GIOVANNI PRODI (*)

Soluzioni periodiche di equazioni alle derivate parziali di tipo parabolico e non lineari. (**)

Lo studio delle soluzioni periodiche di equazioni di tipo parabolico e non lineari è stato iniziato, per quel che mi consta, qualche anno fa da DZ. CH. KARIMOV (1) che ha considerato l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[P(x)\frac{\partial z}{\partial x}\right] - \frac{\partial z}{\partial t} = \Phi(x, t) + \mu f(z) ,$$

dove μ è una costante, la $\Phi(x, t)$ è una funzione periodica della t, e le condizioni ai limiti sono: $z(0, t) = z(\pi, t) = 0$. Le condizioni sotto cui viene assicurata l'esistenza e l'unicità di una soluzione periodica sono restrittive: tra l'altro, per l'esistenza, si richiede che la $f(z)$ sia funzione pari e limitata. Inoltre l'enunciato, così come è riferito nella recensione dello « Zentralblatt » (2), è certamente errato per quello che riguarda l'unicità, come ho potuto constatare con un esempio che riporto in Appendice, n. I. D'altra parte, essendo molto ampie le condizioni che assicurano la stabilità delle soluzioni di equazioni di tipo parabolico, per $t \to +\infty$ (3), ho ritenuto che anche l'esistenza di una soluzione periodica si potesse assicurare sotto condizioni piuttosto larghe.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica del Politecnico, Milano (Italia).

(**) Ricevuto il 15-IV-1952.

(1) DZ. CH. KARIMOV, *Sulle soluzioni periodiche di equazioni differenziali non lineari di tipo parabolico* (in russo), Doklady SSSR **28**, 403-406 (1940) e **56**, 119-121 (1947). Di un altro lavoro del medesimo Autore [in Doklady SSSR **58**, 969-972 (1947)] ho notizie ancora più imprecise.

(2) Zentralblatt für Mathematik **29**, p. 42 (1948).

(3) Come ho mostrato in una Nota: *Questioni di stabilità per equazioni non lineari di tipo parabolico,* Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) **10**, 365-370 (1951).

In questo lavoro studio l'equazione di tipo parabolico e non lineare

$$(1) \qquad u_t = u_{xx} + f(x, t, u, u_x)\,,$$

dove la $f(x, t, u, u_x)$ è una funzione periodica di t, di periodo T, definita per $-\infty < t < +\infty$, $0 \leqslant x \leqslant l$ con $l > 0$ e costante, $-\infty < u < +\infty$, $-\infty < u_x < +\infty$. *Le soluzioni dovranno essere bidimensionalmente continue nella striscia chiusa* $0 \leqslant x \leqslant l$, $-\infty < t < +\infty$ *insieme con la derivata* u_x *e nulle sui bordi, cioè per* $x = 0$ *e* $x = l$. *In ogni punto interno dovranno avere le derivate* u_t *e* u_{xx} *finite e soddisfacenti naturalmente alla* (1).

A questo tipo di problema ci si può ridurre, eseguendo semplici trasformazioni, in un caso più generale: quello in cui, invece della striscia, si consideri il dominio limitato dalle due linee

$$x = X_1(t)\,, \qquad x = X_2(t)\,, \qquad \text{con} \qquad X_2(t) > X_1(t)\,,$$

essendo $X_1(t)$ e $X_2(t)$ funzioni periodiche di t con lo stesso periodo T della f. Così pure i valori al contorno possono essere assegnati, su ciascuna delle due linee, mediante due funzioni $u_1 = \varphi_1(t)$, $u_2 = \varphi_2(t)$, rispettivamente, sempre periodiche con periodo T. Bisogna però, per questo, che tanto le X che le φ abbiano derivate prime continue.

Il risultato principale del presente lavoro è contenuto nel Teorema I seguente.

1. – Teorema I. *L'equazione*

$$(1) \qquad u_t = u_{xx} + f(x, t, u, u_x)\,,$$

con la f periodica rispetto a t di periodo T, ammette una soluzione almeno, periodica rispetto a t con periodo T e soddisfacente alle condizioni $u(0, t) = u(l, t) = 0$, *se valgono le seguenti ipotesi:*

a) *La f sia continua per* $0 \leqslant x \leqslant l$, $-\infty < t < +\infty$, $-\infty < u < +\infty$, $-\infty < u_x < +\infty$, *e soddisfi localmente ad una condizione di Hölder nel complesso dei suoi argomenti.*

b) *Posto*

$$\bar{f}(x, u, u_x) = \max_{0 \leq t \leq T} f(x, t, u, u_x)\,,$$

l'equazione differenziale ordinaria

$$\bar{u}'' + \bar{f}(x, \bar{u}, \bar{u}') = 0$$

ammetta un integrale $\bar{u}(x)$, definito in tutto l'intervallo $0 \leqslant x \leqslant l$, che assuma agli estremi di questo valori positivi. Analogamente, posto

$$\underline{f}(x, u, u_x) = \min_{0 \leq t \leq T} f(x, t, u, u_x)\,,$$

l'equazione ordinaria

$$\underline{u}'' + \underline{f}(x, \underline{u}, \underline{u}') = 0$$

ammetta un integrale $\underline{u}(x)$, definito in tutto l'intervallo $0 \leqslant x \leqslant l$, che assuma agli estremi di questo valori negativi. Inoltre sia sempre

$$\overline{u}(x) < \overline{u}(x)\,.$$

c) *Quando u è compreso in un intervallo limitato, $|u| \leqslant M$, per ogni valore di x, t, u_x, si abbia*

$$|f(x, t, u, u_x)| \leqslant \gamma_M(|u_x|)\,,$$

dove $\gamma_M(\varrho)$ è una funzione dipendente solo da M, positiva, non decrescente e tale che sia

$$\gamma_M(\varrho) = o(\varrho^2) \qquad per \qquad \varrho \to +\infty\,.$$

Il metodo qui seguito consiste essenzialmente in uno studio preliminare delle soluzioni periodiche dell'equazione (del calore)

$$u_t = u_{xx} + f(x, t) \tag{2}$$

che conduce ad esprimere tali soluzioni nella forma

$$u = W(f)\,, \tag{3}$$

dove W è una ben determinata operazione funzionale lineare. Quando la f si pensi dipendente dalla u e dalla u_x, come nel secondo membro della (1), si ottiene una equazione funzionale; questa verrà trattata col classico metodo di LERAY e SCHAUDER.

Richiamiamo dapprima un semplice risultato intorno all'equazione (2).

L'equazione (2) *ha una ed una sola soluzione periodica soddisfacente alle condizioni al contorno $u(0, t) = u(l, t) = 0$ per $-\infty < t < +\infty$, se la funzione $f(x, t)$ è periodica rispetto a t, di periodo T, continua nella striscia*

$0 \leqslant x \leqslant l$, $-\infty < t < +\infty$, *e soddisfa in ogni punto di questa striscia ad una condizione di Hölder.*

Consideriamo, infatti, la funzione

$$u(x,t) = \int_0^l d\xi \int_{-\infty}^t G(x,\xi;\,t-\tau) f(\xi,\tau)\, d\tau\,, \tag{4}$$

dove la $G(x,\xi;t)$ è la nota funzione di Green che si può rappresentare nella forma [4]

$$G(x,\xi;t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi^2 t/l^2}\,\mathrm{sen}\, n(\pi/l)\xi \cdot \mathrm{sen}\, n(\pi/l)x\,, \tag{5}$$

oppure nella forma

$$G(x,\xi;t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(e^{-(x-\xi+2nl)^2/(4t)} - e^{-(x+\xi+2nl)^2/(4t)}\right). \tag{5'}$$

La (4) rappresenta la soluzione richiesta, perchè:

a) La funzione $G(x,\xi;\,t-\tau)f(\xi,\tau)$ è certamente sommabile nella semistriscia $\{-\infty < \tau < t,\ 0 \leqslant \xi \leqslant l\}$. [Questo risulta ovviamente dalla (5) per $\tau \to -\infty$ e dalla (5′) per $\tau \to t$.] Si vede poi dalla (5) che la $u(x,t)$ si annulla sui bordi della striscia.

