DARIO GRAFFI (*)

Sulle oscillazioni forzate nella Meccanica non-lineare. (**)

1. – L'equazione differenziale per le oscillazioni forzate nel caso lineare ordinario ha, come è notissimo, la forma

$$\ddot{x} + 2p\dot{x} + \omega_0^2 x = C \cos (\omega t + \gamma), \tag{1}$$

dove x è una funzione del tempo t, e p, C, ω, ω_0 sono costanti positive. È ben noto che l'unica soluzione periodica con periodo $T = 2\pi/\omega$ della (1), soluzione che rappresenta appunto le oscillazioni forzate della Meccanica ordinaria, è data da:

$$x = A \cos (\omega t + \alpha) , \tag{2}$$

dove:

$$A = \frac{C}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4p^2\omega^2}}, \qquad \mathrm{tag}\,(\alpha - \gamma) = \frac{2p\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}, \qquad \pi < \alpha - \gamma < 2\pi . \tag{2'}$$

Da queste equazioni si ricavano subito le disuguaglianze:

$$A < \frac{C}{|\omega^2 - \omega_0^2|}, \qquad \frac{1}{T}\int_0^T x^2\, dt < \frac{C^2}{2(\omega^2 - \omega_0^2)^2}, \qquad \frac{1}{T}\int_0^T \dot{x}^2\, dt < \frac{\omega^2 C^2}{2(\omega^2 - \omega_0^2)^2} . \tag{3}$$

È naturale chiederci se le stesse disuguaglianze valgono anche in Meccanica non-lineare o, con maggiore precisione, per le oscillazioni forzate rette da una equazione di LIÉNARD con secondo membro uguale a una funzione sinusoidale del tempo; cioè per le soluzioni periodiche di periodo $T = 2\pi/\omega$ dell'equazione

---

(*) Professore o. della Università di Bologna. Indirizzo: Viale Gozzadini 7, Bologna (Italia).

(**) Ricevuto il 2-XI-1952.

differenziale, che generalizza la (1),

$$\ddot{x} + \varphi(x)\dot{x} + \omega_0^2 x = C \cos(\omega t + \gamma), \tag{4}$$

dove $\varphi(x)$ è una funzione di x che, nei casi più interessanti e a cui spesso ci riferiremo, è negativa per piccoli valori di $|x|$, positiva per grandi valori della stessa variabile. È noto infatti che, sotto ipotesi molto larghe ([1]), la (4) ammette soluzioni periodiche di periodo T.

Orbene, riprendendo considerazioni esposte dieci anni fa ([2]), dimostreremo anzitutto che le due ultime disuguaglianze (3) valgono anche per le soluzioni periodiche di (4) con periodo T (soluzioni a cui d'ora innanzi riserveremo il simbolo $x(t)$ o, per maggiore brevità, il simbolo x), purchè sia $\omega > \omega_0$. Potremo così anche determinare, sempre supponendo $\omega > \omega_0$, un valore maggiorante per le $|x(t)|$ e, come conseguenza, provare la loro instabilità per piccoli valori di C.

Daremo poi alcune limitazioni per l'ampiezza degli armonici di ordine superiore al primo nello sviluppo in serie di FOURIER di $x(t)$, limitazioni utili specie nel caso di piccola non-linearità, cioè quando il valore massimo ε di $|\varphi(x)|$ (che supporremo limitata) è piccolo rispetto a $\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}$. Da questo risultato potremo precisare quale errore si commette assumendo per le $x(t)$ il valore approssimato $\{-C/(\omega^2 - \omega_0^2)\} \cos(\omega t + \gamma)$ e, in particolare, troveremo che, a meno di termini dell'ordine di $\varepsilon^2/(\omega^2 - \omega_0^2)$, l'ampiezza del primo termine dello sviluppo in serie di FOURIER di $x(t)$ vale $C/(\omega^2 - \omega_0^2)$.

