_0 di α ed incontrare α^*, altrimenti esisterebbe un componente g di G che incontra Q^* e contiene P_0, e quindi P_0 apparterrebbe ad α^*. Quindi ogni continuo g_0 appartiene all'interno di α oppure è costituito da punti di $Q-\alpha$ ed è separato da α in Q da uno dei continui di $\{g\}$. Ma allora, per la definizione di $(T^{(0)}, Q)$, g_0 non può separare Q.

Nè può esistere un continuo g_0 di G_0 che contenga Q^*, perchè altrimenti la frontiera α^* costituirebbe un continuo g di G che separa il piano E_2.

16. – In questo numero dimostriamo la seguente uguaglianza:

$$\iint_{(T,\alpha)} f(x, y, z, u, v, w) = \iint_{(T^{(0)}, Q)} f(x, y, z, u, v, w)\,.$$

Siano $\alpha_{h_1}^{(1)}, \alpha_{h_2}^{(1)}, \ldots, \alpha_{h_n}^{(1)}, \ldots$ [10] quelli fra gli insiemi $\{\alpha_n\}$ che appartengono a δ_1, e $\alpha_{k_1}^{(1)}, \alpha_{k_2}^{(1)}, \ldots, \alpha_{k_n}^{(1)}, \ldots$ i rimanenti. In virtù di quanto si è ricordato nel n. 13, è intanto

$$G(T, Q) = \sum_{r=1}^{\infty} G(T, \alpha_{h_r}^{(1)}) + \sum_{r=1}^{\infty} G(T, \alpha_{k_r}^{(1)})\,.$$

Osserviamo quindi che anche $(T^{(1)}, Q)$ è di tipo A e che la successione di insiemi aperti semplicemente connessi ad essa associata come nel n. 13 è la $\{\alpha_{h_r}^{(1)}\}$.

È dunque, per lo stesso motivo,

$$G(T^{(1)}, Q) = \sum_{r=1}^{\infty} G(T^{(1)}, \alpha_{h_r}^{(1)}) = \sum_{r=1}^{\infty} G(T, \alpha_{h_r}^{(1)})\,,$$

e quindi

$$G(T^{(1)}, Q) = G(T, Q) - \sum_{r=1}^{\infty} G(T, \alpha_{k_r}^{(1)})\,.$$

Proseguendo indefinitamente si ottiene

$$G(T^{(n)}, Q) = G(T, Q) - \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{\infty} G(T, \alpha_{k_r}^{(j)})\,,$$

---

[10] Il numero di questi insiemi può eventualmente essere finito.

essendo $\alpha_{k_1}^{(j)}, \alpha_{k_2}^{(j)}, \ldots, \alpha_{k_r}^{(j)}, \ldots$ quelli fra gli insiemi aperti $\{\alpha_n\}$ che appartengono a $Q-\delta_i$.

Passando al limite si ottiene, in virtù di quanto si è dimostrato nel n. precedente, ed in virtù della semicontinuità inferiore di $G(T, Q)$,

$$G(T^{(0)}, Q) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} G(T^{(n)}, Q) = G(T, Q) - \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} G(T, \alpha_{k_r}^{(j)}),$$

dalla quale, quando si osservi che ciascuno degli $\{\alpha_n\}$ diverso da α appartiene a qualche $Q-\delta_j$, si ottiene

$$G(T^{(0)}, Q) \leqslant G(T, \alpha).$$

Indichiamo ora con $(T^{(-1)}, Q)$ la trasformazione che si ottiene applicando a $(T^{(0)}, Q)$ l'operazione inversa di quella applicata a (T, Q) per ottenere $(T^{(1)}, Q)$ e proseguiamo indefinitamente. Cioè poniamo $(T^{(-n)}, Q) = (T^{(-n+1)}, Q)$ su δ_n e $(T^{(-n)}, Q) = (T, Q)$ su $Q-(\delta_n + \delta_n^*)$, $(n = 1, 2, \ldots)$. Otteniamo in tal modo una successione di trasformazioni continue $(T^{(-n)}, Q)$ per la quale si ha uniformemente

$$\lim_{n\to\infty} (T^{(-n)}, Q) = (T, Q)$$

ed anche

$$G(T^{(-n)}, Q) = G(T^{(0)}, Q) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{\infty} G(T, \alpha_{k_r}^{(j)}).$$

Si ha quindi per gli stessi motivi

$$G(T, Q) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} G(T^{(-n)}, Q) = G(T^{(0)}, Q) + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{\infty} G(T, \alpha_{k_r}^{(j)}).$$

Dal confronto con la precedente si ottiene

$$G(T^{(0)} Q) = \lim_{n\to\infty} G(T^{(n)}, Q) = G(T, \alpha).$$

Per quanto si è provato nel n. precedente si ha allora, in virtù del teorema di approssimazione dell'integrale di WEIERSTRASS,

$$\iint_{(T^{(0)}, Q)} f(x, y, z, v, u, w) = \lim_{n\to\infty} \iint_{(T^{(n)}, Q)} f(x, y, z, u, v, w). \tag{3}$$

In virtù del Lemma del n. 14 si ha ora

$$\iint_{(T, Q)} f(x, y, z, u, v, w) = \sum_{r=1}^{\infty} \iint_{(T, \alpha_{h_r}^{(1)})} f(x, y, z, u, v, w) + \sum_{r=1}^{\infty} \iint_{(T, \alpha_{k_r}^{(1)})} f(x, y, z, u, v, w);$$

in virtù dello stesso Lemma e di quanto si è detto sopra circa la trasformazione $(T^{(1)}, Q)$ si ha anche

$$\iint_{(T^{(1)},\, Q)} f(x, y, z, u, v, w) = \sum_{r=1}^{\infty} \iint_{(T,\, \alpha_h^{(1)})} f(x, y, z, u, v, w)\,.$$

È dunque:

$$\iint_{(T^{(1)},\, Q)} f(x, y, z, u, v, w) = \iint_{(T,\, Q)} f(x, y, z, u, v, w) - \sum_{r=1}^{\infty} \iint_{(T,\, \alpha_{k_r}^{(1)})} f(x, y, z, u, v, w)\,,$$

ed in generale

$$\iint_{(T^{(n)},\, Q)} f(x, y, z, u, v, w) = \iint_{(T,\, Q)} f(x, y, z, u, v, w) - \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=1}^{\infty} \iint_{(T,\, \alpha_{k_r}^{(1)})} f(x, y, z, u, v, w)\,.$$

È quindi, per la (3),

$$\iint_{(T^{(0)},\, Q)} f(x, y, z, u, v, w) = \iint_{(T,\, Q)} f(x, y, z, u, v, w) - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \iint_{(T,\alpha_{k_r}^{(j)})} f(x, y, z, u, v, w)\,,$$

e perciò, in virtù del Lemma del n. 14, in virtù del fatto che ogni elemento di $\{\alpha_n\}$ diverso da α appartiene alla successione $\{\alpha_{k_r}^{(j)}, (r = 1, 2, \ldots;\, j = 1, 2, \ldots)\}$, ed in virtù della convergenza assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \iint_{(T,\, \alpha_n)} f(x, y, z, u, v, w)\,,$$

si ha

$$\iint_{(T^{(0)},\, Q)} f(x, y, z, u, v, w) = \iint_{(T,\, \alpha)} f(x, y, z, u, v, w)\,.$$

Il nostro asserto è così completamente provato.