b) La $u(x,t)$ è una funzione periodica rispetto a t di periodo T. Infatti è:

$$u(x,t+T) =$$
$$= \int_0^l d\xi \int_{-\infty}^{t+T} G(x,\xi;\,t+T-\tau) f(\xi,\tau)\, d\tau = \int_0^l d\xi \int_{-\infty}^{t} G(x,\xi;\,t-\tau) f(\xi,\tau+T)\, d\tau = u(x,t).$$

c) La $u(x,t)$ è funzione derivabile rispetto a x con derivata continua nella striscia chiusa, e la derivata ha l'espressione

$$u_x(x,t) = \int_0^l d\xi \int_{-\infty}^t G_x(x,\xi;\,t-\tau) f(\xi,\tau)\, d\tau\,, \tag{6}$$

dove la funzione G_x risulta anch'essa sommabile nella semistriscia $\{0 \leqslant \xi \leqslant l,\ -\infty < \tau < t\}$. Si vede così che per $|u|$ e $|u_x|$ si possono porre le limi-

---

(4) Cfr., ad es., G. Doetsch, *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*, J. Springer, Berlino 1937; ved. p. 358.

tazioni

$$(7) \qquad |u(x,t)| \leqslant \|f\| \cdot H_1\,, \qquad |u_x(x,t)| \leqslant \|f\| \cdot H_2\,,$$

avendo indicato con $\|f\|$ il massimo del modulo di $f(x, t)$, e con H_1 e H_2 delle quantità che dipendono soltanto dalla larghezza l della striscia. Possiamo cercare anche delle limitazioni agli accrescimenti della u e della u_x: basta seguire il procedimento adottato dal GEVREY [5], con la sola variante che qui dobbiamo considerare un campo di integrazione infinito. Tenendo presenti volta a volta le espressioni (5) e (5′) di G, troviamo:

$$(8) \qquad \begin{cases} |u(x+h,\, t+k) - u(x,t)| \leqslant \|f\| \cdot K_1\{|h| + |k|(|\log|k|| + 1)\}\,, \\ |u_x(x+h,\, t+k) - u_x(x,t)| \leqslant \|f\| \cdot K_2\{|h|(|\log|h|| + 1) + |k|^{1/2}\}\,, \end{cases}$$

dove le costanti positive K_1 e K_2 dipendono solo da l. In Appendice, n. II, riportiamo, per comodità del lettore, i calcoli che conducono a queste formule. È importante notare che, nello stabilire queste proprietà, occorre soltanto l'ipotesi della continuità della $f(x, t)$.

d) La $u(x, t)$ possiede in ogni punto interno le derivate u_t e u_{xx} finite e soddisfacenti alla (2); qui si utilizza l'ipotesi che la $f(x, t)$ soddisfi ad una condizione di HÖLDER.

e) La funzione $u(x, t)$ è l'unica soluzione periodica della (2); infatti, se v fosse un'altra soluzione periodica, posto $w = u - v$, la w dovrebbe soddisfare all'equazione

$$w_t = w_{xx}$$

con le solite condizioni al contorno. Ma si può dimostrare facilmente che ogni soluzione di tal tipo tende a zero esponenzialmente per $t \to +\infty$; ne segue che la funzione w, differenza di due soluzioni periodiche, deve essere identicamente nulla.

2. – Siamo ora in grado di passare allo studio della (1). Supponiamo intanto verificata la ipotesi a) del Teorema I. Possiamo allora affermare che tutte e sole le soluzioni cercate sono le soluzioni periodiche di periodo T dell'equazione integrodifferenziale

$$(9) \qquad u(x,t) = \int_0^l d\xi \int_{-\infty}^t G(x, \xi; t-\tau) f(\xi, \tau, u(\xi,\tau), u_x(\xi,\tau))\, d\tau\,,$$

---

[5] M. GEVREY, *Sur les équations aux dérivées partielles du tipe parabolique*, J. Math. Pures Appl. **78**, 305-574 (1913); cfr., in particolare, pp. 375-360.

che potremo indicare brevemente così:

$$u = W(f(u)) \, . \tag{9'}$$

Infatti, per quanto visto sopra e, in particolare, per l'unicità della soluzione (4) dimostrata in e), ogni soluzione periodica di periodo T della (1) deve soddisfare alla (9). Viceversa, ogni soluzione della (9), per quanto vista in c), [precisamente per le limitazioni (8)], soddisfa, assieme alla sua derivata u_x, ad una condizione di HÖLDER. Ne segue che la $f(x, t, u, u_x)$, che è per ipotesi hölderiana nel complesso dei suoi argomenti, è pure hölderiano rispetto a x e t quando u e u_x si pensino dipendenti da queste variabili. Ogni soluzione periodica, di periodo T, della (9) è dunque effettivamente una soluzione della (1).

Precisiamo ora lo spazio funzionale su cui dovrà operare la trasformazione definita dal secondo membro della (9): sarà *lo spazio delle funzioni periodiche, di periodo T, rispetto a t, continue assieme alla loro derivata rispetto a x nella solita striscia chiusa. Assumendo la norma*

$$\|u\| = \max_{0 \le t \le T} |u| + \max_{0 \le x \le T} |u_x| \, , \tag{10}$$

questo spazio risulta evidentemente completo. Indicheremo nel seguito questo spazio con Σ. In questo spazio la $W(f(u))$ *è una operazione completamente continua.* Ciò si vede facilmente riflettendo che, quando $\|u\|$ si mantiene limitata anche $\|f\|$ si mantiene limitata. Dalle (7) e (8) si vede allora immediatamente che ogni insieme di infinite funzioni u che sia limitato in Σ viene mutato in un insieme di funzioni egualmente continue ed egualmente limitate, che è compatto secondo il classico teorema di ASCOLI-ARZELÀ.

Ricondotto il nostro problema alla risoluzione della (9) nello spazio Σ, potremmo pensare di applicare a questa equazione il teorema del punto unito nella sua forma più immediata: potremmo cioè cercare se esiste una sfera di Σ che dalla $W(f(u))$ viene mutata in una sua parte. Però, maggiorando il secondo membro della (9) nel modo che si presenta più spontaneo, saremmo indotti a fare per la f ipotesi molto restrittive (limitazioni di tipo lineare all' accrescimento rispetto ad u e u_x con opportune costanti, per $|u|$ e $|u_x| \to +\infty$). Preferiamo invece applicare il metodo di LERAY e SCHAUDER [6],

---

[6] J. LERAY et J. SCHAUDER, *Topologie et équations fonctionnelles*, Ann. Sci. École Norm. Super. (3) **51**, 45-78 (1934). Per una esposizione del metodo di LERAY e SCHAUDER e per una completa bibliografia rimandiamo all'opera: C. MIRANDA, *Problemi di esistenza in Analisi funzionale*, Litografia Tacchi, Pisa 1949.

poichè ci permette di ragionare direttamente sulla (1), sfruttando le sue particolari proprietà [proprietà che non si « vedono » più nel nucleo G della (9)].

3. – Procediamo ora alla limitazione « a priori » delle nostre soluzioni. Prima di tutto, secondo un accorgimento usato spesso in altre ricerche per analogo scopo, mutiamo nel secondo membro della (1) la $f(x, t, u, u_x)$ in una nuova funzione $F(x, t, u, u_x)$ così definita [ricordando la condizione b) del Teorema I]:

$$(11)\qquad \begin{cases} F(x, t, u, u_x) = f(x, t, u, u_x) & \text{per} \quad \underline{u}(x) \leqslant u \leqslant \overline{u}(x), \\ F(x, t, u, u_x) = f(x, t, \overline{u}, u_x) - (u - \overline{u}) & \text{per} \quad u > \overline{u}(x), \\ F(x, t, u, u_x) = f(x, t, \underline{u}, u_x) - (u - \underline{u}) & \text{per} \quad u < \underline{u}(x). \end{cases}$$

D'ora in poi considereremo, al posto della (1), l'equazione

$$(1')\qquad u_t = u_{xx} + F(x, t, u, u_x)\,.$$

Porremo ancora

$$\overline{F}(x, u, u_x) = \max_{0 \leq t \leq T} F(x, t, u, u_x)\,,$$

$$\underline{F}(x, u, u_x) = \min_{0 \leq t \leq T} F(x, t, u, u_x)\,.$$

Le funzioni $\overline{u}(x)$ e $\underline{u}(x)$ saranno allora anche integrali delle nuove equazioni differenziali corrispondenti, cioè sarà:

$$(12)\qquad \begin{cases} \overline{u}''(x) + \overline{F}(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x)) = 0\,, \\ \underline{u}''(x) + \underline{F}(x, \underline{u}(x), \underline{u}'(x)) = 0\,. \end{cases}$$