Infine accenneremo al caso della cosiddetta demoltiplicazione di frequenza, cioè studieremo le eventuali soluzioni di pulsazione ω (o di periodo $T = 2\pi/\omega$) dell'equazione (4) in cui il secondo membro valga $C \cos(q\omega t + \gamma)$, con q intero e maggiore di uno. Supponendo sempre $\omega > \omega_0$, troveremo anche per queste soluzioni valide le due ultime di (3) oppure le relazioni:

$$\frac{1}{T}\int_0^T x^2\, dt < \frac{C^2}{2q(\omega^2 - \omega_0^2)}, \qquad \frac{1}{T}\int_0^T \dot{x}^2\, dt < \frac{C^2\omega^2}{2q(\omega^2 - \omega_0^2)},$$

da cui potremo, come nel caso precedente, dedurre eventuali valori maggioranti per il valore assoluto di $x(t)$, la instabilità di queste soluzioni per C pic-

---

(1) S. LEFSCHETZ, *Existence of periodic solutions for certain differential equations*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **29**, 29-32 (1943). N. LEVINSON, *Existence of periodic solutions for second order differential equations with a forcing term*, J. Math. Physics **22**, 41-48 (1943).

(2) D. GRAFFI, *Sopra alcune equazioni differenziali della radiotecnica*, Mem. Accad. Sci. Bologna (9) **9**, 83-92 (1941-42).

colo e infine altre limitazioni per l'ampiezza degli armonici (di ordine diverso da q) nello sviluppo in serie di FOURIER della $x(t)$.

Prima di chiudere questa introduzione osserviamo che, come si è già detto varie volte, i nostri risultati valgono supponendo $\omega > \omega_0$, cioè supponendo la frequenza delle oscillazioni forzate superiore alla frequenza delle oscillazioni libere rette da (4), con $\varphi(x)$ (oltre naturalmente a C) identicamente nulla. Questa ipotesi appare essenziale per le seguenti ragioni. Se le due ultime di (3) fossero valide per ogni ω si avrebbe, per $C = 0$ e per ogni $\omega \neq \omega_0$, la x identicamente nulla; cioè per qualunque $\varphi(x)$ non esisterebbero soluzioni periodiche di (4) con C uguale a zero e con $\omega \neq \omega_0$, in contraddizione con notissimi risultati [3]. Forse le due ultime di (3) sono valide, per ogni ω, se la (4) con secondo membro nullo non ha soluzioni periodiche; per esempio se $\varphi(x)$ è sempre positiva. Però di questa supposizione non ho ottenuto finora alcuna soddisfacente dimostrazione.

2. – Supposta dunque nella (4) la x periodica di periodo T, moltiplichiamo questa equazione per la stessa x e integriamo da zero a T. Tenendo presente che:

$$\int_0^T x\ddot{x}\,dt = -\int_0^T \dot{x}^2\,dt\,, \qquad \int_0^T \varphi(x)x\dot{x}\,dt = 0\,, \tag{5}$$

si ha:

$$\int_0^T \dot{x}^2\,dt - \omega_0^2 \int_0^T x^2\,dt = -\int_0^T C\cos(\omega t + \gamma)x\,dt\,. \tag{6}$$

Ora, poichè integrando (4) da zero a T si ha che il valor medio di x su un periodo è nullo, potremo scrivere, sviluppando x e $\dot{x}$ in serie di FOURIER,

$$x = \sum_1^\infty {}_n A_n \cos(n\omega t + \alpha_n)\,, \qquad \dot{x} = -\sum_1^\infty {}_n n\omega A_n \,\mathrm{sen}\,(n\omega t + \alpha_n)\,, \tag{7}$$

dove $A_n (\geqslant 0)$ e α_n sono costanti. Ora è noto che è:

$$\int_0^T x^2\,dt = \frac{T}{2}\sum_1^\infty {}_n A_n^2\,, \qquad \int_0^T \dot{x}^2\,dt = \frac{T}{2}\sum_1^\infty {}_n n^2\omega^2 A_n^2\,, \tag{8}$$