17. – Sia $\Gamma \equiv (T^{(0)}, Q^*)$ la linea chiusa orientata costituente il contorno della superficie rappresentata dalla trasformazione $(T^{(0)}, Q)$.

La linea Γ è rettificabile e la sua lunghezza è inferiore alla lunghezza della linea $\theta(S)$ costituente il contorno della superficie $S \equiv (T, Q)$.

Per provare questo teniamo presente che, per quanto si è visto nel n. 15, la successione di trasformazioni $(T^{(n)}, Q^*)$ converge uniformemente verso

$(T^{(0)}, Q^*)$. Osserviamo quindi che, per il modo come si sono definite le trasformazioni $(T^{(n)}, Q)$, la lunghezza della linea contorno $(T^{(n)}, Q^*)$ di ciascuna di esse è inferiore alla lunghezza della curva $\theta(S)$.

Si ha allora, in virtù della semicontinuità della lunghezza,

$$L(\Gamma) \leqslant L[\theta(S)].$$

Poichè il nostro Teorema è acquisito per superficie aperte non degeneri il cui contorno è costituito da linee rettificabili, si ha intanto

$$\iint_{(T,\alpha)} F_z(x, y, z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x - \iint_{(T,\alpha)} F_y(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$
$$= \iint_{(T^{(0)},Q)} F_z(x, y, z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x - \iint_{(T^{(0)},Q)} F_y(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{(T^{(0)},Q^*)} F(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,.$$

18. – Costruiamo ora la seguente successione di trasformazioni continue $\{(T^{(n)}, Q)\}$.

Siano M_1, M_2, M_3, M_4 i vertici di Q, siano M_{11}, M_{12}, M_{13}, M_{14} i punti medi dei lati di Q, siano M_{21}, M_{22}, ..., $M_{2,2^3}$ i punti che occorre aggiungere ai precedenti per dividere i lati di Q in quattro parti uguali, ..., siano $M_{n,1}$, $M_{n,2}$, ..., $M_{n,2^{n+1}}$ i punti di Q che bisogna ulteriormente aggiungere per dividere i lati di Q in 2^n parti uguali.

Sia $\{\alpha_n\}$ la successione di insiemi aperti considerata nel n. 13.

Siano α_i ed α_k due di questi insiemi. Siano $\{g\}_i$ e $\{g\}_k$ le collezioni di continui g di $\{g^*\}$ che hanno almeno in comune con α_i^* ed α_k^* rispettivamente.

È noto allora (L. CESARI, [5], p. 916) che in $\{g\}_i$ esiste uno ed un solo continuo g_i che separa α_i da α_k in Q e che parimenti esiste in $\{g\}_k$ uno ed un solo continuo g_k che separa α_k da α_i in Q.

Siano $(\overline{T}^{(n)}, Q)$, $(n = 1, 2, \ldots)$, le trasformazioni continue dedotte da (T, Q) mediante α_n, così come $(T^{(0)}, Q)$ è stata dedotta da (T, Q) mediante α nel n. 15.

Sia $(T^{(1)}, Q)$ coincidente con $(\overline{T}^{(1)}, Q)$.

Per definire $(T^{(2)}, Q)$ operiamo nel seguente modo.

Indichiamo con α_{11}, α_{12}, ..., $\alpha_{1\nu}$ il gruppo di insiemi di $\{\alpha_n\}$ costituito da α_1, α_2 e da quelli fra gli eventuali insiemi α_i di $\{\alpha_n\}$ che godono delle seguenti proprietà:

a) La frontiera α_i^* di α_i è incontrata da almeno uno dei continui di $\{g^*\}$ cui appartengono i punti M_1, M_2, M_3, M_4, $M_{1,1}$, $M_{1,2}$, $M_{1,3}$, $M_{1,4}$.

b) Il diametro dell'insieme $T(\alpha_i)$, immagine di α_i secondo (T, Q), è maggiore di $1/2$ [11].

---

[11] In virtù di un risultato di L. CESARI ([5], p. 919) il numero di questi insiemi è finito.

Siano $\bar{g}_1^{(1)}, \bar{g}_2^{(1)}, \ldots, \bar{g}_k^{(1)}$ gli eventuali continui di $\{g^*\}$ che incontrano uno dei punti $M_1, \ldots, M_4$, $M_{1,1}, \ldots, M_{1,4}$ senza incontrare alcuno degli insiemi α_i^*, $(i = 1, 2, \ldots)$.

Siano $g_{1,1}^{(1)}, g_{1,2}^{(1)}, \ldots, g_{1,h_1}^{(1)}$ i continui di $\{g^*\}$ che separano $\alpha_{1,1}$ dai rimanenti $\alpha_{1,i}$ e dai continui $\bar{g}_l^{(1)}$, $(l = 1, 2, \ldots, k)$. In modo analogo siano definiti i continui $g_{i,1}^{(1)}, g_{i,2}^{(1)}, \ldots, g_{i,h_i}^{(1)}$, $(i = 1, 2, \ldots, p)$. Definiamo $(T^{(2)}, Q)$ coincidente con (T, Q) su ciascuno dei continui dei gruppi $\bar{g}_l^{(1)}$, $g_{i,t}^{(1)}$. Sia s_i l'indice dell'insieme $\alpha_{1,i}$ nella successione $\{\alpha_n\}$. Definiamo $(T^{(2)}, Q)$ coincidente con $(\bar{T}^{(s_i)}, Q)$ nell'insieme di punti di Q costituito da α_{s_i} e da tutti quei punti di Q che non sono separati da α_{s_i} in Q dai continui $\bar{g}_l^{(1)}$, $g_{i,t}^{(1)}$. Rimane da definire $(T^{(2)}, Q)$ su di un numero finito od anche infinito di insiemi connessi, disgiunti, aperti relativamente a Q, siano essi $\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \ldots, \bar{\beta}_n, \ldots$, la frontiera di ciascuno dei quali è costituita da continui facenti parte dei continui dei gruppi $\bar{g}_l^{(1)}$, $g_{i,t}^{(1)}$ e da archi di Q^*.

Affermo che esiste al più un numero finito di questi insiemi $\bar{\beta}_n$ sulla cui frontiera stanno punti appartenenti a due o più continui $\bar{g}_l^{(1)}$, $g_{i,t}^{(1)}$.

Ciò è dovuto al fatto che se i $\bar{\beta}_n$ sono in numero maggiore od uguale a p devono esistere almeno ([12]) $p + 1$ continui $\bar{g}_l^{(1)}$, $g_{i,t}^{(1)}$.

Definisco allora $(T^{(2)}, Q)$ su ciascuno degli insiemi $\bar{\beta}_n$ la cui frontiera incontra uno solo dei continui $\bar{g}_l^{(1)}$, $g_{i,t}^{(1)}$ in modo che essa sia costante e continua su $\bar{\beta}_n + \beta_n^*$. Rimane ora da definire $(T^{(2)}, Q)$ su di un numero finito di insiemi connessi, disgiunti, aperti relativamente a Q, siano essi $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$, la frontiera di ciascuno dei quali è costituita da un numero finito $\geqslant 2$ di continui facenti parte dei continui dei gruppi $\bar{g}_l^{(1)}$, $g_{i,t}$ e da altrettanti archi di Q^* succedentisi alternativamente su Q^*.