Dimostriamo ora che tutte le soluzioni periodiche della (1′), verificanti le solite condizioni, soddisfano alla limitazione

$$\underline{u}(x) \leqslant u(x, t) \leqslant \overline{u}(x)\,.$$

Consideriamo infatti la funzione (continua e periodica)

$$z(x, t) = u(x, t) - \overline{u}(x)$$

e supponiamo, per assurdo, che essa abbia un massimo positivo nel punto $(\overline{x}, \overline{t})$ [$(\overline{x}, \overline{t})$ dovrà essere interno alla striscia perchè sui bordi $z(x, t)$ è certamente negativa]. Sia $z(\bar{x}, \bar{t}) = m > 0$. Nel punto $(\bar{x}, \bar{t})$ sarà, evidentemente,

$$
(13) \qquad \begin{cases} z_x(\bar{x}, \bar{t}) = u_x(\bar{x}, \bar{t}) - \bar{u}'(\bar{x}) = 0\,, \\ z_t(\bar{x}, \bar{t}) = u_t(\bar{x}, \bar{t}) = 0\,, \\ z_{xx}(\bar{x}, \bar{t}) = u_{xx}(\bar{x}, \bar{t}) - \bar{u}''(\bar{x}) \leqslant 0\,. \end{cases}
$$

Ora, dalla (1′) e dalle prime due delle (13) si deduce che nel punto $(\bar{x}, \bar{t})$ è:

$$
\begin{aligned} u_{xx}(\bar{x}, \bar{t}) &= -F(\bar{x}, \bar{t}, u(\bar{x}, \bar{t}), u_x(\bar{x}, \bar{t})) = \\ &= -F(\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}(\bar{x}), \bar{u}'(\bar{x})) + u(\bar{x}, \bar{t}) - \bar{u}(\bar{x}) = -F(\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}(\bar{x}), \bar{u}'(\bar{x})) + m\,. \end{aligned}
$$

Ricordando poi che, per ipotesi, è

$$
\bar{u}''(\bar{x}) = -F(\bar{x}, \bar{u}(\bar{x}), \bar{u}'(\bar{x}))
$$

e sottraendo membro a membro le due ultime relazioni scritte, si ottiene:

$$
u_{xx}(\bar{x}, \bar{t}) - \bar{u}''(\bar{x}) = z_{xx}(\bar{x}, \bar{t}) \geqslant m > 0\,.
$$

Ma questa è in contraddizione con l'ultima delle (13). Analogamente si procede per la limitazione di sotto e si conclude che è

$$
(14) \qquad \underline{u}(x) \leqslant u(x, t) \leqslant \bar{u}(x)\,, \qquad \text{(con } t \text{ qualsiasi).}
$$

Procediamo ora alla limitazione « a priori » di $|u_x|$, valendoci naturalmente della limitazione già trovata per $|u|$.

Chiamando M il maggiore tra i valori assoluti del massimo di $\bar{u}(x)$ e del minimo di $\underline{u}(x)$, avremo

$$
|u(x, t)| \leqslant M\,.
$$

Applichiamo ora la formula di GREEN ad un rettangolo di altezza δ che ha come lato superiore il segmento $\{\tau = t,\ 0 \leqslant \xi \leqslant l\}$ e che è limitato dai lati della solita striscia. Avremo:

$$
(15) \qquad u(x, t) = \\
= \int_0^l d\xi \int_{t-\delta}^{t} G(x, \xi;\ t-\tau) F(\xi, \tau, u(\xi, \tau), u_x(\xi, \tau))\, d\tau + \int_0^l G(x, \xi;\ \delta) u(\xi, t-\delta)\, d\xi\,.
$$

L'espressione di u_x si può ottenere derivando rispetto ad x sotto il segno di integrale:

(16)
$$u_x(x, t) =$$
$$= \int_0^l d\xi \int_{t-\delta}^t G_x(x, \xi;\ t-\tau) F(\xi,\ \tau,\ u(\xi, \tau),\ u_x(\xi, \tau))\, d\tau + \int_0^l G_x(x,\ \xi;\ \delta)\, u(\xi,\ t-\ \delta)\, d\xi\,.$$

Sia N il massimo di $|u_x|$. Se applichiamo la (16), calcolata nel punto in cui $|u_x|$ raggiunge il suo massimo e maggioriamo [ricordando la condizione c) dell'enunciato], ricaviamo:

$$N \leqslant \gamma_M(N) \int_0^l d\xi \int_{t-\delta}^t |G_x(x, \xi;\ t-\tau)|\, d\tau + M \int_0^l |G_x(x,\ \xi,\ \delta)|\, d\xi\,.$$

Tenendo poi presente l'espressione di G_x data dalla (5'), si vede facilmente che è

$$\int_0^l |G_x(x,\ \xi;\ \delta)|\, d\xi < K\delta^{-1/2}\,,$$

essendo K una costante opportuna. Da questa si ricava subito la limitazione per l'altro integrale:

$$\int_0^l d\xi \int_{t-\delta}^t |G_x(x, \xi;\ t-\tau)|\, d\tau < 2K\delta^{1/2}\,.$$

Avremo allora:

(17)
$$N \leqslant 2\gamma_M(N) K\delta^{1/2} + MK\delta^{-1/2}\,.$$

Possiamo ora disporre di δ (che finora avevamo lasciato indeterminato) per ottenere che il secondo membro della (17) assuma il suo valore minimo (restando naturalmente fissi gli altri argomenti). Otterremo:

(18)
$$N \leqslant 2^{3/2} K M^{1/2} [\gamma_M(N)]^{1/2}\,.$$

Da questa si deduce la disuguaglianza:

$$N^2/\gamma_M(N) \leqslant 8K^2 M\,.$$

Ricordando la condizione cui soddisfa la funzione $\gamma_M(N)$, si ottiene immediatamente una limitazione per N: se $\overline{N}$ è il primo numero tale che per ogni $N > \overline{N}$ sia sempre

$$N^2/\gamma_M(N) > 8K^2M ,$$

si avrà:

$$N \leqslant \overline{N} .$$

4. – Converrà ora considerare, tenendo presente la (9′), la trasformazione così definita:

$$U = u - W(F(u)) , \tag{20}$$

dove lo spazio-immagine, a cui appartiene U, è ancora lo spazio Σ. Potremo considerare le soluzioni cercate come punti che vengono mutati nell'origine dello spazio-immagine. Anzitutto, chiamato N' il maggiore fra $\overline{N}$, il massimo di $|\overline{u}'(x)|$ e quello di $|\underline{u}'(x)|$, consideriamo nel nostro spazio funzionale Σ un dominio D così definito:

$$D \equiv \{\underline{u}(x) - \sigma \leqslant u(x, t) \leqslant \overline{u}(x) + \sigma,\ |u_x| \leqslant N' + \sigma\}, \tag{21}$$

essendo σ un numero positivo arbitrario. Tutte le eventuali soluzioni saranno certamente *interne* a questo dominio.

Mostriamo ora che *la trasformazione* (20), *nel dominio D, ha rispetto alla origine del suo spazio-immagine grado topologico* ± 1. Per questo, noi sostituiremo, nel secondo membro della (1′), alla funzione F una funzione Φ per cui si possa riconoscere facilmente che il grado topologico, relativo sempre al dominio D e all'origine dello spazio-immagine, è ± 1. Dimostreremo poi che si può passare con continuità dalla Φ alla F in modo che le eventuali soluzioni si mantengano sempre interne a D. Così il nostro asserto sarà provato e si potrà affermare che il nostro problema ammette almeno una soluzione.