---

[3] Vedi, per es., G. SANSONE, *Sopra l'equazione di A. Liénard per le oscillazioni di rilassamento*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **28**, 153-181 (1949).

e perciò:

$$\int_0^T \dot{x}^2\,\mathrm{d}t - \int_0^T \omega_0^2\, x^2\,\mathrm{d}t = \frac{T}{2}\sum_1^\infty{}_n (n^2\omega^2 - \omega_0^2)A_n^2 \geqslant \frac{T}{2}\sum_1^\infty{}_n (\omega^2 - \omega_0^2)A_n^2 = (\omega^2 - \omega_0^2)\int_0^T x^2\,\mathrm{d}t, \tag{9}$$

$$\int_0^T \dot{x}^2\,\mathrm{d}t - \int_0^T \omega_0^2\, x^2\,\mathrm{d}t = \frac{T}{2}\sum_1^\infty{}_n (n^2\omega^2 - \omega_0^2)\,A_n^2 \geqslant \frac{T}{2}(\omega^2 - \omega_0^2)\sum_1^\infty{}_n n^2 A_n^2 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2}\int_0^T \dot{x}^2\,\mathrm{d}t\,. \tag{10}$$

Allora, sostituendo la (9) nella (6) e tenendo presente che $\omega^2 - \omega_0^2 > 0$, si ha, applicando la inequazione di SCHWARZ,

$$\int_0^T x^2\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{C}{\omega^2 - \omega_0^2}\left|\int_0^T x \cos(\omega t + \gamma)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{C}{\omega^2 - \omega_0^2}\sqrt{\frac{T}{2}}\sqrt{\int_0^T x^2\,\mathrm{d}t}\,,$$

da cui:

$$\int_0^T x^2\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{C^2 T}{2(\omega^2 - \omega_0^2)^2}\,, \tag{11}$$

risultato già ottenuto, per via diversa, nella mia Nota citata e che dimostra la validità della seconda di (3), nel nostro caso.

Sostituendo invece la (10) nella (6) e tenendo presente la (11) si ha:

$$\int_0^T \dot{x}^2\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}\, C\sqrt{\frac{T}{2}}\sqrt{\int_0^T x^2\,\mathrm{d}t} \leqslant \frac{\omega^2 C^2 T}{2(\omega^2 - \omega_0^2)^2}\,, \tag{12}$$

relazione che estende l'ultima di (3).

È da notare che da (8) e (9) (valide per $\omega > \omega_0$) si ricava che, se C tende allo zero, lo stesso accade per x. Perciò le oscillazioni proprie di un sistema non lineare retto dalla (4) con secondo membro uguale a zero hanno solo pulsazioni ω inferiori a ω_0, cioè un periodo $T' > 2\pi/\omega_0$. Si ritrova così un noto teorema.

Per la seconda delle (8) e per la (12) si ha poi che l'ampiezza di ogni armonico A_n dello sviluppo in serie di FOURIER di x è tale che

$$A_n \leqslant \frac{C}{n(\omega^2 - \omega_0^2)}\,, \tag{13}$$

relazione che generalizza la prima di (3).

3. – Poichè il valor medio di $x(t)$ in un periodo è nullo, questa funzione si annullerà in almeno due punti dell'intervallo chiuso $(0, T)$. Per fissare le idee, uno di questi punti si abbia per $t = 0$, l'altro per $t = h$; sarà intanto $h < T$. Sia $\bar{t}$ un istante in cui $|x(t)|$ raggiunge il suo valore massimo M, e supponiamo, sempre per fissare le idee, sia $0 < \bar{t} < h$ (allo stesso risultato si giungerebbe se $\bar{t}$ fosse compreso fra h e T). Ora, applicando ancora l'inequazione di SCHWARZ si ha:

$$M = |x(\bar{t})| = \left|\int_0^{\bar{t}} \dot{x}\, dt\right| \leqslant \int_0^{\bar{t}} |\dot{x}|\, dt \leqslant \sqrt{\bar{t}} \sqrt{\int_0^{\bar{t}} \dot{x}^2\, dt} \leqslant \frac{\sqrt{\bar{t}}\, \omega C \sqrt{T}}{\sqrt{2}\, (\omega^2 - \omega_0^2)} .$$

