

Le superficie eccezionali nella statica delle membrane. (**)

Introduzione.

In un recente gruppo di lavori ⁽¹⁾, ho determinato l'integrale generale del sistema indefinito:

$$p_{ik}^{ik} = 0, \quad (i, k = 1, 2),$$

ove p^{ik} denota il tensore simmetrico degli sforzi, limitatamente al caso bidimensionale, nel quale il sistema stesso caratterizza l'equilibrio delle membrane tese su generiche superficie, qualunque sia la loro natura (elastica, plastica, fluida, ecc.).

Nell'integrale generale di tale sistema, che esprime la solenoidalità del tensore degli sforzi, gli sforzi stessi sono determinati mediante una funzione arbitraria $\chi(x, y)$ e le sue derivate.

Limitatamente al caso bidimensionale si conoscevano nel passato:

1°) La soluzione relativa al caso piano-sviluppabili. In essa gli sforzi vengono espressi mediante le derivate « seconde » di una funzione arbitraria, la funzione di AIRY ⁽²⁾.

2°) La soluzione relativa al caso delle superficie a curvatura costante (sfera, pseudosfera e superficie su queste applicabili). In essa gli sforzi ven-

(*) Indirizzo: Istituto Matematico del Politecnico, Milano (Italia).

(**) Ricevuto il 2-II-1952.

⁽¹⁾ E. STORCHI: a) *Integrazione delle equazioni indefinite della statica dei sistemi continui su una superficie di rotazione*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (7) 6, 227-231 (1949);

b) *Sulle equazioni indefinite della statica delle membrane tese su generiche superficie*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) 2, 116-120 (1950);

c) *Integrazione delle equazioni indefinite della statica dei veli tesi su generiche superficie*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) 4, 326-331 (1950).

⁽²⁾ G. B. AIRY, British Rep., 1868.

gono espressi linearmente mediante una funzione arbitraria $\chi(x, y)$ e le sue derivate fino alle « seconde ».

Quest'ultimo risultato, stabilito da B. FINZI⁽³⁾ con metodo tensoriale, lasciava aperta la speranza che anche in casi più complessi di quello considerato si potessero esprimere gli sforzi legandoli linearmente ad una funzione arbitraria e alle sue derivate prime e seconde.

In uno dei citati lavori⁽⁴⁾ ho provato che tale speranza rimane infondata in quanto i risultati di FINZI e di AIRY sono invertibili « non potendosi esprimere gli sforzi linearmente mediante una funzione arbitraria e le sue derivate prime e « seconde » se non nel caso che la curvatura totale gaussiana della superficie sia nulla o costante ».

In un altro lavoro⁽⁵⁾ ho determinato l'integrale generale del sistema indefinito d'equilibrio nel caso in cui la membrana sia applicabile su una generica superficie di rotazione, esprimendo linearmente gli sforzi mediante una funzione arbitraria $\psi(x, y)$ e le sue derivate fino alle « terze ».

Ho risolto infine⁽⁶⁾ il problema dell'integrazione del sistema indefinito nel caso in cui la membrana sia applicabile su una superficie generica, esprimendo linearmente gli sforzi mediante una funzione arbitraria e le sue derivate, prime, seconde, terze, quarte e « quinte ».

Fra le superficie generali e quelle di rotazione si presentava dunque un « salto ». Nello stesso lavoro mostravo però che esistono superficie eccezionali per le quali gli sforzi sono esprimibili linearmente mediante una funzione arbitraria e le sue derivate fino alle « quarte ».

Data però l'importanza del problema risolto⁽⁷⁾ e tenuto conto anche del

⁽³⁾ B. FINZI, *Integrazione delle equazioni indefinite della meccanica dei sistemi continui*, Nota I, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) **19**, 578-584 (1934); idem, Nota II, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) **19**, 620-623 (1934).

⁽⁴⁾ Loc. cit. in (1), b).

⁽⁵⁾ Loc. cit. in (1), a).

⁽⁶⁾ Loc. cit. in (1), c).

⁽⁷⁾ Si rifletta che l'integrazione del sistema indefinito $p_{ik}^{ik} = 0$ su una generica superficie (dal punto di vista del calcolo tensoriale la determinazione del più generale tensore doppio a divergenza nulla) interessa, oltre la meccanica dei continui, anche altri campi disparati della Scienza come la Geometria differenziale [ved. E. STORCHI, *Integrazione delle equazioni di Codazzi in forma geodetica*, Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend. Cl. Sci. Mat. Nat. **84**, 181-184 (1951)] e il Campo elettromagnetico. È noto infatti (ved. B. FINZI e M. PASTORI, *Calcolo tensoriale e applicazioni*, N. Zanichelli, Bologna 1949, cfr. p. 359) che la divergenza $E_{\alpha\beta}{}^{\beta}$ del tensore energetico simmetrico $E_{\alpha\beta}$ eguaglia il vettore spazio-temporale K_{α} il quale riassume la potenza specifica di corrente e le forze ponderomotrici per unità di volume. L'integrazione del sistema $E_{\alpha\beta}{}^{\beta} = K_{\alpha}$ comporta quella preliminare di $E_{\alpha\beta}{}^{\beta} = 0$.