La funzione Φ sia dunque così definita:

$$\left\{\begin{array}{ll} \Phi(x, u) = [u - \underline{u}(x)]\dfrac{\overline{F}(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x)) - \underline{F}(x, \underline{u}(x), \underline{u}'(x))}{\overline{u}(x) - \underline{u}(x)} + \underline{F}(x, \underline{u}(x), \underline{u}'(x)), & \\ & \text{per } \underline{u}(x) \leqslant u \leqslant \overline{u}(x), \\ \Phi(x, u) = \overline{F}(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x)) - [u - \overline{u}(x)] & \text{per } u > \overline{u}(x), \\ \Phi(x, u) = \underline{F}(x, \underline{u}(x), \underline{u}'(x)) - [u - \underline{u}(x)] & \text{per } u < \underline{u}(x). \end{array}\right. \tag{22}$$

Consideriamo ora l'equazione

$$u_t = u_{xx} + \lambda F(x, t, u, u_x) + (1-\lambda)\Phi(x, u) \,, \tag{23}$$

dove il parametro λ può assumere tutti i valori dell'intervallo chiuso $(0, 1)$. Dimostriamo che, comunque si prenda λ in questo intervallo, le eventuali soluzioni sono sempre interne a D. Basterà ripetere, con qualche modificazione, i ragionamenti fatti nel paragrafo 3, per il caso $\lambda = 1$.

Per la limitazione «a priori» di u, basterà notare che l'equazione «maggiorante» indipendente da t sarà ora:

$$\overline{u}'' + \lambda \overline{F}(x, \overline{u}, \overline{u}') + (1-\lambda)\Phi(x, \overline{u}) = 0 \,,$$

e questa ammetterà ancora l'integrale $\overline{u}(x)$. Definita come nel paragrafo 3 la funzione $z(x, t)$, in corrispondenza di un suo massimo positivo nel punto $(\overline{x}, \overline{t})$ (certamente interno alla striscia) dovrebbe aversi, per la (23),

$$\begin{aligned} u_{xx}(\overline{x}, \overline{t}) &= -\lambda F(\overline{x}, \overline{t}, u(\overline{x}, \overline{t}), u_x(\overline{x}, \overline{t})) - (1-\lambda)\Phi(\overline{x}, u(\overline{x}, \overline{t})) = \\ &= -\lambda F(\overline{x}, \overline{t}, \overline{u}(\overline{x}), \overline{u}'(\overline{x})) + \lambda[u(\overline{x}, \overline{t}) - \overline{u}(\overline{x})] - \\ &\quad - (1-\lambda)\overline{F}(\overline{x}, \overline{u}(\overline{x}), \overline{u}'(\overline{x})) + (1-\lambda)[u(\overline{x}, \overline{t}) - \overline{u}(\overline{x})] \,, \end{aligned}$$

cioè, indicando ancora con m il massimo positivo di z,

$$u_{xx}(\overline{x}, \overline{t}) = -\lambda F(\overline{x}, \overline{t}, \overline{u}(\overline{x}), \overline{u}'(\overline{x})) - (1-\lambda)\overline{F}(\overline{x}, \overline{u}(\overline{x}), \overline{u}'(\overline{x})) + m \,,$$

da cui

$$u_{xx}(\overline{x}, \overline{t}) \geqslant -\overline{F}(\overline{x}, \overline{u}(\overline{x}), \overline{u}'(\overline{x})) + m \,.$$

Ricordando ora la prima delle (12) e sottraendo membro a membro si ottiene

$$u_{xx}(\overline{x}, \overline{t}) - \overline{u}''(\overline{x}) = z_{xx}(\overline{x}, \overline{t}) \geqslant m > 0 \,,$$

relazione incompatibile col fatto che $(\overline{x}, \overline{t})$ sia un punto di massimo per $z(x, t)$. Analogamente si procede per la limitazione inferiore. Si conclude che, per qualunque valore di λ, vale la limitazione (14).

Per la limitazione di $|u_x|$ scriveremo, al posto della (16), l'equazione

$$u_x(x,t)=\int_0^l d\xi \int_{t-\delta}^t G_x(x,\xi;t-\tau)[\lambda F(\xi,\tau,u(\xi,\tau),u_x(\xi,\tau))+(1-\lambda)\Phi(\xi,u(\xi,\tau))]d\tau+$$
$$+\int_0^l G_x(x,\xi,\delta)u(\xi,t-\delta)\,d\xi\,.$$

Ora, essendo $u(x,t)$ sempre compresa tra $\underline{u}(x)$ e $\overline{u}(x)$, la funzione Φ, che in quell'intervallo è lineare rispetto ad u, assumerà valori sempre compresi tra quelli di $\underline{F}(x,\underline{u}(x),\underline{u}'(x))$ e quelli di $\overline{F}(x,\overline{u}(x),\overline{u}'(x))$. Ricordando poi la condizione c) dell'enunciato, detto N'' il maggiore tra i massimi di $|\overline{u}'(x)|$ e $|\underline{u}'(x)|$, si ha

$$|\Phi(x,u(x,t))|\leqslant \gamma_M(N'') \qquad \text{per} \qquad \underline{u}(x)\leqslant u(x,t)\leqslant \overline{u}(x)\,.$$

Possiamo allora scrivere, indicando con N il massimo di $|u_x|$,

$$N\leqslant 2[\lambda\gamma_M(N)+(1-\lambda)\gamma_M(N'')]K\delta^{1/2}+MK\delta^{-1/2}\,.$$

Fissando ora δ come nel paragrafo 3, si ottiene

$$N\leqslant 2^{3/2}KM^{1/2}[\gamma\lambda_M(N)+(1-\lambda)\gamma_M(N'')]^{1/2}\,.$$

Da questa si vede facilmente che, se N supera N'', sarà certamente minore o uguale della costante $\overline{N}$ del paragrafo 3. In ogni caso sarà:

$$N\leqslant N'\,,$$

dove N', come abbiamo detto sopra, è il maggiore tra N'' e $\overline{N}$. Abbiamo così dimostrato che tutte le soluzioni della (23) soddisfacenti alle solite condizioni sono interne al dominio D.

5. – Occupiamoci ora dell'equazione

$$u_t=u_{xx}+\Phi(x,u)\,, \tag{24}$$

che è l'equazione «di partenza», cioè la (23) in cui si è posto $\lambda=0$. Per provare che la relativa trasformazione, analoga alla (20),

$$U=u-W(\Phi(u)) \tag{25}$$

ha, relativamente al dominio D e all'origine dello spazio-immagine, grado topologico ± 1, basterà dimostrare che

esiste una ed una sola soluzione periodica $u(x, t)$ *della* (24) *e questa si mantiene interna al dominio* $\underline{u}(x) \leqslant u \leqslant \overline{u}(x)$,

la trasformazione (25) (che allora, evidentemente, è lineare nell'intorno di questa soluzione) *è completamente invertibile nell'intorno stesso.*

Consideriamo dunque la (24): essa ammette una soluzione nulla ai bordi e costante rispetto a t, che sarà perciò una soluzione periodica. Questo si deduce dal fatto che l'equazione ordinaria

$$u'' + \Phi(x, u) = 0$$

ammette una ed una sola soluzione nulla agli estremi dell'intervallo $(0, l)$. Infatti l'equazione omogenea corrispondente è

$$y'' + y\,\frac{\overline{F}\big(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x)\big) - \underline{F}\big(x, \underline{u}(x), \underline{u}'(x)\big)}{\overline{u}(x) - \underline{u}(x)} = 0\,, \tag{26}$$

e i suoi integrali non hanno coppie di punti coniugati nell'intervallo $(0, l)$, per il teorema di STURM, perchè $y(x) = \overline{u}(x) - \underline{u}(x)$ è un integrale particolare sempre positivo nell'intervallo chiuso. Naturalmente noi ci siamo preoccupati soltanto della espressione della $\Phi(x,u)$ nel dominio $\underline{u}(x) \leqslant u \leqslant \overline{u}(x)$, non potendo, per quanto visto nel paragrafo 4, esservi soluzioni che escano da questo. Di più, considerando che per la nostra equazione ordinaria vale un teorema di unicità, possiamo affermare che la nostra soluzione è interna al dominio, cioè si ha $\underline{u}(x) < u(x) < \overline{u}(x)$.