In modo analogo si trova:

$$M = |x(\bar{t})| = \left| -\int_{\bar{t}}^{h} \dot{x}\, dt \right| \leqslant \sqrt{h - \bar{t}}\, \frac{\omega C \sqrt{T}}{\sqrt{2}(\omega^2 - \omega_0^2)} .$$

Ora, poichè $\bar{t}$ oppure $h - \bar{t}$ è inferiore a $h/2$ cioè a $T/2$, si ha:

$$M < \frac{\omega C T}{2(\omega^2 - \omega_0^2)} = \pi \frac{C}{\omega^2 - \omega_0^2} = M_0 . \tag{14}$$

Da questo valore maggiorante per la $x(t)$ è facile ottenere una condizione necessaria per la stabilità della $x(t)$ stessa. Infatti, se per $|x| < M_0$ fosse $\varphi(x) < 0$, le soluzioni periodiche di pulsazione ω sarebbero instabili.

Per provare ciò usiamo il solito metodo dell'equazione alle variazioni, cioè nella (4) poniamo in luogo di x la somma $x + y$, dove x è ancora la soluzione periodica di periodo T il cui massimo è inferiore a M_0 e y deve riguardarsi come infinitesimo. Si trova subito, trascurando infinitesimi di ordine superiore,

$$\ddot{y} + \varphi(x)\dot{y} + \left[\frac{d\varphi(x)}{dx}\, \dot{x} + \omega_0^2\right] y = 0 . \tag{15}$$

Questa è una equazione differenziale lineare a coefficienti periodici, e il coefficiente di y è, per le nostre ipotesi, sempre negativo. Le soluzioni di questa equazione sono instabili, com'è noto, perciò è instabile la $x(t)$ [4].

---

[4] Cfr. G. KRALL, *Meccanica tecnica delle vibrazioni*, N. Zanichelli, Bologna 1940; Cap. 2°.

È bene notare che la instabilità di $x(t)$ può dedursi molto facilmente nel caso (spesso verificato in pratica) in cui sia $\varphi(x) = -2\lambda$, $(\lambda > 0)$, per $|x| < N$ e sia N maggiore di M_0. A questo scopo dimostriamo che per ogni soluzione $x'(t)$ della (4), anche inizialmente poco diversa da $x(t)$, esistono infiniti valori t' del tempo, con estremo superiore l'infinito, per cui $x'(t') \geqslant N$. Infatti, se ciò non fosse dopo un certo istante t_0 sarebbe $x(t)$ inferiore a N e la (4) si ridurrebbe all'equazione lineare (1) con $-\lambda$ in luogo di p; $x(t)$ sarebbe data allora da (2) e (2') con $-\lambda$ in luogo di p e $x'(t)$ avrebbe la forma (supponiamo, per fissare le idee, $\omega_0^2 > \lambda^2$):

$$x'(t) = x(t) + De^{\lambda t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\, t + \beta\right),$$

con D e β costanti, e inoltre D positiva. Ma i massimi dell'ultimo termine di questa equazione tendono all'infinito al tendere all'infinito del tempo, mentre $|x(t)|$ rimane sempre inferiore a M_0, e $x'(t)$ in un certo istante, superiore a t_0, raggiungerebbe il valore N, al contrario della nostra ipotesi. Allora esistono infiniti valori t', con estremo superiore l'infinito, in cui $|x'(t') - x(t')| \geqslant N - M_0$. Ciò prova l'instabilità della $x(t)$.