fatto che il problema stesso è legato a quello della ricerca delle condizioni di congruenza di una membrana, condizioni che [come ha dimostrato B. FINZI nel 1930 ⁽⁸⁾] sono differenziali del secondo ordine per le membrane sviluppabili o a curvatura costante, del terzo per membrane su superficie di rotazione e del « quarto » per membrane su superficie generiche, sono stato indotto a svolgere un'analisi più profonda onde riconoscere se l'esistenza delle superficie eccezionali è effettiva od illusoria. In altri termini si può pensare alla possibilità che le derivate quinte di una funzione arbitraria le quali bastano per esprimere gli sforzi nel caso generale, in realtà non occorran, nel senso che con le sole derivate quarte sia raggiungibile lo stesso scopo. Una tale possibilità a priori esiste in quanto si può pensare ad una più felice eliminazione dei tre termini integrali che figurano nell'espressione generale degli sforzi, che qui riportiamo:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} p^{xx} &= \frac{1}{e^\mu} \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial \mu}{\partial x} e^{2\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \left[\frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} e^{2\mu} - \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} e^{2\mu} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} \right] \varphi + \right. \\ &\quad \left. + \int \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(e^{2\mu} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} \right) - e^{2\mu} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} \frac{\partial h}{\partial x} \right] \varphi dx + \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} \varphi dx + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int \varphi \frac{\partial h}{\partial x} dx \right\}, \\ p^{xy} &= - \frac{1}{e^\mu} \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} \right) \varphi \right\}, \\ p^{yy} &= \frac{1}{e^\mu} \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left(2 \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(2 \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) \varphi \right\}, \end{aligned} \right.$$

eliminazione la quale implichi l'espressione degli integrali mediante una funzione arbitraria $\varphi(x, y)$ e le sue derivate prime e « seconde ». Nelle (1) $ds^2 = dx^2 + \lambda^2(x, y) dy^2$ esprime la metrica superficiale in forma geodetica, mentre:

$$\mu = \log \lambda, \quad h = \log \left(e^{2\mu} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} \right).$$

Attraverso ad una catena di teoremi e corollari riuscirò invece nel presente lavoro a rimuovere ogni dubbio, dimostrando:

1°) la circostanza che nel caso di superficie generiche non solo bastano ma « occorrono » le derivate quinte per esprimere gli sforzi;

⁽⁸⁾ B. FINZI, *Sopra il tensore di deformazione di un velo*, Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend. Cl. Sci. Mat. Nat. 63, 975-982 (1930).

2°) che esistono superficie eccezionali per le quali gli sforzi si esprimono mediante le derivate di ordine inferiore, in particolare mediante le « quarte ».

Il primo teorema.

Teorema I. *Se $\varphi(x, y)$ è una funzione arbitraria di x e di y ed $a(x, y)$, $c(x, y)$ sono funzioni assegnate di x e di y delle quali c non identicamente nulla, è possibile esprimere le tre funzioni:*

$$(2) \quad I_1 = c\varphi,$$

$$(3) \quad I_2 = \int \varphi dx,$$

$$(4) \quad I_3 = \int a\varphi dx$$

mediante c , a , $\frac{\partial a}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}$, ...; una nuova funzione arbitraria $\psi(x, y)$ e le sue derivate parziali prime e « seconde », ma non mediante c , a , $\frac{\partial a}{\partial x}$, ..., ψ e le sole sue derivate prime, a meno che $a = a(x, y)$ sia funzione soltanto di y (e in particolare identicamente nulla).

Dimostrazione. Si ponga:

$$I_2 = \int \varphi dx = \omega(x, y).$$

Con ciò si trae:

$$I_1 = c \frac{\partial \omega}{\partial x},$$

$$I_3 = \int a\varphi dx = \int a \frac{\partial \omega}{\partial x} dx = a\omega - \int \frac{\partial a}{\partial x} \omega dx.$$

Se a è funzione soltanto di y , risulta allora:

$$I_1 = c \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad I_2 = \omega, \quad I_3 = a\omega,$$

e le tre funzioni (2), (3), (4) si possono così esprimere in termini di c , a , della funzione arbitraria ω e delle sue derivate parziali prime. Se $\frac{\partial a}{\partial x}$ non è iden-

ticamente nulla, si ponga:

$$\int \frac{\partial a}{\partial x} \omega \, dx = \psi.$$

Segue di qui ⁽⁹⁾:

$$\omega = \frac{1}{a'} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

e quindi:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = c \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{a'} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = -\frac{c}{a'^2} a'' \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{c}{a'} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \\ I_2 = \frac{1}{a'} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ I_3 = \frac{a}{a'} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi. \end{array} \right.$$

Le tre funzioni (2), (3), (4) si possono così esprimere in termini di c , a , $\frac{\partial a}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}$, ..., della funzione arbitraria $\psi(x, y)$ e delle sue derivate parziali prime e « seconde ». La prima parte del teorema è così provata. Dimostriamo ora la seconda parte, che cioè non è possibile esprimere le funzioni (2), (3), (4) mediante c , a , $\frac{\partial a}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}$, ..., una funzione arbitraria ψ e le sole derivate parziali prime, a meno che a non sia funzione della sola y (e in particolare nulla).