Non vi possono essere altre soluzioni periodiche della (24). Consideriamo infatti l'equazione omogenea corrispondente alla (24) e dimostriamo che essa ha come sola soluzione periodica (s'intende nulla sui bordi) la soluzione identicamente nulla. Questa equazione sarà:

$$u_t = u_{xx} + u\,\frac{\overline{F}\big(x, \overline{u}(x), \overline{u}'(x)\big) - \underline{F}\big(x, \underline{u}(x), \underline{u}'(x)\big)}{\overline{u}(x) - \underline{u}(x)}\,. \tag{27}$$

Sempre per il fatto che l'intervallo chiuso $(0, l)$ è privo di coppie di punti coniugati della (26), potremo trovare una funzione $\overline{y}(x)$ sempre positiva nell'intervallo $(0, l)$ che soddisfi all'equazione

$$\overline{y}''(x) + \overline{y}(x)\left(\frac{\overline{F} - \underline{F}}{\overline{u} - \underline{u}} + \varepsilon\right) = 0\,,$$

con ε costante positiva, pur di prendere ε sufficientemente piccola. Poniamo allora $u^*(x, t) = \overline{y}(x)e^{-(\varepsilon/2)t}$. Si avrà $u_t^*(x, t) = -(\varepsilon/2)u^*(x, t)$, mentre sarà:

$$u_{xx}^* + u^* \frac{\overline{F} - \underline{F}}{\overline{u} - \underline{u}} = \overline{y}''(x)e^{-(\varepsilon/2)t} + \overline{y}(x)e^{-(\varepsilon/2)t}\frac{\overline{F} - \underline{F}}{\overline{u} - \underline{u}} = -\varepsilon u^* .$$

È dunque sempre:

$$u_t^* > u_{xx}^* + u^* \frac{\overline{F} - \underline{F}}{\overline{u} - \underline{u}} .$$

Poichè si ha $\lim\limits_{t \to -\infty} u^*(x, t) = +\infty$, uniformemente rispetto ad x, in virtù di un lemma dovuto a H. WESTPHAL (⁷), ogni soluzione periodica nulla sui bordi, avendo come maggiorante $u^*(x, t)$ che è infinitesima per $t \to +\infty$, non può assumere valori positivi. Analogamente si dimostra che non può assumere valori negativi: rimane perciò la sola soluzione identicamente nulla.

Dal fatto che l'equazione omogenea (27) possiede solo la soluzione periodica identicamente nulla, segue, per il principio dell'alternativa, che la trasformazione (25) sarà completamente invertibile e perciò il suo grado topologico relativo al dominio e all'origine dello spazio-immagine sarà ± 1 (⁸).

Si potrà così concludere che l'equazione (1') ammette una soluzione, almeno, la quale, essendo contenuta nel dominio $\underline{u}(x) \leqslant u \leqslant \overline{u}(x)$, in cui la (1) e la (1') coincidono, sarà pure soluzione della (1). Il Teorema I risulta così completamente dimostrato.

6. – Esaminiamo ora, a conclusione del ragionamento, le ipotesi da cui siamo partiti. L'ipotesi a) non fa che imporre una condizione di regolarità locale, del resto poco restrittiva, alla funzione f. L'ipotesi b) riconduce, praticamente, il nostro problema ad un problema di valori ai limiti per equazioni ordinarie del secondo ordine; per la verifica dell'ipotesi b) abbiamo perciò una vastissima gamma di criteri che non sarà necessario riferire perchè sono ben noti (⁹). Per quanto riguarda la condizione c), notiamo che essa stessa è analoga a certe condizioni che si pongono di solito nei problemi ai limiti per equazioni ordinarie. Essa soddisfa, in fondo, alla stessa esigenza:

(⁷) H. WESTPHAL, *Zur Abschätzung der Lösung nichtlinearer parabolischer Differentialgleichungen*, Math. Z. **51**, 690-695 (1949).

(⁸) Ved. Memoria citata in (⁶).

(⁹) Ved., ad es., i risultati di CACCIOPPOLI, CINQUINI, SCORZA-DRAGONI, NAGUMO, ...

quella di permettere una maggiorazione della derivata rispetto ad x (che qui diventa una derivata parziale).

Potrebbe venire il dubbio però che la condizione c) si potesse sostituire con una condizione meno restrittiva, del tipo

$$\text{c}') \qquad \gamma_M(\varrho) = o(\varrho^\nu), \qquad \text{con } \nu > 2,$$

cioè che si potesse ammettere, in generale, per la f un accrescimento di ordine superiore al secondo. Ora si può vedere su di un esempio che *sostituendo alla* c) *la* c') *il nostro Teorema non sussiste più*. Consideriamo infatti l'equazione differenziale (dipendente da un parametro positivo α)

$$(28) \qquad u_t = u_{xx} + \sigma(\alpha)\,|u_x|^{\gamma(\alpha)},$$

dove si è posto:

$$\sigma(\alpha) = (1-\alpha)\alpha^{-1/(1-\alpha)}, \qquad \gamma(\alpha) = \frac{2-\alpha}{1-\alpha} = 1 + \frac{1}{1-\alpha} \quad \text{con} \quad 0 < \alpha < 1 .$$

Questa equazione soddisfa, evidentemente, alla condizione a). Essa soddisfa anche alla condizione b) perchè l'equazione ordinaria $y'' = -\sigma(\alpha)\,|y'|^{\gamma(\alpha)}$ ammette la soluzione $y = b$, con b reale qualunque. Non soddisfa alla condizione c), ma si vede facilmente dall'espressione di $\gamma(\alpha)$ che, pur di prendere α sufficientemente piccolo, può sempre soddisfare ad una condizione del tipo c').

Si verifica agevolmente che la (28) ammette la soluzione (indipendente da t e perciò periodica)

$$u(x, t) = x^\alpha, \qquad (x > 0).$$

Pur di prendere la larghezza l della striscia sufficientemente piccola, la funzione x^α è l'unica soluzione periodica della (28) soddisfacente alle condizioni al contorno

$$u(0, t) = 0, \qquad u(l, t) = l^\alpha, \qquad (-\infty < t < +\infty).$$

Rinviamo all'Appendice, n. III, la dimostrazione di questo fatto.

Ma la funzione $u = x^\alpha$ non appartiene alla classe di funzioni in cui noi cerchiamo la nostra soluzione, perchè la sua derivata diventa infinita per $x = 0$. Si potrebbe obiettare che le condizioni al contorno non sono qui quelle che abbiamo supposto nel Teorema; ma si vede subito che la semplice trasformazione $z = u - xl^{\alpha-1}$ porta le condizioni al contorno ad essere le solite, pur mantenendo all'equazione e alla soluzione le proprietà che ci interessano.

Potremmo pensare allora di poter assumere una condizione del tipo c'), al posto della c), pur di ampliare l'insieme delle funzioni in cui cerchiamo la soluzione: riflettendo sull'esempio considerato, potremmo eliminare ogni restrizione al comportamento della derivata $u_x(x, t)$ sui bordi della striscia. Ma l'equazione (28) ci fornisce ancora un esempio negativo. Se imponiamo le condizioni al contorno:

$$u(0, t) = 0 , \qquad u(l, t) = r \qquad \text{con} \qquad r > l^{\alpha} ,$$

allora non può esistere alcuna funzione che sia periodica, continua nella striscia chiusa $\{0 \leqslant x \leqslant l, \ -\infty < t < +\infty\}$ e che soddisfi alla (28) in ogni punto interno. Anche per la dimostrazione di questo fatto rinviamo all'Appendice.

7. – Consideriamo brevemente il caso particolare in cui nella (1) la funzione f non dipenda dall'argomento u_x. Possiamo enunciare il seguente risultato:

Teorema II. *Nell'equazione*

$$u_t = u_{xx} + f(x, t, u) \tag{29}$$

la funzione f sia continua nel dominio $\{0 \leqslant x \leqslant l, \ -\infty < t < +\infty, -\infty < u < +\infty\}$, periodica rispetto a t di periodo T e soddisfi ad una condizione di Hölder nel complesso dei suoi argomenti; inoltre esista una costante $k < \pi^2/l^2$ tale che per ogni u maggiore in modulo di un certo valore e per ogni x e t, si abbia

$$\frac{f(x, t, u)}{u} < k .$$

Allora l'equazione ammette una soluzione, almeno, continua assieme con la sua derivata rispetto ad x nel dominio stesso, periodica rispetto a t di periodo T e nulla al contorno.