4. – Passiamo ora a determinare altri valori maggioranti per gli armonici di ordine superiore di $x(t)$, valori che dipendono anche dalla $\varphi(x)$. Supposto $n > 1$, moltiplichiamo la (4) per $\cos(n\omega t + \alpha_n)$ ed integriamo da zero a T. Si ha:

$$(16)\qquad \int_0^T \ddot{x} \cos(n\omega t + \alpha_n)\, dt + \int_0^T \varphi(x)\dot{x} \cos(n\omega t + \alpha_n)\, dt + \int_0^T \omega_0^2 x \cos(n\omega t + \alpha_n) dt =$$

$$= C \int_0^T \cos(\omega t + \gamma) \cos(n\omega t + \alpha_n)\, dt = 0\,.$$

Con una semplice integrazione per parti al primo termine di questa equazione, si ricava:

$$(n^2\omega^2 - \omega_0^2) \int_0^T x \cos(n\omega t + \alpha_n)\, dt = \int_0^T \varphi(x)\dot{x} \cos(n\omega t + \alpha_n)\, dt\,,$$

ossia, ricordando lo sviluppo (7) ed indicando — come si è già detto — con ε il valore massimo di $|\varphi(x)|$, si trova:

$$\frac{T}{2}(n^2\omega^2 - \omega_0^2)A_n \leqslant \varepsilon \sqrt{\int_0^T \dot{x}^2\, dt \cdot \int_0^T \cos^2(n\omega t + \gamma_n)\, dt} \leqslant \frac{\varepsilon\omega C T}{2(\omega^2 - \omega_0^2)}\,.$$

Quindi si ha una nuova limitazione per l'ampiezza di un armonico, di ordine superiore, dello sviluppo in serie di $x(t)$, limitazione molto conveniente quando, come supporremo d'ora innanzi, $\varepsilon/\sqrt{\omega^2-\omega_0^2}$ è piccola; si ha precisamente:

$$A_n \leqslant \frac{\varepsilon\omega C}{(\omega^2-\omega_0^2)(n^2\omega^2-\omega_0^2)}\,. \tag{17}$$

Da questo risultato cerchiamo di risalire ad una espressione approssimata per la $x(t)$ (nel senso precisato nel primo paragrafo). Dividendo la (6) per $T/2$ e ricordando le (7), si ha, dopo aver posto $\gamma-\alpha_1=\delta$,

$$(\omega^2-\omega_0^2)A_1^2+\sum_{2}^{\infty}{}_n(n^2\omega^2-\omega_0^2)A_n^2=-CA_1\cos\delta\,. \tag{18}$$

Posto poi, per comodità,

$$B^2=\sum_{2}^{\infty}{}_n(n^2\omega^2-\omega_0^2)A_n^2\,,$$

abbiamo:

$$B^2\leqslant\frac{\varepsilon^2C^2}{(\omega^2-\omega_0^2)^2}\sum_{2}^{\infty}{}_n\frac{\omega^2}{n^2\omega^2-\omega_0^2}=\frac{\varepsilon^2C^2}{(\omega^2-\omega_0^2)^2}\sum_{2}^{\infty}{}_n\frac{1}{n^2-\omega_0^2/\omega^2}\,. \tag{19}$$

Inoltre, per il teorema dell'energia, cioè moltiplicando la (4) per $\dot{x}$ e integrando da zero a T, otteniamo:

$$\int_0^T\varphi(x)\dot{x}^2\,\mathrm{d}t=-\omega\int_0^T CA_1\cos(\omega t+\gamma)\,\mathrm{sen}\,(\omega t+\gamma+\delta)\,\mathrm{d}t=-CA_1\frac{\omega T}{2}\,\mathrm{sen}\,\delta. \tag{20}$$

Di più, detto H il modulo del primo membro di (20) diviso per π, è:

$$H=\left|\frac{1}{\pi}\int_0^T\varphi(x)\dot{x}^2\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^T\dot{x}^2\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{\varepsilon}{\pi}\,\frac{\omega^2C^2}{(\omega^2-\omega_0^2)^2}\,\frac{T}{2}=\frac{\varepsilon\omega C^2}{(\omega^2-\omega_0^2)^2}\,. \tag{21}$$