Ragionando per assurdo e posto: $\frac{\partial \psi}{\partial x} = p$, $\frac{\partial \psi}{\partial y} = q$, supponiamo che sia contemporaneamente:

$$(5) \quad I_1 = F \left(\psi, p, q, c, a, \frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}, \dots \right),$$

$$(6) \quad I_2 = G \left(\psi, p, q, c, a, \frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}, \dots \right),$$

$$(7) \quad I_3 = H \left(\psi, p, q, c, a, \frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}, \dots \right).$$

Da (6) segue:

$$\varphi = \frac{1}{c} I_1 = \frac{\partial I_2}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial p} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial p} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial G}{\partial q} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial G}{\partial c} c' + \frac{\partial G}{\partial a} a' + \frac{\partial G}{\partial a'} a'' + \dots$$

⁽⁹⁾ Gli apici indicheranno sempre qui e in seguito derivazioni parziali rispetto ad x .

In queste condizioni la φ si esprimerebbe con le derivate seconde della ψ (assurdo). Deve dunque essere:

$$\frac{\partial G}{\partial p} = \frac{\partial G}{\partial q} \equiv 0$$

e quindi:

$$(8) \quad I_2 = G \left(\psi, c, a, \frac{\partial a}{\partial x}, \dots \right).$$

Analogamente, si ha:

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial H}{\partial q} \equiv 0$$

e

$$(9) \quad I_3 = H \left(\psi, c, a, \frac{\partial a}{\partial x}, \dots \right).$$

Dalle (3) e (8) si trae poi:

$$\frac{\partial I_2}{\partial x} = \varphi = \frac{\partial G}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial c} c' + \frac{\partial G}{\partial a} a' + \frac{\partial G}{\partial a'} a'' + \dots,$$

e così pure dalle (4) e (9):

$$\frac{\partial I_3}{\partial x} = a\varphi = \frac{\partial H}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial c} c' + \frac{\partial H}{\partial a} a' + \frac{\partial H}{\partial a'} a'' + \dots.$$

Ne viene allora:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial c} c' + \frac{\partial G}{\partial a} a' + \frac{\partial G}{\partial a'} a'' + \dots &= \frac{1}{a} \left[\frac{\partial H}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial c} c' + \frac{\partial H}{\partial a} a' + \frac{\partial H}{\partial a'} a'' + \dots \right], \\ \left(\frac{\partial G}{\partial \psi} - \frac{1}{a} \frac{\partial H}{\partial \psi} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left[\left(\frac{\partial G}{\partial c} - \frac{1}{a} \frac{\partial H}{\partial c} \right) c' + \left(\frac{\partial G}{\partial a} - \frac{1}{a} \frac{\partial H}{\partial a} \right) a' + \left(\frac{\partial G}{\partial a'} - \frac{1}{a} \frac{\partial H}{\partial a'} \right) a'' + \dots \right] &\equiv 0. \end{aligned}$$

Essendo $\psi = \psi(x, y)$ funzione « arbitraria » e contenendo G, H la sola ψ e non le derivate, affinchè quest'ultima sia verificata, occorre che risulti identicamente:

$$(10) \quad \frac{\partial G}{\partial \psi} - \frac{1}{a} \frac{\partial H}{\partial \psi} \equiv 0.$$

Dalla (10) segue:

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left[G \left(\psi, c, a, \frac{\partial a}{\partial x}, \dots \right) - \frac{1}{a} H \left(\psi, c, a, \frac{\partial a}{\partial x}, \dots \right) \right] \equiv 0$$

e quindi:

$$G - \frac{1}{a} H = \varrho \left(c, a, \frac{\partial a}{\partial x}, \dots \right),$$

che può scriversi:

$$(11) \quad \boxed{a \int \varphi dx - \int a \varphi dx = g \left(c, a, \frac{\partial a}{\partial x}, \dots \right)}$$

Se a è funzione della sola y , questa è verificata (con $g \equiv 0$) ed è possibile esprimere I_1, I_2, I_3 in termini di $\psi, \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, c, a, \frac{\partial a}{\partial x}, \dots$. Se a non è funzione della sola y , la (11) è assurda perchè da essa derivando ambo i membri si trae:

$$a' \int \varphi dx = \frac{dg}{dx}, \quad \varphi = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{a'} \frac{dg}{dx} \right) = \tau \left(a, a', a'', a''', \dots, c, c', \dots \right),$$

e questa implica che φ , anzichè funzione arbitraria di x e di y , sia una funzione di $c, a, \frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}, \dots$.