Vediamo come si può procedere, in questo caso più semplice, alla maggiorazione della soluzione u. Evidentemente, per ogni valore $u \geqslant 0$ si potrà porre

$$f(x, t, u) < ku + S,$$

dove S è una costante positiva sufficientemente grande. Considerando l'equazione differenziale ordinaria

$$\overline{u}'' + k\overline{u} + S = 0 ,$$

si trova che essa ammette certamente una soluzione $\overline{u}(x)$ sempre positiva nell'intervallo $0 \leqslant x \leqslant l$. Infatti la costante k è minore π^2/l^2 che è il primo autovalore dell'equazione omogenea. Si dimostra allora facilmente che per le soluzioni periodiche della (29) nulle sui bordi si deve avere

$$u(x, t) \leqslant \overline{u}(x) .$$

Analogamente si procede per la limitazione inferiore. La limitazione di $|u_x|$ seguirà qui immediatamente da quella di $|u|$. In questo caso semplicissimo si potrà considerare, come equazione analoga alla (23), l'equazione

$$u_t = u_{xx} + \lambda f(x, t, u) ,$$

con $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. La relativa trasformazione funzionale sarà

$$U = u - \lambda W(f(u))$$

la quale per $\lambda = 0$ si riduce all'identità.

Appendice.

I. – Il risultato di Dz. Ch. Karimov è errato, oppure è stato riferito male ([10]), per quello che riguarda l'unicità della soluzione periodica. L'equazione considerata dal Karimov è la seguente:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[P(x)\frac{\partial z}{\partial x}\right] - \frac{\partial z}{\partial t} = \Phi(x, t) + \mu f(z) , \qquad (\mu = \text{cost.}),$$

dove la $\Phi(x, t)$ è periodica rispetto a t e soddisfa a certe condizioni di regolarità che non ci interessano. Le ipotesi che si fanno sulla $f(z)$ sono queste:

([10]) Cfr. loc. cit. in ([2]).

che sia una funzione pari, limitata e dotata di derivata soddisfacente a una condizione di LIPSCHITZ. Deve essere inoltre $f(0) = 0$. Consideriamo ora l'esempio

$$z_t = z_{xx} + z^2 .$$

Tutte le condizioni dell'enunciato sono soddisfatte, tranne la limitatezza di $\mu f(z)$ che è qui $-z^2$. Questa condizione, però, potrà essere sistemata in un secondo tempo. Cerchiamo soluzioni indipendenti da t e nulle per $x = 0$ e $x = l$; ci riduciamo allora all'equazione ordinaria $z'' + z^2 = 0$. Questa ammette evidentemente l'integrale identicamente nullo; inoltre si trova facilmente che essa ammette anche un integrale sempre positivo all'interno dell'intervallo $(0, l)$ e nullo agli estremi di questo. Sia $\bar{z}$ il massimo di questo integrale. Consideriamo allora l'equazione

$$z_t = z_{xx} + \varphi(z) ,$$

dove $\varphi(z)$ coincide con z^2 per $|z| \leqslant \bar{z}$, mentre per $|z| > \bar{z}$ è definita in modo da risultare limitata e da soddisfare alle altre condizioni imposte dall'enunciato del KARIMOV. Questa equazione ammette due soluzioni nulle per $x = 0$ e $x = l$. Si conclude che le condizioni imposte non bastano a garantire l'unicità della soluzione del nostro problema.

II. – Giustificiamo le formule (8).

1°) *Giustificazione della prima delle formule* (8).

Per quello che riguarda l'incremento della $u(x, t)$ rispetto ad x, la limitazione si deduce subito dall'esistenza e limitatezza della derivata parziale rispetto ad x [formule (7)].

Per quanto riguarda l'incremento della u rispetto a t, diamo anzitutto, seguendo E. E. LEVI ([11]), l'espressione di alcuni integrali collegati con la soluzione fondamentale dell'equazione del calore. Indichiamo con $I_{\alpha,\beta}(t_2, t_1)$, $(t_2 > t_1 > 0,\ \alpha > -1)$, l'integrale

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^{\infty} \frac{x^\alpha}{t^\beta} e^{-x^2/(4t)} dx .$$

([11]) E. E. LEVI, *Sull'equazione del calore*, Ann. Mat. Pura Appl. (3) **14**, 187-264 (1907). Qui ci riferiamo, in particolare, alle pagine 230-231.

Con la trasformazione $\eta = x^2/(4t)$ si ottiene

$$I_{\alpha,\beta}(t_2, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} t^{(\alpha-2\beta+1)/2}\,\mathrm{d}t \int_0^\infty 2^\alpha \eta^{(\alpha-1)/2} e^{-\eta}\,\mathrm{d}\eta\,.$$

Ponendo ora

$$2^\alpha \int_0^\infty \eta^{(\alpha-1)/2} e^{-\eta}\,\mathrm{d}\eta = K_\alpha \quad \text{e} \quad \alpha - 2\beta + 3 = \gamma\,,$$

si ottiene, per $\gamma \neq 0$,

$$I_{\alpha,\beta}(t_2, t_1) = (t_1^{\gamma/2} - t_2^{\gamma/2}) 2K_\alpha/\gamma\,,$$

mentre per $\gamma = 0$ si ha:

$$I_{\alpha,\beta}(t_2, t_1) = (\log t_2 - \log t_1) K_\alpha\,.$$

Si conclude che per $\gamma > 0$ esiste l'integrale $I_{\alpha,\beta}(0, \delta)$ che indicheremo senz'altro con $I_{\alpha,\beta}(\delta)$.

Premesso questo, diamo a t un incremento positivo k. Dividiamo il campo d'integrazione in tre parti, mediante le rette $\tau = t$, $\tau = t - k$, e indichiamo con Ω il rettangolo $\{0 \leqslant x \leqslant l,\ t - k \leqslant \tau \leqslant t\}$, con Ω' il rettangolo $\{0 \leqslant x \leqslant l,\ t \leqslant \tau \leqslant t + k)$, con Ω'' la parte rimanente del campo d'integrazione. Avremo:

$$u(x, t + k) - u(x, t) =$$
$$= \iint_{\Omega+\Omega'} G(x, \xi;\, t + k - \tau) f(\xi, \tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau - \iint_{\Omega} G(x, \xi;\, t - \tau) f(\xi, \tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau +$$
$$+ \iint_{\Omega''} [G(x, \xi;\, t + k - \tau) - G(x, \xi;\, t - \tau)] f(\xi, \tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau\,.$$

I primi due integrali del secondo membro si possono maggiorare nel modo seguente. Consideriamo ad esempio il secondo integrale. Sarà, ricordando che $G(x, \xi; t)$ è sempre positiva nella striscia,

$$\left| \iint_{\Omega} G(x, \xi;\, t - \tau) f(\xi, \tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau \right| \leqslant \|f\| \iint_{\Omega} G(x, \xi;\, t - \tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau\,.$$

La funzione $G(x, \xi;\, t - \tau)$, per $\tau \to t$, si compone di una parte regolare e di un numero finito di termini singolari, secondo l'espressione (5'). Questi termini singolari sono, al più, tre. Integrandoli e maggiorando si ottengono integrali del tipo $I_{0,1/2}$. Notando che qui è $\gamma = 0 - 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 = 2$, onde

$I_{0,1/2}(k) = kK_0$, si ottiene:

$$\Big|\iint_{\Omega+\Omega'} \ldots\Big| + \Big|\iint_{\Omega} \ldots\Big| \leqslant \|f\| Rk\,,$$

essendo $R > 0$ una opportuna costante. Il terzo integrale, ponendo

$$\psi(x, \zeta) = \iint_{\Omega''} G(x, \xi;\, \zeta - \tau) f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau\,,$$

si può scrivere $\psi(x, t + k) - \psi(x, t)$. Applicando il teorema del valor medio e derivando sotto il segno di integrale [cosa lecita perchè $G(x, \xi;\, \zeta - \tau)$ è regolare per $t \leqslant \zeta \leqslant t + k$, $\tau \leqslant t - k$], risulta:

$$\Big|\iint_{\Omega''} \ldots\Big| = k\,|\psi'_t(x, t + \theta k)| = k\Big|\iint_{\Omega''} G_t(x, \xi;\, t + \theta k - \tau) f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau\Big|\,, \quad (0 < \theta < 1)\,.$$

Notiamo ora che la funzione G_t tende a zero esponenzialmente per $\tau \to -\infty$ [come si vede dalla (5)], mentre contiene tre termini, al più, che diventano infiniti per $\tau \to t + \theta k$ (e per $x = \xi$). Questi punti sono esclusi dal nostro campo di integrazione Ω''. Maggiorando gli integrali di questi termini singolari, si ottengono integrali del tipo $I_{0,3/2}$, $I_{2,5/2}$ che, come abbiamo visto, divergono con andamento logaritmico quando l'estremo superiore d'integrazione, relativamente alla variabile τ, si avvicina a $t + \theta k$. Si deduce che si può scrivere:

$$\Big|\iint_{\Omega''} \ldots\Big| \leqslant \|f\| R' k \{ |\log k| + 1 \}\,,$$

essendo R' una nuova costante. Riunendo tutte le limitazioni trovate e scegliendo una costante K_1 opportuna, si potrà concludere:

$$|u(x + h, t + k) - u(x, t)| \leqslant \|f\| K_1 \{ |h| + |k| (|\log |k|\,| + 1) \}.$$

2°) *Giustificazione della seconda delle formule* (8).