Ciò posto, osserviamo che si può scrivere:

$$x(t)=A_1\cos(\omega t+\gamma+\delta)+\sum_{2}^{\infty}{}_nA_n\cos(n\omega t+\alpha_n)=$$

$$=A_1\cos\delta\cdot\cos(\omega t+\gamma)+A_1\,\mathrm{sen}\,\delta\cdot\mathrm{sen}\,(\omega t+\gamma)+\sum_{2}^{\infty}{}_nA_n\cos(n\omega t+\alpha_n)=$$

$$=x_0(t)+x_1(t),$$

con

$$x_1(t) = A_1 \operatorname{sen} \delta \cdot \operatorname{sen} (\omega t + \gamma) + \sum_2^\infty {}_n A_n \cos (n\omega t + \alpha_n) .$$

Ora da (20), ricordando (21), si ha:

$$|A_1 \operatorname{sen} \delta| = \frac{H}{C} \leqslant \frac{\varepsilon\omega C}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2},$$

sicchè, tenendo presente (17), risulta:

$$|x_1(t)| \leqslant \frac{\varepsilon\omega C}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} + \sum_2^\infty {}_n \frac{\varepsilon\omega C}{(\omega^2 - \omega_0^2)(n^2\omega^2 - \omega_0^2)} =$$

$$= \frac{\varepsilon\omega C}{\omega^2 - \omega_0^2} \sum_1^\infty {}_n \frac{1}{n^2\omega^2 - \omega_0^2} = \frac{\varepsilon C}{\omega(\omega^2 - \omega_0^2)} \sum_1^\infty {}_n \frac{1}{n^2 - \omega_0^2/\omega^2},$$

ossia, per cose note ([5]),

$$|x_1(t)| < \frac{\varepsilon}{2\omega} \frac{C}{\omega^2 - \omega_0^2} \left[\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - \pi \frac{\omega}{\omega_0} \cot \pi \frac{\omega_0}{\omega}\right]. \tag{22}$$

Determiniamo ora A_1 e $A_1 \cos \delta$. Elevando al quadrato (18) e (20) e poi sommando, abbiamo:

$$(\omega^2 - \omega_0^2)^2 A_1^4 + 2(\omega^2 - \omega_0^2) A_1^2 B^2 + B^4 + H^2 = C^2 A_1^2 .$$

Allora, risolvendo questa equazione rispetto ad A_1^2, e ponendo il segno positivo dinanzi al radicale [perchè solo in questo modo A_1 tende, per $\varepsilon \to 0$, conforme a (17), (18) e (20), al corrispondente valore $C/(\omega^2 - \omega_0^2)$, ampiezza della soluzione periodica di (4) quando $\varepsilon = 0$], si ha:

$$A_1^2 = \frac{C^2 - 2B^2(\omega^2 - \omega_0^2)}{2(\omega^2 - \omega_0^2)^2} + \sqrt{\frac{[C^2 - 2B^2(\omega^2 - \omega_0^2)]^2}{4(\omega^2 - \omega_0^2)^4} - \frac{B^4 + H^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}} =$$

$$= \frac{C^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \left[\frac{1}{2} - \frac{B^2(\omega^2 - \omega_0^2)}{C^2}\right] + \sqrt{\frac{1}{4}\left[1 - \frac{2B^2(\omega^2 - \omega_0^2)}{C^2}\right]^2 - \frac{B^4 + H^2}{C^4} (\omega^2 - \omega_0^2)^2} .$$

Ora, tenendo presente la (19) e la (21), segue che i termini $B^2(\omega^2 - \omega_0^2)/C^2$,

([5]) S. PINCHERLE, *Gli elementi della teoria delle funzioni analitiche*, N. Zanichelli, Bologna 1922; cfr. p. 143.