L'ipotesi che I_1, I_2, I_3 si possano esprimere mediante $\psi, \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, c, a, \frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}, \dots$ nel caso generale (cioè quando a dipende anche da x) è dunque assurda e il teorema è completamente dimostrato.

Osservazione. Si è provato che non è possibile esprimere I_1, I_2, I_3 in termini di $\psi, \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, c, a, a', \dots$ ma che è possibile esprimere le stesse funzioni introducendo anche le derivate seconde di ψ . Notiamo qui esplicitamente che nell'espressione di I_1 e quindi della φ devono forzatamente venire coinvolte le derivate seconde. Infatti nè I_2 nè I_3 possono contenere le derivate seconde di ψ perchè altrimenti: $\varphi = \frac{1}{c} I_1 = \frac{\partial I_2}{\partial x} = \frac{1}{a} \frac{\partial I_3}{\partial x}$ conterrebbe le derivate terze.

Corollario 1°. Se $\varphi(x, y)$ è una funzione arbitraria di x e di y e $g(x, y)$,

$h(x, y)$ sono funzioni assegnate di x e di y , delle quali g non identicamente nulla, è possibile esprimere le tre funzioni

$$I_1 = \varphi, \quad I_2 = \int g\varphi dx, \quad I_3 = \int h\varphi dx$$

mediante $g, h, \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \dots$, una nuova funzione arbitraria $\psi(x, y)$ e le sue derivate parziali prime e seconde, ma non mediante $g, h, \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial x}, \dots$, la ψ e le sole sue derivate parziali prime, a meno che il rapporto h/g sia funzione solo di y .

Infatti, posto: $g\varphi = \tau$, la tesi segue dal Teorema I nel quale si assume $c = 1/g, a = h/g$.

Corollario 2°. Se $\varphi(x, y)$ è una funzione arbitraria di x e di y e $g(x, y), h(x, y)$ sono funzioni assegnate di x e di y , delle quali g non identicamente nulla, allora:

a) è possibile esprimere le tre funzioni

$$L_1 = \varphi, \quad L_2 = \frac{\partial}{\partial y} \int g\varphi dx, \quad L_3 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int h\varphi dx$$

mediante $g, h, \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \dots$, una nuova funzione arbitraria $\psi(x, y)$ e le sue derivate parziali prime, seconde e «terze»;

b) non è possibile esprimere L_1 in termini di $g, h, \frac{\partial h}{\partial x}, \dots$, di una nuova funzione arbitraria ψ e delle sue derivate parziali prime, L_2, L_3 in termini di $g, h, \frac{\partial h}{\partial x}, \dots, \psi$ e delle sue derivate parziali prime, seconde e terze.

Infatti la possibilità di esprimere L_1, L_2, L_3 nel modo indicato in a) discende da quanto esposto nella dimostrazione della prima parte del Teorema I. Inoltre, supposto che $L_1 = \varphi$ contenga le derivate prime al più, $L_2 = \frac{\partial}{\partial y} \int g\varphi dx$ non può contenere che le derivate prime al più perchè se contenesse le derivate seconde, $I_2 = \int g\varphi dx$ conterrebbe le derivate prime e quindi $\varphi = \frac{1}{g} \frac{\partial I_2}{\partial x}$ le seconde. Infine $L_3 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int h\varphi dx$ non può contenere che le derivate seconde al più perchè se contenesse le terze, $I_3 = \int h\varphi dx$ conterrebbe le prime e quindi

$\varphi = \frac{1}{h} \frac{\partial I_3}{\partial x}$ le seconde. In definitiva dovrebbe aversi:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 = \varphi = F\left(\psi, p, q, g, h, \frac{\partial g}{\partial x}, \dots\right), \\ L_2 = \frac{\partial}{\partial y} \int g\varphi \, dx = G\left(\psi, p, q, g, h, \frac{\partial g}{\partial x}, \dots\right), \\ L_3 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int h\varphi \, dx = H\left(\psi, p, q, r, s, t, g, h, \frac{\partial g}{\partial x}, \dots\right), \end{array} \right.$$

e quindi:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = F\left(\psi, p, q, g, h, \frac{\partial g}{\partial x}, \dots\right), \\ I_2 = \bar{G}\left(\psi, g, h, \frac{\partial g}{\partial x}, \dots\right), \\ I_3 = \bar{H}\left(\psi, g, h, \frac{\partial g}{\partial x}, \dots\right). \end{array} \right.$$

L'impossibilità di esprimere L_1, L_2, L_3 nel modo indicato in b) segue allora dal Corollario 1°.

Osservazione. Si è provato che è possibile esprimere le funzioni L_1, L_2, L_3 mediante la ψ e le sue derivate fino alle terze. Notiamo esplicitamente che nell'espressione di L_1 cioè della φ devono forzatamente venire coinvolte le derivate « seconde ». Infatti se in $L_1 = I_1 = \varphi$ comparissero le sole derivate prime al più, in L_2 ed in I_3 comparirebbe la sola ψ e l'assurdo segue dal Corollario 1°.