Consideriamo dapprima l'incremento di $u_x(x, t)$ rispetto ad x, ossia $u_x(x + h, t) - u_x(x, t)$. Dividiamo il campo d'integrazione in due campi mediante la retta $\tau = t - h^2$, e chiamiamo Ω_1 e Ω_2 questi campi. Avremo:

$$|u_x(x + h, t) - u_x(x, t)| \leqslant \Big|\iint_{\Omega_1} G_x(x + h, \xi;\, t - \tau) f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau\Big| +$$

$$+ \Big|\iint_{\Omega_1} G_x(x, \xi;\, t - \tau) f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau\Big| + \Big|h \iint_{\Omega_2} G_{xx}(x + \theta h, \xi;\, t - \tau) f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau\Big|$$

(dove θ è, come prima, compreso tra zero e 1 ed è indipendente da ξ e τ). Notando che G_x ha la solita parte singolare, il cui integrale si può maggiorare in valore assoluto mediante integrali del tipo $I_{1,3/2}$, si ottiene:

$$\Big|\iint_{\Omega_1} G_x(x+h,\xi;t-\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau\Big| + \Big|\iint_{\Omega_1} G_x(x,\xi;t-\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau\Big| \leqslant \|f\|S|h|,$$

dove S è una costante opportuna. Per quanto riguarda il terzo integrale, notiamo che la funzione G_{xx} tende a zero esponenzialmente per $\tau\to-\infty$ ed è regolare nel campo Ω_2: al tendere di h a zero ci sono però i soliti termini che divergono. L'integrale di questa parte singolare può essere maggiorato in valore assoluto con integrali del tipo $I_{0,3/2}$, $I_{2,5/2}$; questi divergono dell'ordine di $\log h^2$ e quindi di $\log|h|$. Potremo perciò scrivere:

$$|u_x(x+h,t)-u_x(x,t)| \leqslant \|f\|S'|h|\{|\log|h||+1\}.$$

Maggioriamo ora il valore assoluto dell'incremento di $u_x(x,t)$ rispetto a t, ossia $|u_x(x,t+k)-u_x(x,t)|$. Attribuito alla t un incremento positivo k, dividiamo il campo d'integrazione in tre parti nello stesso modo seguito prima per maggiorare l'incremento della $u(x,t)$ rispetto a t. Avremo:

$$|u_x(x,t+k)-u_x(x,t)| \leqslant \Big|\iint_{\Omega+\Omega'} G(x,\xi;t+k-\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau\Big| +$$
$$+\Big|\iint_{\Omega} G_x(x,\xi;t-\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau\Big| + \Big|k\iint_{\Omega''} G_{x,t}(x,\xi;t+\theta k-\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau\Big|,$$

dove θ è un numero indipendente da ξ e τ e compreso fra zero e 1. I primi due integrali sono analoghi ai primi due considerati sopra (a proposito dello incremento rispetto a x); potremo perciò scrivere:

$$\Big|\iint_{\Omega+\Omega'}\cdots\Big| + \Big|\iint_{\Omega}\cdots\Big| \leqslant \|f\|Tk^{1/2},$$

con T costante positiva opportuna. La $G_{x,t}$ avrà la solita parte singolare (per $x=\xi$ e $\tau=t+\theta k$): gli integrali maggioranti saranno del tipo $I_{1,5/2}$, $I_{3,7/2}$. Essendo per entrambi $\gamma=-1$, essi divergeranno, per $k\to 0$, come $k^{-1/2}$. Potremo perciò scrivere:

$$|u_x(x,t+k)-u_x(x,t)| \leqslant \|f\|Tk^{1/2}+\|f\|T'k^{1/2},$$

essendo T' una opportuna costante positiva. Prendendo convenientemente una nuova costante positiva K_2, potremo concludere:

$$|u_x(x+h,\, t+k) - u_x(x,t)| \leqslant \|f\| K_2\{|h|(|\log|h||+1) + |k^{1/2}|\}.$$

III. – Consideriamo la funzione $y_\alpha = x^\alpha$ definita per $x \geqslant 0$, dove α è un numero compreso fra zero e uno. Avremo:

$$y'_\alpha = \alpha x^{\alpha-1},$$

$$y''_\alpha = -\alpha(1-\alpha)x^{\alpha-2} = -\alpha(1-\alpha)(y'_\alpha \alpha^{-1})^{(2-\alpha)/(1-\alpha)} = -(1-\alpha)\alpha^{-1/(1-\alpha)}(y')^{(2-\alpha)/(1-\alpha)}.$$

La $y_\alpha(x)$ soddisferà all'equazione differenziale ordinaria $y''_\alpha = -\sigma(\alpha)|y'_\alpha|^{\gamma(\alpha)}$ e perciò anche alla (28), qualora la consideriamo funzione della x e della t.

Dimostreremo ora che, *almeno per l abbastanza piccolo, $y_\alpha = x^\alpha$ è l'unica funzione periodica continua per $0 \leqslant x \leqslant l$, $-\infty < t < +\infty$ che soddisfi alla (28) nei punti interni e assuma sulle rette $x = 0$ e $x = l$ i valori zero ed l^α rispettivamente.*

Cominciamo col considerare la funzione $w(\alpha, \zeta)$ così definita:

$$w(\alpha, \zeta) = \sigma(\alpha)\zeta^{\gamma(\alpha)}, \qquad (\zeta > 0).$$

Con il simbolo $w_\alpha(\alpha, \zeta)$ indicheremo la derivata parziale rispetto al primo argomento, e cioè la funzione

$$w_\alpha(\alpha, \zeta) = \zeta^{\gamma(\alpha)}\{\sigma'(\alpha) + \sigma(\alpha)\gamma'(\alpha)\log\zeta\}.$$

Si riconoscerà facilmente che $\sigma(\alpha)$ e $\gamma'(\alpha)$ sono positive, $\sigma'(\alpha)$ è negativa. Fissato perciò α, si potrà in conseguenza determinare un numero $N_\alpha > 1$ tale che per $\zeta \geqslant N_\alpha$ si abbia $w_\alpha(\alpha, \zeta) \geqslant 1$.

Considerato ora il numero positivo (e certamente minore di 1)

$$l = \left(\frac{\alpha}{N_\alpha}\right)^{1/(1-\alpha)}$$

sarà $y'_\alpha(l) = N_\alpha$, mentre per $0 < x \leqslant l$ avremo $y'_\alpha(x) \geqslant N_\alpha$ e perciò

$$w_\alpha(\alpha, \alpha x^{\alpha-1}) = w_\alpha(\alpha, y'_\alpha(x)) \geqslant 1.$$

Si vede allora facilmente che è possibile trovare un numero ε, positivo e sufficientemente piccolo, tale che per ogni coppia di numeri ξ e η soddisfacenti alle limitazioni $\alpha - \varepsilon < \xi < \alpha + \varepsilon$, $\alpha - \varepsilon < \eta < \alpha + \varepsilon$, si abbia $w_\alpha(\xi, \eta l^{\eta-1}) > 0$. Allora, a maggior ragione, si avrà anche $w_\alpha(\xi, \eta x^{\eta-1}) >$ per ogni x con $0 \leqslant x \leqslant l$.