$H^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2/C^4$ sono dell'ordine di $\varepsilon^2/(\omega^2 - \omega_0^2)$ e perciò, per le nostre ipotesi, potremo ritenerli trascurabili, e del resto nei casi concreti sarebbe facile la verifica se ciò è possibile. Avremo così:

$$A_1 = \frac{C}{\omega^2 - \omega_0^2}. \tag{23}$$

Sostituendo allora nella (18) divisa per C otteniamo, sempre trascurando termini dell'ordine di $\varepsilon^2/(\omega^2 - \omega_0^2)$,

$$A_1 \cos \delta = -\frac{C}{\omega^2 - \omega_0^2}. \tag{24}$$

Pertanto, se dalla (19) si può dedurre $x_1(t)$ sufficientemente piccola così da poterla trascurare, si ha la seguente soluzione approssimata della (4):

$$x(t) = \sim -\frac{C}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos(\omega t + \gamma).$$

In sostanza, abbiamo indicato un metodo per verificare quando una soluzione di periodo $T = 2\pi/\omega$ della (4) si può sostituire colla soluzione dello stesso periodo dell'equazione lineare ottenuta da (4) supponendo ε identicamente nulla.

5. – Accenniamo alle oscillazioni in sottoarmonico, cioè alle eventuali soluzioni $x(t)$ di periodo $T = 2\pi/\omega$ dell'equazione

$$\ddot{x} + \varphi(x)\dot{x} + \omega_0^2 x = C \cos(q\omega t + \gamma). \tag{25}$$

Applicando alla (25) lo stesso metodo del secondo paragrafo, si giunge ad una equazione analoga a (6), cioè:

$$\int_0^T \dot{x}^2 \, dt - \int_0^T \omega_0^2 x^2 \, dt = -\int_0^T C \cos(q\omega t + \gamma) \cdot x \, dt, \tag{26}$$

e proseguendo nelle considerazioni del secondo paragrafo si giunge alle (11), (12), (13) e, in particolare, alla relazione:

$$A_q \leqslant \frac{C}{q(\omega^2 - \omega_0^2)}.$$

Allora, sostituendo la (9) nella (26) e tenendo presente che il valore assoluto dell'ultimo integrale di (26) è inferiore a $CA_qT/2$, si ha:

$$\int_0^T x^2\,dt \leq \frac{T}{2q}\,\frac{C^2}{(\omega^2-\omega_0^2)^2}\,, \tag{27}$$

relazione che generalizza la (11). In modo analogo si ottiene una estensione della (12), cioè:

$$\int_0^T \dot{x}^2\,dt \leq \frac{T}{2q}\,\frac{C^2\omega^2}{(\omega^2-\omega_0^2)^2}\,. \tag{28}$$

Dalla (28), ragionando come nel terzo paragrafo, si ottiene un valore M_q maggiorante per $x(t)$, dato dalla formula

$$M_q = \frac{\pi}{\sqrt{q}}\,\frac{C}{\omega^2-\omega_0^2}\,. \tag{29}$$

Lo stesso procedimento del quarto paragrafo permette di stabilire per ogni A_n, con $n \neq q$, la seguente limitazione:

$$A_n < \frac{\varepsilon C\omega}{\sqrt{q}(\omega^2 n^2-\omega_0^2)(\omega^2-\omega_0^2)}\,. \tag{30}$$

Non ci occuperemo dell'estensione del metodo di integrazione approssimata, estensione che non si presenta del tutto immediata.

---

(6) È da notare che dalla (26), tenendo presente (10) e che il secondo membro di questa equazione è inferiore a $CA_qT/2$, si ha:

$$\sum_1^\infty{}_n\, n^2 A_n^2 \leq \frac{CA_q}{\omega^2-\omega_0^2}\,,$$

da cui

$$q^2A_q^2 \leq \frac{CA_q}{\omega^2-\omega_0^2}\,,$$

ossia

$$A_q \leq \frac{C}{q^2(\omega^2-\omega_0^2)}\,.$$

Con questa relazione si può migliorare (27) e (28) ponendo q^2 in luogo di q, e (29) e (30) ponendo q in luogo di $\sqrt{q}$.