Corollario 3°. A) Si può esprimere la funzione $L_1 = I_1 = \varphi$ mediante una funzione arbitraria ψ e le sue derivate parziali prime e seconde e la funzione:

$$\tau = L_2 + L_3 = \frac{\partial}{\partial y} \int g\varphi \, dx + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int h\varphi \, dx = \frac{\partial I_2}{\partial x} + \frac{\partial^2 I_3}{\partial y^2},$$

con la ψ e le sue derivate parziali prime, seconde e terze.

B) Non si può esprimere $L_1 = I_1 = \varphi$ con la ψ e le sue derivate parziali prime e la funzione τ con la ψ e le sue derivate fino alle terze a meno che sia h/g funzione della sola y .

La proposizione A) discende dalla proposizione a) del Corollario 2°.

Per dimostrare la B) osserviamo poi che se τ contenesse le derivate terze,

una almeno delle funzioni I_2, I_3 dovrebbe contenere le derivate prime. In tal caso, però, $\varphi = \frac{1}{g} \frac{\partial I_2}{\partial x} = \frac{1}{h} \frac{\partial I_3}{\partial x}$ conterrebbe le derivate seconde e non solo le prime. Se poi τ non contiene le derivate terze ma soltanto le seconde al più, I_2 ed I_3 contengono al più le prime. In definitiva I_1, I_2, I_3 contengono al più le prime. La proposizione B) discende allora dal Corollario 1°.

Il secondo teorema.

1. — Si considerino ora le quattro funzioni:

$$I_1 = a\varphi, \quad I_2 = \int \varphi dx, \quad I_3 = \int b\varphi dx, \quad I_4 = \int c\varphi dx,$$

ove a, b, c , denotano assegnate funzioni di x e di y , delle quali a non identicamente nulla e φ una funzione arbitraria di x e di y .

a) Se $b(x, y)$ è identicamente nulla, circa l'esprimibilità delle tre funzioni superstiti I_1, I_2, I_4 mediante $a, c, \frac{\partial c}{\partial x}, \dots$, una funzione arbitraria ψ e le sue derivate parziali del 1° e 2° ordine, abbiamo a disposizione il Teorema I coi relativi corollari; lo stesso può dirsi se $c(x, y)$ è identicamente nulla senza che lo sia $b(x, y)$.

b) Se $b(x, y)$ e $c(x, y)$ sono ambedue identicamente nulle, le funzioni superstiti $I_1 = a\varphi, I_2 = \int \varphi dx$ si possono esprimere in termini di a , della funzione arbitraria φ e delle sue derivate parziali prime, ma non in termini di a e della sola φ . Infatti, posto $I_2 = \int \varphi dx = \psi$, ne viene $\varphi = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ e quindi: $I_1 = a \frac{\partial \psi}{\partial x}, I_2 = \psi$, mentre dall'ipotesi che sia $I_1 = \varphi = F(\psi, a), I_2 = \int \varphi dx = G(\psi, a)$, segue l'assurdo:

$$\varphi = \frac{\partial G}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x}.$$

c) Se b dipende solo da y risulta $I_3 = b(y)I_2$ ed è ancora applicabile il Teorema I coi relativi corollari; lo stesso dicasi se c dipende solo da y , giacchè in tal caso si ha: $I_4 = c(y)I_2$.

d) Se il rapporto c/b è funzione solo di y , risulta: $c = b\rho(y), I_4 = \int b\rho(y)\varphi dx = \rho(y)I_3$ ed è ancora applicabile il Teorema I coi relativi corollari.

e) Se b dipende solo da y e c dipende pure solo da y , risulta $I_3 = b(y)I_2$, $I_4 = c(y)I_2$ e si ricade nel caso contemplato in b).

f) Se infine $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{c'}{b'} \right) = 0$, cioè $c = A(y) + bB(y)$, risulta:

$$I_4 = \int c\varphi dx = \int [A(y) + bB(y)]\varphi dx = A(y)I_2 + B(y)I_3,$$

ed è ancora applicabile il Teorema I coi relativi corollari. Chiameremo « casi degeneri » i casi elencati in a), b), c), d), e), f).

2. - Ciò premesso dimostriamo il seguente

Teorema II. *Se $\varphi(x, y)$ è una funzione arbitraria di x e di y ed $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ sono assegnate funzioni di x e di y , delle quali $a(x, y)$ non identicamente nulla, è possibile esprimere le quattro funzioni I_1, I_2, I_3, I_4 mediante $a, b, c, \frac{\partial b}{\partial x}, \frac{\partial c}{\partial x}, \dots$, una nuova funzione arbitraria $\omega(x, y)$ e le sue derivate parziali prime, seconde e « terze », ma non mediante $a, b, c, \frac{\partial b}{\partial x}, \frac{\partial c}{\partial x}, \dots$, la ω e le sole sue derivate parziali prime e seconde, a meno che le funzioni $b(x, y)$, $c(x, y)$ si trovino in uno dei casi degeneri a), b), c), d), e), f).*