Se la frontiera di β_i è costituita da due continui g_1, g_2, separanti in Q, facenti parte di due continui dei gruppi $\bar{g}_l^{(1)}$, $g_{i,t}^{(1)}$, e da due archi di Q^* (siano $A'B'$, $A''B''$) susseguentisi alternativamente sulla frontiera di β_i, definiamo $(T^{(2)}, Q)$ su β_i in modo che essa rappresenti ivi una superficie costituita da un filo rettilineo, semplice, avente per estremi i punti immagine secondo (T, Q) di A' e B'.

([12]) Osserviamo, infatti, che per ogni coppia di insiemi β_i, β_s esistono due continui g'_n, g_s facenti parte dei continui $\bar{g}_l^{(1)}$, $g_{i,t}^{(1)}$ e appartenenti alla frontiera di β_i e β_s che separano in Q; questi continui potendo anche coincidere.

Ed allora la nostra affermazione è vera per $p = 2$. Supposta vera per $p = n - 1$, facciamo vedere che essa è vera per $p = n$. Infatti se aggiungiamo agli $n - 1$ insiemi $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$ l'insieme β_n, allora sulla frontiera di questo insieme esiste un continuo g'_n che separa β_n in Q da tutti i precedenti, oppure esistono $k \geqslant 2$ continui $g'_1, g'_2, \ldots, g'_k$ ciascuno, g'_i, dei quali separa β_n da p_i degli insiemi $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$, $(p_1 + p_2 + \ldots + p_k = n - 1)$. Ed allora nel primo caso la frontiera di β_n incontra un continuo dei gruppi $\bar{g}_l^{(1)}$, $g_{i,t}^{(1)}$ distinto dagli n (almeno) finora considerati, mentre nel secondo caso ad ognuno dei k insiemi che $g'_1, g'_2, \ldots, g'_k$ separano da β_n in Q appartengono almeno $p_i + 1$ continui dei gruppi $\bar{g}_l^{(1)}$, $g_{i,t}^{(1)}$, cosicchè questi complessivamente sono in numero maggiore od uguale a $n - 1 + k \geqslant n + 1$.

Uguale definizione assegnamo a $(T^{(2)}, Q)$ se uno dei continui g_1, g_2 non separa in Q. Se la frontiera di β_i è costituita da più di due continui $g_1, g_2, \ldots, g_s$, facenti parte di continui dei gruppi $\overline{g}_l^{(1)}$, $g_{i,t}^{(1)}$, e da altrettanti archi di Q^*, procediamo così.

Sia g_1 uno di questi continui. Supponiamo che non esista in β_i alcun continuo g di $\{g^*\}$ che in Q separi g_1 dai rimanenti $g_2, g_3, \ldots, g_s$.

Affermo intanto che esiste un insieme α_n, appartenente agli $\{\alpha_n\}$, la cui frontiera α^* incontra g_1. Ciò che esclude, fra l'altro, che g_1 faccia parte di uno dei continui $\overline{g}_l^{(1)}$, $(l = 1, 2, \ldots, k)$.

Se g_1 separa in Q, sia $\gamma(g_1)$ l'arco di Q^* che g_1 separa in Q dai punti di β_i, siano A e B gli estremi di tale arco, e su di esso B preceda A nel verso positivo di Q^*. Altrimenti sia $\widehat{AB}$ l'arco di Q^* in cui g_1 incontra Q^*; eventualmente A può coincidere con B.

Sia A' il primo punto dopo A, nel verso positivo di Q^*, che appartiene ad uno dei continui g_t, $(t = 2, 3, \ldots, s)$, e B' l'ultimo di questi punti prima di B. Siano $\alpha_{n_1}, \alpha_{n_2}, \ldots, \alpha_{n_s}, \ldots$ gli eventuali insiemi aperti della successione $\{\alpha_n\}$, appartenenti a β_i, la cui frontiera incontra uno degli archi AA', $B'B$ di Q^*, e tali inoltre che i continui di $\{g^*\}$, che appartengono alla frontiera di ciascuno di essi, non separino g_1 da alcuno dei g_t, $(t = 2, 3, \ldots, s)$.

Sia α_{n_s} uno di questi insiemi. Sia $\overline{g}_{n_s}$ quello dei continui di $\{g^*\}$ appartenenti alla frontiera di α_{n_s} che separa α_{n_s} da g_1 in Q. Consideriamo la classe dei continui di $\{g^*\}$ appartenenti alla frontiera di qualche α_{n_t}, $(s \neq t)$, che separano $\overline{g}_{n_s}$ da g_1 in Q. Ordiniamo i continui di questa classe considerando fra due di questi continui g' e g'' come precedente quello di essi, g', che da g'' è separato da g_1 in Q. Consideriamo l'ultimo ([13]) dei continui di questa classe. Sia esso $\overline{\overline{g}}_{ns}$. Non tutti i $\overline{\overline{g}}_{n_s}$, $(s = 1, 2, \ldots)$, sono distinti.

Consideriamo, allora, la trasformazione $(\mathcal{T}^{(1)}, Q)$ ottenuta da (T, Q) in modo che sia costante nella parte di Q che $\overline{\overline{g}}_{n_s}$ separa da g_1 in Q, ed in modo che essa sia continua.

Definiamo in modo analogo $(\mathcal{T}^{(2)}, Q)$, e così via.

Sia $(\mathcal{T}, Q)$ la trasformazione limite della successione $(\mathcal{T}^{(n)}, Q)$. Essa è continua in virtù di un ragionamento già fatto nel n. 15.

Sia $\mathcal{G}$ la collezione dei continui di Q sui quali $(\mathcal{T}, Q)$ è costante. Sia $\{g^*_{AA'}\}$ la sotto collezione costituita dai continui di $\mathcal{G}$ che incontrano l'arco AA' di Q^*. Questa collezione è superiormente semicontinua in virtù del fatto che è superiormente semicontinua la collezione $\mathcal{G}$. Ne viene perciò che l'insieme F' occu-

---

([13]) L'esistenza di questo ultimo continuo segue dal teorema di ZORETTI e dalla semicontinuità superiore della collezione G. (Per queste nozioni vedasi, ad esempio, L. CESARI [5], p. 899.)

pato dai continui di $\{g^*_{AA'}\}$ è chiuso. Analogamente si riconosce che è chiuso l'insieme F'' occupato dai continui $\{g^*_{A'B}\}$ di $\mathcal{G}$ che incontrano $A'B$.

Sia $\{\sigma_n\}$ la successione di insiemi aperti associata a $(\mathcal{T}, Q)$ come $\{\alpha_n\}$ è stata associata a (T, Q) nel n. 13.

Supponiamo ora che nessun punto di g_1 sia di accumulazione per i punti dei σ_n appartenenti a β_i. Esisterebbe allora un numero reale $\varrho_0 > 0$ tale che tutti i punti di β_i che hanno da g_1 una distanza $\leqslant \varrho < \varrho_0$ non apparterrebbero a $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$ e perciò apparterrebbero alla riunione di tutti i continui di $\mathcal{G}$, che incontrano Q^* in β_i, e quindi a $F' + F''$.