Premesso questo, consideriamo la funzione $y_\xi(x) = x^\xi$. Essa soddisferà all'equazione differenziale

$$y''_\xi = -\sigma(\xi)\,|y'_\xi|^{\gamma(\xi)}$$

che potremo scrivere:

$$y''_\xi = -\sigma(\alpha)\,|y'_\xi|^{\gamma(\alpha)} - \{\sigma(\xi)\,|y'_\xi|^{\gamma(\xi)} - \sigma(\alpha)|y'_\xi|^{\gamma(\alpha)}\}.$$

Applicando la formula del valor medio, avremo

$$\sigma(\xi)|y'_\xi|^{\gamma(\xi)} - \sigma(\alpha)|y'_\xi|^{\gamma(\alpha)} = (\xi-\alpha)w_\alpha(\bar{\xi}, |y'_\xi|) = (\xi-\alpha)w_\alpha(\bar{\xi}, \xi x^{\xi-1}),$$

dove $\bar{\xi}$ è compreso tra α e ξ. Si deduce che il termine entro le graffe ha il segno di $\xi-\alpha$. Perciò la funzione $y_\xi(x)$, per $0 < x \leqslant l$, soddisferà alla disequazione

$$\begin{aligned} y''_\xi(x) &< -\sigma(\alpha)\,|y'_\xi(x)|^{\gamma(\alpha)} && \text{se è} \quad \alpha+\varepsilon \geqslant \xi > \alpha, \\ y''_\xi(x) &> -\sigma(\alpha)\,|y'_\xi(x)|^{\gamma(\alpha)} && \text{se è} \quad \alpha-\varepsilon \leqslant \xi < \alpha. \end{aligned}$$

Sia ora $u(x, t)$ una soluzione periodica della (28) soddisfacente alle condizioni imposte sopra. Poniamo:

$$z(x, t) = u(x, t) - y_\xi(x) + (l^\xi - l^\alpha) \quad \text{con} \quad \alpha-\varepsilon \leqslant \xi < \alpha.$$

Seguendo un tipo di ragionamento già usato varie volte, possiamo dimostrare che $z(x, t)$ non può avere un minimo negativo. Infatti, sia $(\bar{x}, \bar{t})$ il punto in cui $z(x, t)$ raggiunge questo minimo. In questo punto, che non può essere sul contorno perchè qui la $z(x, t)$ è positiva o nulla, si avrà:

$$z_t = u_t = 0, \quad z_x = u_x - y'_\xi = 0, \quad z_{xx} = u_{xx} - y''_\xi \geqslant 0.$$

Per la prima di queste relazioni e per la (28), nel punto $(\bar{x}, \bar{t})$ è

$$u_{xx} = -\sigma(\alpha)\,|u_x|^{\gamma(\alpha)};$$

inoltre, essendo $\alpha-\varepsilon \leqslant \xi < \alpha$, si ha

$$y''_\xi(\bar{x}) > -\sigma(\alpha)\,|y'_\xi(\bar{x})|^{\gamma(\alpha)}.$$

Sottraendo membro a membro queste due relazioni, si ottiene

$$u_{xx}(\bar{x}, \bar{t}) - y''_{\xi}(\bar{x}) < 0 .$$

Ma questa è in contraddizione con l'ultima delle relazioni trovate sopra. Si deduce che deve essere

$$u(x, t) \geqslant x^{\xi} - (l^{\xi} - l^{\alpha}) \qquad \text{per ogni } \alpha - \varepsilon \leqslant \xi < \alpha .$$

Analogamente si dimostra che è

$$u(x, t) \leqslant x^{\xi} - (l^{\xi} - l^{\alpha}) \qquad \text{per ogni } \alpha + \varepsilon \geqslant \xi > \alpha .$$

Si conclude che deve essere

$$u(x, t) = x^{\alpha} .$$

Dimostriamo ora che la (28) non può avere alcuna soluzione periodica $u(x, t)$, continua sui bordi, che soddisfi alle condizioni

$$u(0, t) = 0 , \qquad u(l, t) = r \quad \text{con} \quad r > l^{\alpha}.$$

Infatti, posto $g = r - l^{\xi}$, dove è $\alpha > \xi \geqslant \alpha - \varepsilon$ consideriamo la funzione

$$Y_{\xi,h}(x) = (x - h)^{\xi} + g \qquad \text{in cui è } \; 0 \leqslant h \leqslant x \leqslant l.$$

La $Y_{\xi,h}$ soddisfa ancora all'equazione

$$Y''_{\xi,h}(x) = - \sigma(\xi) \, | \, Y'_{\xi,h}(x) \, |^{\gamma(\xi)}$$

e alla disequazione

$$Y''_{\xi,h}(x) > - \sigma(\alpha) \, | \, Y'_{\xi,h}(x) \, |^{\gamma(\alpha)} .$$

Consideriamo i valori di h per cui si ha

$$Y_{\xi,h}(x) \geqslant u(x, t)$$

per qualche punto (x, t) (essendo sempre $h \leqslant x \leqslant l$). Sia $\bar{h}$ l'estremo superiore di questi valori. Sarà certamente $\bar{h} > 0$, perchè per $h = 0$ si ha (almeno per valori sufficientemente piccoli di ε):

$$Y_{\xi,0}(0) = g > 0 = u(0, t)$$

e la diseguaglianza

$$Y_{\xi,h}(h) = g > u(h, t)$$

continua a valere quando h rimane in un intorno destro dello zero. D'altra parte sarà $\bar{h} < l$. Infatti si ha

$$Y_{\xi,l}(l) = g = r - l^{\xi} < r = u(l, t)$$

e, anche per h variabile in un intorno sinistro di l, per ogni x compreso nell'intervallo $h \leqslant x \leqslant l$ vale la diseguaglianza

$$Y_{\xi,h}(x) < u(x, t)\,.$$

Possiamo dimostrare ora che, prendendo $h = \bar{h}$, per ogni punto (x, t) della striscia $\bar{h} \leqslant x \leqslant l$ si ha

$$Y_{\xi,\bar{h}}(x) \leqslant u(x, t)\,,$$

mentre deve esistere un punto $(\bar{x}, \bar{t})$, almeno, per cui è

$$Y_{\xi,\bar{h}}(\bar{x}) = u(\bar{x}, \bar{t})\,.$$

Invero, se per qualche punto fosse $Y_{\xi,\bar{h}}(x) > u(x, t)$, si potrebbe aumentare h in modo da ottenere ancora punti per cui valesse la stessa relazione, e allora $\bar{h}$ non sarebbe più l'estremo superiore. Viceversa, se per ogni punto valesse la relazione

$$Y_{\xi,\bar{h}}(x) < u(x, t)\,,$$

per la continuità uniforme delle due funzioni la relazione sussisterebbe ancora per h variabile in un intorno sinistro di $\bar{h}$.

Il punto $(\bar{x}, \bar{t})$ non può cadere nè sulla retta $x = l$, nè sulla retta $x = \bar{h}$. Infatti, per $\bar{x} = l$ si ha

$$Y_{\xi,\bar{h}}(l) = (l - \bar{h})^{\xi} + g = (l - \bar{h})^{\xi} + r - l^{\xi} < r = u(l, t)\,.$$

Per $\bar{x} = \bar{h}$, poi, la funzione $Y_{\xi,\bar{h}}$ ha derivata destra infinita (e di segno positivo), mentre la derivata parziale $u_x(x, t)$ è supposta sempre finita all'interno della striscia $0 \leqslant x \leqslant l$. In un intorno destro di $\bar{x}$ (per $t = \bar{t}$) si avrebbe allora

$$Y_{\xi,\bar{h}}(x) > u(x, \bar{t})$$

e questo non può essere.

Per analoghe ragioni nel punto $(\bar{x}, \bar{t})$ deve essere

$$u_t(\bar{x}, \bar{t}) = 0 , \qquad u_x(\bar{x}, \bar{t}) = Y'_{\xi,\bar{h}}(\bar{x}) , \qquad u_{xx}(\bar{x}, \bar{t}) - Y''_{\xi,\bar{h}}(\bar{x}) \geqslant 0 .$$

Ricordando allora che la $u(x, t)$ soddisfa alla (28), mentre la $Y_{\xi,\bar{h}}(x)$ soddisfa alla disequazione che abbiamo trovato prima, e tenendo presenti le relazioni valide nel punto $(\bar{x}, \bar{t})$ per le derivate prime, si ottiene

$$u_{xx}(\bar{x}, \bar{t}) - Y''_{\xi,\bar{h}}(\bar{x}) < 0 .$$

Questa diseguaglianza è contraddditoria con l'ultima delle relazioni scritte sopra; ci siamo perciò ridotti all'assurdo procedendo per la solita via. Possiamo concludere che la (28) non può avere soluzioni periodiche soddisfacenti alle condizioni al contorno imposte.