Dimostrazione. Posto

$$I_2 = \int \varphi dx = \omega(x, y),$$

si trae:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = a \frac{\partial \omega}{\partial x}, \\ I_2 = \omega, \\ I_3 = \int b \frac{\partial \omega}{\partial x} dx = b\omega - \int \omega \frac{\partial b}{\partial x} dx, \\ I_4 = \int c \frac{\partial \omega}{\partial x} dx = c\omega - \int \omega \frac{\partial c}{\partial x} dx. \end{array} \right.$$

Se b e c sono ambedue funzioni della sola y (e in particolare se esse sono ambedue identicamente nulle), si elidono i due termini integrali e le quattro funzioni I_1, I_2, I_3, I_4 si possono così esprimere mediante a, b, c , la funzione arbitraria $\omega(x, y)$ e le sue derivate parziali prime, in accordo con quanto esposto in b), e).

Se ad esempio $\frac{\partial b}{\partial x}$ non è identicamente nulla, si ponga:

$$\int \omega \frac{\partial b}{\partial x} dx = \tau(x, y).$$

Con ciò si ottiene:

$$\omega = \frac{1}{b'} \frac{\partial \tau}{\partial x}, \quad \varphi = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{b'} \frac{\partial \tau}{\partial x} \right),$$

e quindi:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = \frac{a}{b'} \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} - a \frac{b''}{(b')^2} \frac{\partial \tau}{\partial x}, \\ I_2 = \frac{1}{b'} \frac{\partial \tau}{\partial x}, \\ I_3 = \frac{b}{b'} \frac{\partial \tau}{\partial x} - \tau, \\ I_4 = \frac{c}{b'} \frac{\partial \tau}{\partial x} - \int \frac{c'}{b'} \frac{\partial \tau}{\partial x} dx. \end{array} \right.$$

Se c è funzione della sola y (e in particolare se c è identicamente nulla), si elide l'ultimo termine integrale superstite e le quattro funzioni I_1, I_2, I_3, I_4 si possono così esprimere mediante a, b, c, b', b'', \dots , la funzione arbitraria τ e le sue derivate parziali prime e seconde, in accordo con quanto esposto in a), c).

Se poi il rapporto c'/b' è funzione della sola y [il che avviene quando $c = A(y) + bB(y)$, con A e B funzioni arbitrarie e in particolare quando c/b è funzione della sola y], ancora l'ultimo termine integrale si elide e risulta:

$$I_4 = \frac{c}{b'} \frac{\partial \tau}{\partial x} - \tau B(y).$$

Le quattro funzioni I_1, I_2, I_3, I_4 si possono così ancora esprimere in termini di $a, b, c, b', b'', \dots, \tau$ e delle derivate prime e seconde di τ in accordo con quanto esposto in d) ed f). Alla stessa conclusione si perviene se $\frac{\partial c}{\partial x}$ non è identicamente nulla e contemporaneamente b è funzione solo di y (in particolare b è identicamente nulla), oppure b/c è funzione solo di y , oppure b'/c' è funzione solo di y .

Supponendo di non trovarci in alcuno dei casi esposti che costituiscono tutti e soli i casi degeneri, si trova:

$$I_4 = \frac{c}{b'} \frac{\partial \tau}{\partial x} - \frac{c'}{b'} \tau + \int \left(\frac{c'}{b'} \right)' \tau dx,$$

e posto quindi

$$\left(\frac{c'}{b'}\right)' = m^{-1}, \quad \int m^{-1}\tau dx = \psi,$$

si deduce:

$$\tau = m \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = \frac{a}{b'} \left(m \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)'' - a \frac{b''}{(b')^2} \left(m \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)', \\ I_2 = \frac{1}{b'} \left(m \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)', \\ I_3 = \frac{b}{b'} \left(m \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)' - m \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ I_4 = \frac{c}{b'} \left(m \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)' - \frac{c'}{b'} m \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi. \end{array} \right.$$

Le quattro funzioni I_1, I_2, I_3, I_4 si possono così esprimere in termini di a, b, c, b', c', \dots , della funzione arbitraria ψ e delle sue derivate parziali prime, seconde e «terze». La prima parte del Teorema è così provata.

Dimostriamo ora la seconda parte del Teorema, che cioè non è possibile esprimere le funzioni I_1, I_2, I_3, I_4 mediante a, b, c, b', c', \dots , una funzione arbitraria ψ e le sole sue derivate parziali prime e seconde, a meno che le funzioni b e c si trovino in uno dei casi degeneri.