L'insieme $(g_1)_\varrho$ occupato da questi punti sarebbe inoltre un continuo di Q. Tale continuo $(g_1)_\varrho$ potrebbe scomporsi nella somma di due insiemi chiusi non vuoti $F' \cdot (g_1)_\varrho$, $F'' \cdot (g_1)_\varrho$ e questi dovrebbero avere punti in comune, cosicchè esisterebbe un continuo $\overline{g}$ di $\mathcal{G}$ che separerebbe g_1 da qualche g_t, $(t=2, 3, ..., s)$, in Q avrebbe almeno un punto in $(g_1)_\varrho$ ed incontrerebbe AA'. E ciò non può darsi. Infatti: o $\overline{g}$ separa g_1 da tutti i g_t, $(t = 2, 3, ..., s)$, ed allora esso appartiene a G, contro l'ipotesi fatta su g_1, oppure $\overline{g}$ separa g_1 solamente da qualcuno dei g_t, $(t = 2, 3, ..., s)$, ed anche in questo caso fa parte di G, ed allora poichè ϱ può farsi piccolo quanto si vuole ne verrebbe, in virtù del teorema di ZORETTI e della semicontinuità superiore di G, che g_1 fa parte di un continuo che separa in β_i contrariamente alla definizione di β_i. Esiste quindi almeno un punto di g_1, sia esso N, in ogni intorno del quale, in β_i, si trovano punti dei $\{\sigma_n\}$.

Dico che esiste almeno un elemento di $\{\sigma_n\}$, in β_i, la cui frontiera contiene N. In caso contrario N sarebbe di accumulazione per i continui $\overline{g}$ che appartengono alla frontiera dei σ_n contenuti in β_i e tali continui $\overline{g}$ appartengono anche alla collezione G.

Ed allora: o in virtù del teorema di ZORETTI e della semicontinuità superiore di G, g_1 farebbe parte di un continuo di $\{g^*\}$ che separa in β_i, oppure esisterebbe in β_i un continuo che separerebbe g_1 da tutti i rimanenti g_t, ed entrambi questi casi sono contro la nostra ipotesi su g_1.

Esiste quindi in β_i un insieme di $\{\sigma_n\}$ la cui frontiera incontra g_1.

Tale insieme come ogni altro elemento di $\{\sigma_n\}$ fa parte di $\{\alpha_n\}$. E di questi insiemi ne esiste uno solo, altrimenti g_1 separerebbe in β_i.

Sia ν l'indice di questo insieme nella successione $\{\alpha_n\}$. Consideriamo l'insieme $\beta_i - \alpha_\nu$ e i componenti di questo insieme la cui frontiera è costituita da soli continui appartenenti a α^*_ν oltre che a Q^*. Definiamo $(T^{(2)}, Q)$ coincidente con $(\overline{T}^{(\nu)}, Q)$ su α_ν e su ciascuno dei componenti ora specificati di $\beta_i - \alpha_\nu$. La frontiera di ciascuno dei rimanenti componenti di $\beta_i - \alpha_\nu$ deve contenere almeno uno dei continui $g_2, g_3, ..., g_s$. Questi componenti sono perciò al più $s-1$ e la frontiera di ciascuno di essi è costituita al più da $s-1$

continui di $\{g^*\}$, dei quali al più $s-2$ fra i $g_2, g_3, \ldots, g_s$, e da altrettanti archi di Q^*.

Se invece di β_i fossero esistiti continui separanti, in Q, g_1 dai rimanenti g_s avremo preso l'ultimo $\overline{g}_1$ di questi continui [questo ultimo continuo esiste in virtù del teorema di ZORETTI e della semicontinuità superiore di G] ed avremo definito $(T^{(2)}, Q)$ nell'insieme aperto avente per frontiera g_1, $\overline{g}_1$ e due intervalli di Q^* in modo da rappresentare un filo rettilineo, come si è detto poco sopra per quel tipo di regioni.

Dopo un numero finito di operazioni si perviene così a definire $(T^{(2)}, Q)$ su tutto β_i e quindi su tutto Q, e la trasformazione che si ottiene, in virtù anche del n. 15, è continua.

Passiamo quindi a definire $(T^{(3)}, Q)$ operando come sopra su α_1, α_2, α_3 e sugli insiemi aperti di $\{\alpha_n\}$ per i quali diam $T(\alpha_n) > 1/2^2$ e che sono incontrati dai continui cui appartengono i punti $M_1, \ldots, M_4$, $M_{1.1}, \ldots, M_{1,2^2}$, $M_{2,1} \ldots, M_{2,2^3}$.

Proseguiamo quindi indefinitamente. Otteniamo così una successione di trasformazioni continue $(T^{(n)}, Q)$.

19. – Dimostriamo ora che la successione di trasformazioni continue $(T^{(n)}, Q)$ ora costruita converge uniformemente verso (T, Q).

Fissato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, sia $\nu_1(\varepsilon)$ un intero tale che se $n > \nu_1(\varepsilon)$ il diametro di ciascuno degli insiemi $T(\alpha_n)$, immagini di α_n secondo (T, Q), sia minore di ε. L'esistenza di questo $\nu_1(\varepsilon)$ è stata provata da L. CESARI ([5], p. 918).

Sia $\nu_2(\varepsilon)$ un secondo intero tale che se $n > \nu_2(\varepsilon)$ il diametro di ciascuno degli insiemi $T(M'M'')$, immagini secondo (T, Q), degli intervalli $M'M''$ di Q che hanno per estremi due punti consecutivi del gruppo di punti $\{M\}$ che divide Q in 2^n parti uguali, sia minore di ε.

Sia (u, v) un qualunque punto di Q, e $T(u, v)$, $T^{(n)}(u, v)$ indichino le immagini di (u, v) secondo (T, Q) e $(T^{(n)}, Q)$ rispettivamente.

Si ha allora, se $n > \max\{\nu_1(\varepsilon), \nu_2(\varepsilon)\}$,

$$d\{T(u, v),\ T^{(n)}(u, v)\} < 3\varepsilon .$$

Infatti, se $(u, v) \in \alpha_s^* + \alpha_s$, con $s \leqslant n$, allora è $T(u, v) \equiv T^{(n)}(u, v)$. Se (u, v) appartiene a qualche $\alpha_s^* + \alpha_s$ per il quale è $s > n$, possono presentarsi i seguenti casi:

a) Su ogni punto $(u, v) \in \alpha_s^* + \alpha_s$ si è definito $T^{(n)}(u, v) \equiv T(u, v)$.

b) Esiste un altro elemento di $\{\alpha_n\}$, sia α_t, rispetto al quale si ha la seguente situazione: Esiste un continuo g' di $\{g^*\}$ appartenente ad α_t^* che separa in Q e α_s appartiene ad un componente δ di $Q - \alpha_t$ sul quale si è posto $T^{(n)}(u, v) \equiv T(g')$. Sia g'' il continuo appartenente ad α_s che separa α_s da α_t. Nessun punto di $\{M\}$ appartiene a δ^* e perciò, poichè $n > \{\nu_1(\varepsilon), \nu_2(\varepsilon)\}$, si ha:

$$d\{T(u, v),\ T(g'')\} < \varepsilon , \qquad d\{T(g''),\ T(g')\} < \varepsilon ,$$

e, per la definizione di $(T^{(n)}, Q)$,

$$T(g') \equiv T^{(n)}(u, v)\,,$$

dalle quali si deduce

$$d\{T(u, v),\ T^{(n)}(u, v)\} < 3\varepsilon\,.$$

c) $\alpha_s + \alpha_s^*$ appartiene ad un insieme aperto e connesso β, avente per frontiera due continui g' e g'' di $\{g^*\}$, di cui uno almeno separa in Q, e due archi di Q^*; e $(T^{(n)}, Q)$ su questo insieme β rappresenta un filo rettilineo avente per estremi $T(g')$ e $T(g'')$. Allora, detto g''' uno dei continui appartenenti alla frontiera di α_s è

$$d\{T(u, v),\ T(g''')\} < \varepsilon\,,$$

per essere $n > \{\nu_1(\varepsilon), \nu_2(\varepsilon)\}$, ed anche, poichè su β non cadono punti dell'insieme $\{M\}$,

$$d\{T(g'''),\ T(g')\} < \varepsilon$$

e, per la definizione di $(T_n^{(n)}, Q)$,

$$d\{T^{(n)}(u, v),\ T(g')\} < \varepsilon\,.$$

È quindi

$$d\{T(u, v),\ T^{(n)}(u, v)\} < 3\varepsilon\,.$$

Se infine (u, v) non appartiene ad alcun α_s allora o esso appartiene a qualche continuo g di $\{g^*\}$ che incontra un α_s ed allora si conclude come sopra, oppure (u, v) appartiene ad un continuo g di $\{g^*\}$ che non incontra alcun α_s. In questo ultimo caso o g si trova nella situazione di α_s rispetto ad un α_t, come sopra in b), oppure g sta in qualche β, come sopra in c), ed in entrambi i casi si può ripetere il ragionamento ora fatto.

20. – Si osservi che in conseguenza di quanto si è ora visto si ha

$$\lim_{n\to\infty} A[(T^{(n)}, Q)] = A[(T, Q)]\,,$$
$$\lim_{n\to\infty} L[(T^{(n)}, Q)] = L[(T, Q^*)]\,.$$

Infatti per il modo come si sono definite le trasformazioni $(T^{(n)}, Q)$ si ha

$$A[(T^{(n)}, Q)] \leqslant A[(T, Q)]\,,\quad L[(T^{(n)}, Q^*)] \leqslant L[(T, Q^*)]\,,\quad (n = 1, 2, \ldots),$$

ed in virtù della convergenza uniforme di $(T^{(n)}, Q)$ verso (T, Q), provata nel precedente numero, e della semicontinuità inferiore dell'area e della lunghezza,

$$A[(T, Q)] \leqslant \varliminf_{n\to\infty} A[(T^{(n)}, Q)] , \qquad L[(T, Q^*)] \leqslant \varliminf_{n\to\infty} L[(T^{(n)}, Q^*)] ,$$

dalle quali si deduce il nostro asserto.

21. - Siamo ormai in grado di provare il nostro teorema per superficie di tipo A.

Siano $\alpha_{n_1}, \alpha_{n_2}, \ldots, \alpha_{n_{p_n}}$ quelli fra gli insiemi di $\{\alpha_n\}$ che si sono presi in considerazione per definire $(T^{(n)}, Q)$ e sui quali si è posto $(T^{(n)}, Q) \equiv (\overline{T}^{(n_s)}, Q) \equiv \equiv (T, Q)$, $(s = 1, 2, \ldots, p_n)$.

In virtù del Lemma del n. 11 è intanto

$$\iint_{(T^{(n)},\, Q)} F_z(x, y, z)\, dz\, dx - \iint_{(T^{(n)},\, Q)} F_y(x, y, z)\, dx\, dy =$$

$$= \sum_{s=1}^{p_n} \left[\iint_{(T,\, \alpha_{n_s})} F_z(x, y, z)\, dz\, dx - \iint_{(T,\, \alpha_{n_s})} F_y(x, y, z)\, dx\, dy \right] .$$

Per il teorema del n. 17 è inoltre, con le notazioni del n. 18,

$$\iint_{(T,\, \alpha_{n_s})} F_z(x, y, z)\, dz\, dx - \iint_{(T,\, \alpha_{n_s})} F_y(x, y, z)\, dx\, dy = \int_{(\overline{T}^{(n_s)},\, Q^*)} F(x, y, z)\, dx\, ; \qquad (s = 1, 2, \ldots, p_n).$$

In virtù della definizione di $(T^{(n)}, Q)$ è anche

$$\sum_{s=1}^{p_n} \int_{(\overline{T}^{(n_s)},\, Q^*)} F(x, y, z)\, dx = \int_{(T^{(n)},\, Q^*)} F(x, y, z)\, dx .$$

Ciò è dovuto al fatto che si ha $(\overline{T}^{(n_s)}, Q^*) = (T^{(n)}, Q^*)$ su ciascuno degli archi $\gamma_{n_s, h}$, $(h = 1, 2, \ldots, k_{n_s})$, di Q^* che i continui, appartenenti alla frontiera di α_{n_s} e separanti α_{n_s} dai rimanenti α_{n_t}, $(t \neq s;\ s, t = 1, 2, \ldots, p_n)$, non separano da α_{n_s}, mentre $(\overline{T}^{(n_s)}, Q^*)$ è costante al di fuori di questi archi; ed anche al fatto che il contributo complessivo di $\int_{(T^{(n)},\, Q^*)} F(x, y, z)\, dx$ al di fuori degli archi $\gamma_{n_s, h}$, $(h = 1, 2, \ldots, k_{n_s};\ s = 1, 2, \ldots, p_n)$, è nullo in quanto è relativo ad un numero pari di archi di Q^* i quali danno a due a due al nostro integrale contributo opposto.

È quindi

$$\iint_{(T^{(n)},\, Q)} F_z(x, y, z)\, dz\, dx - \iint_{(T^{(n)},\, Q)} F_y(x, y, z)\, dx\, dy = \int_{(T^{(n)},\, Q)} F(x, y, z)\, dx ,$$

ed allora, in virtù dei teoremi di approssimazione degli integrali di WEIERSTRASS di linea e di superficie,

$$\iint_{(T,\,Q)} F_z(x, y, z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x - \iint_{(T,\,Q)} F_y(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{(T,\,Q^*)} F(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,.$$

E con ciò il nostro Teorema per superficie di tipo A è provato.

22. – Ci proponiamo ora di dimostrare il teorema di STOKES per superficie orientate di FRÉCHET, del tipo della 2-cella generiche.

Per giungere a questo risultato faremo uso di un procedimento di E. J. MACSHANE [9] consistente nel rimuovere dalla superficie $S \equiv (T, Q)$ quelle porzioni di S che costituiscono superficie chiuse.

Mediante una infinità numerabile di tali operazioni potremo pervenire ad una superficie di tipo A in modo da poter usufruire del risultato ora acquisito per tale classe di superficie.