Ragionando per assurdo e posto $\frac{\partial \psi}{\partial x} = p, \frac{\partial \psi}{\partial y} = q, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = r, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = s, \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = t$, supponiamo che sia contemporaneamente:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} I_1 = a\varphi = F(\psi, p, q, r, s, t, a, b, c, b', c', \dots), \\ I_2 = \int \varphi dx = G(\psi, p, q, r, s, t, a, b, c, b', c', \dots), \\ I_3 = \int b\varphi dx = H(\psi, p, q, r, s, t, a, b, c, b', c', \dots), \\ I_4 = \int c\varphi dx = K(\psi, q, p, r, s, t, a, b, c, b', c', \dots). \end{array} \right.$$

Poichè dalla seconda delle (12) derivando si trova:

$$\varphi = \frac{\partial G}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial p} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial G}{\partial q} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial G}{\partial r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial G}{\partial s} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial G}{\partial t} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial G}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x} + \dots,$$

ed è $I_1 = a\varphi$, ne viene subito intanto $\frac{\partial G}{\partial r} = \frac{\partial G}{\partial s} = \frac{\partial G}{\partial t} \equiv 0$, perchè altrimenti I_1 conterrebbe le derivate terze della ψ contro l'ipotesi.

Con ragionamento analogo, osservando che $I_1 = a\varphi = \frac{a}{b} \frac{\partial I_3}{\partial x} = \frac{a}{c} \frac{\partial I_4}{\partial x}$, si deduce che deve essere anche:

$$\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{\partial H}{\partial s} = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial K}{\partial r} = \frac{\partial K}{\partial s} = \frac{\partial K}{\partial t} \equiv 0.$$

Pertanto le funzioni G , H , K non possono contenere le derivate seconde della ψ e potranno allora contenere al più le derivate prime, risultando dunque:

$$\begin{cases} I_2 = \int \varphi dx = G(\psi, p, q, a, b, c, b', c', \dots), \\ I_3 = \int b\varphi dx = H(\psi, p, q, a, b, c, b', c', \dots), \\ I_4 = \int c\varphi dx = K(\psi, p, q, a, b, c, b', c', \dots). \end{cases}$$

Derivando si trova poi:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{a} F = \frac{\partial G}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial p} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial G}{\partial q} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial G}{\partial a} a' + \dots = \\ &= \frac{1}{b} \left[\frac{\partial H}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial H}{\partial a} a' + \dots \right] = \\ &= \frac{1}{c} \left[\frac{\partial K}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial p} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial K}{\partial q} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial K}{\partial a} a' + \dots \right], \\ &\left(\frac{\partial G}{\partial p} - \frac{1}{b} \frac{\partial H}{\partial p} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial G}{\partial q} - \frac{1}{b} \frac{\partial H}{\partial q} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \dots \equiv 0, \\ &\left(\frac{\partial G}{\partial p} - \frac{1}{c} \frac{\partial K}{\partial p} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial G}{\partial q} - \frac{1}{c} \frac{\partial K}{\partial q} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \dots \equiv 0, \end{aligned}$$

da cui, essendo ψ arbitraria e contenendo G , H , K soltanto la ψ e le sue derivate parziali prime,

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial p} - \frac{1}{b} \frac{\partial H}{\partial p} \equiv 0, \\ \frac{\partial G}{\partial q} - \frac{1}{b} \frac{\partial H}{\partial q} \equiv 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial G}{\partial p} - \frac{1}{c} \frac{\partial K}{\partial p} \equiv 0, \\ \frac{\partial G}{\partial q} - \frac{1}{c} \frac{\partial K}{\partial q} \equiv 0. \end{cases}$$

Queste poi, essendo b e c funzioni solo di y ed x , si possono scrivere:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial p} \left(G - \frac{1}{b} H \right) \equiv 0, \\ \frac{\partial}{\partial q} \left(G - \frac{1}{b} H \right) \equiv 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial p} \left(G - \frac{1}{c} K \right) \equiv 0, \\ \frac{\partial}{\partial q} \left(G - \frac{1}{c} K \right) \equiv 0. \end{array} \right.$$

Le funzioni $G - \frac{1}{b} H$ e $G - \frac{1}{c} K$ non possono dunque dipendere da p e da q e allora devono dipendere solo da $\psi, a, b, c, b', c', \dots$. Pertanto:

$$\left\{ \begin{array}{l} bG - H = \varrho(\psi, a, b, c, b', c', \dots), \\ cG - K = g(\psi, a, b, c, b', c', \dots), \end{array} \right.$$

o anche:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} b \int \varphi dx - \int b\varphi dx = \varrho(\psi, a, b, c, b', c', \dots), \\ c \int \varphi dx - \int c\varphi dx = g(\psi, a, b, c, b', c', \dots). \end{array} \right.$$

Derivando ulteriormente rispetto ad x ambo i membri di queste due relazioni, si trova poi:

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} b' \int \varphi dx = \frac{\partial \varrho}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varrho}{\partial a} a' + \frac{\partial \varrho}{\partial b} b' + \dots, \\ c' \int \varphi dx = \frac{\partial g}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial a} a' + \frac{\partial g}{\partial b} b' + \dots, \end{array} \right.$$

e quindi:

$$c' \left(\frac{\partial \varrho}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varrho}{\partial a} a' + \frac{\partial \varrho}{\partial b} b' + \dots \right) = b' \left(\frac{\partial g}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial a} a' + \frac{\partial g}{\partial b} b' + \dots \right).$$