23. – Poniamo ora, seguendo E. J. MACSHANE [9] la seguente definizione: Sia $S \equiv (T, Q)$ una superficie, sia B un insieme aperto e connesso appartenente a Q, se esiste, sulla cui frontiera le funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ mediante le quali si è definita la trasformazione (T, Q), siano tutte e tre costanti. Diremo allora che la trasformazione

$$(T, B): \qquad x = x(u, v)\,, \qquad y = y(u, v)\,, \qquad z = z(u, v)\,, \qquad (u, v) \in B,$$

definisce una porzione chiusa S_B di S.

L'insieme B può, come si riconosce facilmente, non essere semplicemente connesso. Ciò nondimeno E. J. MACSHANE [9] ha fatto osservare che sussiste il seguente

Teorema. Se (T, B) definisce una porzione chiusa di $S \equiv (T, Q)$ esiste un insieme B' aperto e semplicemente connesso, contenente B, e tale che la trasformazione (T, B') definisce una porzione chiusa $S_{B'}$, di S.

Nel corso del lavoro citato E. J. MACSHANE ha quindi introdotto la nozione di porzione chiusa completa di $S \equiv (T, Q)$ nel seguente modo.

Sia B un insieme aperto e connesso di punti di Q tale che la trasformazione (T, B) definisca una porzione chiusa di (T, Q). Sia R un punto di B. Sia B_0 l'insieme dei punti di Q che appartengono ad almeno un insieme aperto $\overline{B}$, contenente R, e tale che $(T, \overline{B})$ definisca una porzione chiusa di (T, Q). Allora l'insieme B_0 è semplicemente connesso e su di esso la (T, Q) definisce una porzione chiusa (T, B_0) di (T, Q). Tale porzione si dice allora completa.

Discende da questa definizione che se B_1 e B_2 sono due insiemi, appartenenti a Q, aperti e semplicemente connessi, tali che le trasformazioni (T, B_1), (T, B_2) definiscano due porzioni chiuse complete di (T, Q), allora questi insiemi non possono avere punti in comune.

Ne discende quindi che gli insiemi B di Q, aperti e semplicemente connessi, sui quali (T, Q) definisce una porzione completa chiusa, sono al più una infinità numerabile.

24. – Sia $S \equiv (T, Q)$ una superficie e sia $\{B_n\}$ la successione degli insiemi aperti, semplicemente connessi, privi a due a due di punti in comune, sui quali la trasformazione (T, Q) definisce porzioni chiuse complete di S.

Sia $(T^{(1)}, Q)$ la trasformazione continua così definita:

$(T^{(1)}, Q)$ coincide con (T, Q) se $(u, v) \in Q - B_1$,

$(T^{(1)}, Q)$ è costante su B_1 in modo da risultare continua su Q.

Sia $(T^{(2)}, Q)$ definita a partire da $(T^{(1)}, Q)$ e da B_2 così come $(T^{(1)}, Q)$ è stata definita a partire da (T, Q) e da B_1; e così via.

Otteniamo in tal modo una successione di trasformazioni continue $(T^{(n)}, Q)$. Vogliamo affermare i seguenti fatti:

a) La successione di trasformazioni continue $(T^{(n)}, Q)$ converge uniformemente verso una trasformazione continua $(\bar{T}, Q)$.

b) La superficie $\bar{S} \equiv (\bar{T}, Q)$ è di tipo A.

c) La linea contorno $\theta(S)$ di S coincide con la linea contorno $\theta(\bar{S})$ di $\bar{S}$.

d) Si ha

$$G(T, Q) = G(\bar{T}, Q) + \sum_{k=1}^{\infty} G(T, B_k),$$

$$G_s(T, Q) = G_s(\bar{T}, Q) + \sum_{k=1}^{\infty} G_s(T, B_k), \qquad (s = 1, 2, 3).$$

L'affermazione contenuta in a) si prova con un ragionamento identico a quello del n. 15, le affermazioni contenute in b) e in c) sono state provate da E. J. MACSHANE nella Nota più volte citata.

25. – Venendo alla prima delle affermazioni contenute in d) osserviamo, in questo numero, che si ha intanto

$$G(T, Q) = G(T^{(1)}, Q) + G(T, B_1).$$

Se l'insieme B_1 è costituito dai punti interni ad una linea di JORDAN, questa uguaglianza può provarsi nel seguente modo.

Se l'insieme B_1 è costituito dai punti interni ad una linea di JORDAN, questa uguaglianza può provarsi nel seguente modo.

Per un teorema di L. CESARI ([5], p. 904] si ha, in virtù della ipotesi che $T(B_1^*)$ e $T^{(1)}(B_1^*)$ sono ridotte ad un punto,

$$G(T, Q) = G[T, Q - (B_1 + B_1^*)] + G(T, B_1),$$
$$G(T^{(1)}, Q) = G[T^{(1)}, Q - (B_1 + B_1^*)] + G(T^{(1)}, B_1).$$

Ma in virtù delle denfiizioni è $G(T^{(1)}, B_1) = 0$ e per il modo come si è definito $G(T, Q)$ è

$$G[T, Q - (B_1 + B_1^*)] = G[T^{(1)}, Q - (B_1 + B_1^*)].$$

In questo caso particolare abbiamo così provato che

$$G(T, Q) = G(T^{(1)}, Q) + G(T, B_1).$$

Nel caso generale la stessa uguaglianza può provarsi con il seguente ragionamento di E. J. MACSHANE che qui riportiamo per comodità del lettore.

Sia

$$(\Omega, C): \qquad u = u(\varrho, \theta), \qquad v = v(\varrho, \theta), \qquad 0 \leqslant \varrho < 1, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

una trasformazione biunivoca e bicontinua dell'interno C^0, del cerchio C (di centro l'origine e raggio 1 del piano delle coordinate polari ϱ, θ) nell'insieme aperto B_1.

Sia

$$(\Omega^{-1}, B_1): \qquad \varrho = \varrho(u, v), \qquad \theta = \theta(u, v), \qquad (u, v) \in B_1,$$

la trasformazione inversa di (Ω, C).

Siano

$$\bar{x}(\varrho, \theta) = x[u(\varrho, \theta), v(\varrho, \theta)], \; \bar{y}(\varrho, \theta) = y[u(\varrho, \theta), v(\varrho, \theta)], \; \bar{z}(\varrho, \theta) = z[u(\varrho, \theta), v(\varrho, \theta)]$$

le funzioni continue in C^0 ottenute mediante le $u(\varrho, \theta)$, $v(\varrho, \theta)$ dalle $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ esprimenti (T, Q).

In virtù del fatto che le funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ sono costanti su B_1^* è possibile definire queste funzioni anche su C^* in modo che risultino continue su $C^0 + C^* = \overline{C}$.

Sia $\{\varphi_n(\varrho)\}$, $(n > 2)$, una successione di funzioni continue, lineari in ciascuno dei tre intervalli $(0, 1/2)$, $(1/2, 1 - 1/n)$, $(1 - 1/n, 1)$ ed assumenti negli estremi di questi intervalli i seguenti valori:

$$\varphi_n(0) = 0\,, \quad \varphi_n(1/2) = 1 - 2/n\,, \quad \varphi_n(1 - 1/n) = 1 - 1/n\,, \quad \varphi_n(1) = 1\,.$$

Consideriamo quindi la successione di trasformazioni continue

$$(\mathcal{T}^{(n)}, Q): \quad \begin{cases} x = \bar{\bar{x}}_n(u, v) = \bar{x}[\varphi_n(\varrho(u, v)), \theta(u, v)]\,, \\ \qquad\qquad y = \bar{\bar{y}}_n(u, v) = \bar{y}[\varphi_n(\varrho(u, v)), \theta(u\, v)]\,, \ldots, \ (u, v) \in B_1\,, \\ x = x(u, v)\,, \quad y = y(u, v)\,, \quad z = z(u, v)\,, \quad (u, v) \in Q_1 - B_1\,. \end{cases}$$

Osserviamo che detto α_n l'insieme dei punti interni alla linea di JORDAN γ_n, appartenente a B_1, immagine secondo (Ω, C) della linea

$$\varrho = \varphi_n(1 - 1/n) \equiv 1 - 1/n\,, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\,,$$

di C, la trasformazione (T, α_n) è equivalente, nel senso di FRÉCHET, alla trasformazione $(\mathcal{T}^{(n)}, \alpha_n)$ mentre all'esterno di γ_n queste due trasformazioni sono addirittura identiche.

Ne viene perciò che ciascuna delle trasformazioni $(\mathcal{T}^{(n)}, Q)$, $(n = 1, 2, \ldots)$, è equivalente, nel senso di FRÉCHET, alla (T, Q). Ma la successione di trasformazioni continue $(\mathcal{T}^{(n)}, Q)$ converge, in virtù della definizione di $\{\varphi_n(\varrho)\}$, verso una trasformazione continua, sia essa $(\mathcal{T}, Q)$, che è equivalente, nel senso di FRÉCHET, a (T, Q).

Sia ora γ la linea di JORDAN, appartenente a B_1, immagine secondo (Ω, C) della circonferenza

$$\varrho = 1/2\,, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\,,$$

di C, e sia D_1 l'insieme dei punti interni a questa linea. L'immagine, secondo $(\mathcal{T}, Q)$, di γ è ridotta ad un punto e nell'insieme $B_1 - D_1$ la $(\mathcal{T}, Q)$ è coincidente con $(T^{(1)}, Q)$.

In virtù del risultato già utilizzato di L. CESARI si ha perciò

$$G(T, Q) = G(\mathcal{T}, Q) = G(\mathcal{T}, D_1) + G[\mathcal{T}, Q - (D_1 + D_1^*)]\,,$$
$$G(T^{(1)}, Q) = G(T^{(1)}, D_1) + G[T^{(1)}, Q - (D_1 + D_1^*)]\,.$$

Per essere $G(T^{(1)}, D_1) = 0$, $G[T^{(1)}, Q - (D_1 + D_1^*)] = G[\mathcal{T}, Q - (D_1 + D_1^*)]$, è quindi

$$G(T, Q) = G(T^{(1)}, Q) + G(\mathcal{T}, D_1) .$$

Ma in virtù delle definizioni è

$$G(\mathcal{T}, D_1) = G(T, B_1) ,$$

quindi anche in questo caso si ha

$$G(T, Q) = G(T^{(1)}, Q) + G(T, B_1) .$$

26. - Con lo stesso ragionamento del precedente numero si ha, per ogni n,

$$G(T^{(n-1)}, Q) = G(T^{(n)}, Q) + G(T, B_n) ,$$

si ottiene perciò, per ogni n,

$$G(T^{(n)}, Q) = G(T, Q) - \sum_{k=1}^{n} G(T, B_k) ,$$

e da questa, in virtù della semicontinuità inferiore di $G(T, Q)$ e della acquisita convergenza uniforme di $(T^{(n)}, Q)$ verso $(\bar{T}, Q)$, si deduce

$$G(\bar{T}, Q) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} G(T^{(n)}, Q) = G(T, Q) - \sum_{k=1}^{\infty} G(T, B_k) .$$

La disuguaglianza opposta si può ottenere considerando la successione di trasformazioni continue $(T^{(-n)}, Q)$ così definite:

$(T^{(-1)}, Q)$ coincide con $(\bar{T}, Q)$ su $Q - B_1$, coincide su (T, Q) su B_1,

$(T^{(-2)}, Q)$ coincide con $(T^{(-1)}, Q)$ su $Q - B_2$, coincide con (T, Q) su B_2,

e così via.

Con gli stessi argomenti si osserva che la successione di trasformazioni $(T^{(-n)}, Q)$ converge uniformemente verso (T, Q), che inoltre, per ogni n,

$$G(T^{(-n)}, Q) = G(\bar{T}, Q) + \sum_{k=1}^{n} G(T, B_k) ,$$

e che infine

$$G(T, Q) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} G(T^{(-n)}, Q) = G(T, Q) + \sum_{k=1}^{\infty} G(T, B_k)\,.$$

La prima delle affermazioni contenute nel comma d) del n. 24 è così completamente provata, alla stessa maniera che si prova la seconda.

27. – In questo numero ci proponiamo di dimostrare che si ha, per ogni intero n,

$$\iint\limits_{(T^{(n)},\,Q)} F_z(x, y, z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x - \iint\limits_{(T^{(n)},\,Q)} F_y(x, y, z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{(T^{(n+1)},\,Q)} F_z(x, y, z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x - \iint\limits_{(T^{(n+1)},\,Q)} F_y(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

essendo $(T^{(i)}, Q)$, $(i = n,\ n+1)$, le trasformazioni continue considerate nel n. 24, gli integrali nei due membri esistendo in virtù di quanto si è visto nel precedente numero.

In virtù delle definizioni di $(T^{(i)}, Q)$, $(i = n,\ n+1)$, di quanto si è visto nel precedente numero, ed in forza del Lemma del n. 11, si ha intanto

$$\iint\limits_{(T^{(n)},\,Q)} (F_z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x - F_y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y) = \iint\limits_{[T^{(n)},\,Q-(B_{n+1}+B^*_{n+1})]} (F_z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x - F_y\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y) + \iint\limits_{(T^{(n)},\,B_{n+1})} (F_z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x) - F_y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y) =$$

$$= \iint\limits_{[T^{(n+1)},\,Q-(B_{n+1}+B^*_{n+1})]} \cdots + \iint\limits_{(T^{(n)},\,B^{n+1})} \cdots = \iint\limits_{(T^{(n+1)},\,Q)} \cdots - \iint\limits_{(T^{(n+1)},\,B_{n+1})} \cdots + \iint\limits_{(T^{(n)},\,B_{n+1})} \cdots\,.$$

Ora, è $G(T^{n+1}, B_{n+1}) = 0$ e quindi in virtù del Lemma del n. 12 s'ottiene

$$\iint\limits_{(T^{(n+1)},\,B_{n+1})} (F_z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x - F_y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y) = 0\,.$$

Resta perciò da dimostrare che si ha

$$\iint\limits_{(T^{(n)},\,B_{n+1})} (F_z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x - F_y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y) = \iint\limits_{(T,\,B_{n+1})} (F_z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x - F_y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y) = 0\,.$$

A questo scopo consideriamo la trasformazione continua $(T'^{(n)}, Q)$ ottenuta da $(T^{(n)}, Q)$ nel seguente modo:

$(T'^{(n)}, Q)$ coincide con (T, B_{n+1}), e quindi con $(T^{(n)}, Q)$, su B_{n+1}, è costante su $Q - B_{n+1}$ in modo da risultare continua su Q.

In virtù dei Lemmi dei nn. 11, 12 è

$$\iint\limits_{(T'^{(n)},\,Q)} (F_z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x - F_y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y) = \iint\limits_{(T,\,B_{n+1})} (F_z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x - F_y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y) = \iint\limits_{(T^{(n)},\,B_{n+1})} (F_z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x - F_y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)\,,$$

basterà perciò dimostrare che è

$$\iint_{(T'^{(n)},\, Q)} (F_z\, dz\, dx - F_y\, dx\, dy) = 0 .$$

Allo scopo consideriamo, seguendo L. CESARI [5], per ogni intero $N > 0$ una trasformazione poliedrica $(T_N^{(n)}, Q)$ per la quale si abbia

$$G(T_N^{(n)}, Q) < G(T'^{(n)}, Q) + 1/(2N), \qquad d\{T_N^{(n)}(u, v),\ T'^{(n)}(u, v)\} < 1/(2N).$$

Per il modo come si è definita la trasformazione $(T'^{(n)}, Q)$ l'insieme $T'^{(n)}(Q^*)$, immagine del contorno Q^* di Q secondo $(T'^{(n)}, Q)$, è ridotto ad un punto, sia esso M. La curva $T_N^{(n)}(Q^*)$, immagine di Q^* secondo $(T_N^{(n)}, Q)$, appartiene perciò ad una sfera $\sigma_N(M)$ di centro M e raggio $1/(2N)$.

Sia $\Omega_n(N)$ la trasformazione dello spazio (x, y, z) in sè che fa corrispondere alla sfera $\sigma_N(M)$ il punto M e ad ogni punto M_1, esterno a tale sfera, il punto M_1' che appartiene alla retta MM_1 e ha da M la distanza che M_1 ha dalla sfera $\sigma_N(M)$.

Sia $(\bar{T}_N^{(n)}, Q)$ la trasformazione elementare che si ottiene da $(T_N^{(n)}, Q)$ mediante la trasformazione $\Omega_n(N)$.

Risulta

$$G(\bar{T}_N^{(n)}, Q) \leqslant G(T_N^{(n)}, Q) < G(T'^{(n)}, Q) + 1/(2N), \quad d\{\bar{T}_N^{(n)}(u, v),\ T'^{(n)}(u, v)\} < 1/N,$$

inoltre l'immagine $\bar{T}_N^{(n)}(Q^*)$ di Q^* secondo $(\bar{T}_N^{(n)}, Q)$ è ridotta ad un punto, ed infine, con ragionamenti di carattere elementare si ha, per ogni N,

$$\iint_{(\bar{T}_N^{(n)},\, Q)} (F_z\, dz\, dx - F_y\, dx\, dy) = 0 .$$

Da qui si deduce allora il nostro asserto in virtù del teorema di approssimazione dell'integrale di WEIERSTRASS.

28. – Possiamo ora dimostrare il nostro Teorema nel caso generale.

Sia $S \equiv (T, Q)$ una superficie.

Sia $\{B_n\}$ la successione degli insiemi aperti e semplicemente connessi di Q sui quali sono definite le eventuali porzioni chiuse complete (T, B_n) di S.

Siano $(T^{(n)}, Q)$, $(n = 1, 2, \ldots)$, le trasformazioni continue dedotte da (T, Q) come nel n. 24.

Come abbiamo ivi veduto esiste una trasformazione continua $(\bar{T}, Q)$, limite delle $(T^{(n)}, Q)$, la quale costituisce una superficie di FRÉCHET, del tipo della

2-cella di tipo A, il cui contorno è lo stesso di S, per la quale si ha

$$\lim_{n\to\infty} T^{(n)}(u, v) = \bar{T}(u, v), \qquad \text{uniformemente su } Q,$$
$$\lim_{n\to\infty} G(T^{(n)}, Q) = G(\bar{T}, Q).$$

Si ha inoltre, come si è visto nel n. precedente, per ogni intero n,

$$\iint_{(T^{(n)}, Q)} (F_z\, dz\, dx - F_y\, dx\, dy) = \iint_{(T^{(n+1)}, Q)} (F_z\, dz\, dx - F_y\, dx\, dy) = \iint_{(T, Q)} (F_z\, dz\, dx - F_y\, dx\, dy).$$

Risulta perciò, in virtù del teorema di approssimazione dell'integrale di Weierstrass,

$$\iint_{(T, Q)} (F_z dz\, dx - F_y\, dx\, dy = \lim_{n\to\infty} \iint_{(T^{(n)}, Q)} (F_z\, dz\, dx - F_y\, dx\, dy) = \iint_{(\bar{T}, Q)} (F_z\, dz\, dx - F_y\, dx\, dy).$$

Ma il nostro Teorema è ormai acquisito per superficie di tipo A, si ha dunque:

$$\iint_{(T, Q)} (F_z\, dz\, dx - F_y\, dx\, dy) = \iint_{(\bar{T}, Q)} (F_z\, dz\, dx - F_y dx dy) =$$
$$= \int_{O(\bar{S})} F(x, y, z)\, dx = \int_{O(S)} F(x, y, z)\, dx.$$

Il nostro Teorema è così completamente dimostrato.

Bibliografia.

[1] R. Caccioppoli, *Sulla formola di Stokes*, Rend. R. Accad. Napoli (3), **34**, pp. 7 (1928).

[2] J. Cecconi, *Sul teorema di Gauss-Green*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **20**, 194-218 (1951).

[3] L. Cesari, *Criteri di uguale continuità ed applicazione alla quadratura delle superficie*, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa **12**, 63-84 (1943).

[4] L. Cesari, *Sui fondamenti geometrici dell'integrale classico per l'area delle superficie in forma parametrica*, Mem. Accad. Italia **18**, 1323-1481 (1943).

[5] L. Cesari, *Una uguaglianza fondamentale per l'area delle superficie*, Mem. Accad. Italia **14**, 891-951 (1944).

[6] L. Cesari, *Sulla trasformazione degli integrali doppi*, Ann. Mat. Pura Appl. **27**, 321-374 (1948).

[7] L. Cesari, *La nozione di integrale sopa una superficie in forma parametrica*, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa **13**, 77-117 (1948).

[8] L. Cesari, *Sul problema di Geöcze*, Riv. Mat. Univ. Parma **1**, 207-227 (1950).

[9] E. J. MCSHANE, *On the analytic nature of surfaces of least area*, Ann. of Math. **35**, 456-475 (1934).

[10] A. MAMRBIANI, *Sul problema di Gcöcze*, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa **13**, 4-18 (1944).

[11] C. B. MORREY, *A class of representation of manifolds*, Part II, Amer. J. Math. **56**, 275-293 (1934).

[12] C. B. MORREY, *An analytic characterisation of surfaces of finite Lebesgue area*, Amer. J. Math. **57**, 692-702 (1935).

[13] T. RADÓ, *Length and area*, Amer. Math. Soc. Col. Publ., vol. 30, 1948.

[14] L. TONELLI, *Sugli integrali curvilinei del Calcolo delle variazioni*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (5) **21** (1° semestr), 448-453 (1912).

[15] L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle variazioni*, Vol. 1 (1921), Vol. 2 (1923), Zanichelli, Bologna.