Ma questa può scriversi:

$$\left(c' \frac{\partial \varrho}{\partial \psi} - b' \frac{\partial g}{\partial \psi} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left[c' \left(\frac{\partial \varrho}{\partial a} a' + \frac{\partial \varrho}{\partial b} b' + \dots \right) - b' \left(\frac{\partial g}{\partial a} a' + \frac{\partial g}{\partial b} b' + \dots \right) \right] \equiv 0,$$

e poichè ψ è arbitraria e ϱ, g contengono la ψ ma non le sue derivate, ne viene:

$$c' \frac{\partial \varrho}{\partial \psi} - b' \frac{\partial g}{\partial \psi} \equiv 0.$$

L'ultima relazione, scritta nella forma

$$\frac{\partial}{\partial \psi} [c' \varrho - b' g] \equiv 0,$$

mostra che la funzione $c' \varrho - b' g$ non dipende da ψ e dipende quindi solo da a, b, c, b', c', \dots . Tenuto conto delle espressioni (13), (14) della ϱ e della g , siamo dunque giunti alla conclusione che deve essere:

$$(17) \quad \boxed{c'b \int \varphi dx - c' \int b\varphi dx - b'c \int \varphi dx + b' \int c\varphi dx = \alpha(a, b, c, b', c', \dots)}.$$

Orbene si osservi che:

1°) Se b e c sono ambedue funzioni della sola y , in particolare ambedue identicamente nulle [casi degeneri e) e b)], la (17) è verificata (con $\alpha \equiv 0$) ed è possibile esprimere I_1, I_2, I_3, I_4 in termini di $a, b, c, b', c', \dots, \psi$ e delle sue derivate parziali prime, come abbiamo provato. In questo caso segue poi, dalle (13) e (14),

$$\varrho \equiv 0, \quad g \equiv 0, \quad \text{ossia} \quad I_3 = bI_2, \quad I_4 = cI_2.$$

2°) Se b dipende solo da y (in particolare se è identicamente nulla), mentre lo stesso non avviene per la $c(x, y)$ [casi degeneri a), c)], la (17) diviene: $c'b \int \varphi dx - c' \int b\varphi dx = \alpha$ ed è ancora verificata con $\alpha \equiv 0$. È in questo caso possibile esprimere I_1, I_2, I_3, I_4 in termini di x, y, ψ e delle derivate prime e seconde, come abbiamo provato. Inoltre per la (13) risulta $\varrho \equiv 0$, ossia $I_3 = bI_2$, ma non risulta identicamente nulla la $g = cG - K$.

3°) Se $c = bA(y)$ [caso degeneri d)], la (17) diviene:

$$b'A(y)b \int \varphi dx - b'A(y) \int b\varphi dx - b'bA(y) \int \varphi dx + b' \int bA(y)\varphi dx = \alpha(x, y),$$

ed è ancora soddisfatta con $\alpha \equiv 0$. In questo caso è possibile esprimere I_1, I_2, I_3, I_4 in termini di ψ e delle sue derivate prime e seconde, come abbiamo provato. Dalle (13) e (14) segue poi che nè ϱ nè g sono identicamente nulle, ma risulta: $g = A(y)\varrho$, cioè $cI_2 - I_4 = A(y)(bI_2 - I_3)$.

4°) Se, infine, $c' = b'A(y)$ ossia $c = B(y) + bA(y)$ [caso degeneri f)], la (17) diviene:

$$b'A(y)b \int \varphi dx - b'A(y) \int b\varphi dx - \\ - b'[B(y) + bA(y)] \int \varphi dx + b' \int [B(y) + bA(y)]\varphi dx = \alpha,$$

ed è ancora verificata con $\alpha \equiv 0$. In questo caso è possibile esprimere I_1, I_2, I_3, I_4 in termini di φ e delle sue derivate prime e seconde, come abbiamo provato. Dalle (13) e (14) segue poi ancora:

$$g = [B(y) + bA(y)] \int \varphi \, dx - \int [B(y) + bA(y)] \varphi \, dx = bA(y) \int \varphi \, dx - \int bA(y) \varphi \, dx,$$

ossia $g = A(y)\varrho$.

Se non ci troviamo in alcuno dei casi degeneri ora studiati è facile provare che la (17) è assurda. Infatti, dividendone ambo i membri per b' , essa si scrive:

$$\left(\frac{c'}{b'}\right) [b \int \varphi \, dx - \int b\varphi \, dx] - [c \int \varphi \, dx - \int c\varphi \, dx] = \frac{\alpha}{b'} = \beta(a, b, c, b', c', \dots),$$

e quindi, derivando rispetto a x ,

$$\left(\frac{c''}{b'}\right) \left[b \int \varphi \, dx - \int b\varphi \, dx \right] + \frac{c'}{b'} b' \int \varphi \, dx - c' \int \varphi \, dx = \frac{d\beta}{dx}.$$

Di qui, moltiplicando ambo i membri per $m = [(c'/b')^{-1}]$, si ottiene poi:

$$b \int \varphi \, dx - \int b\varphi \, dx = m \frac{d\beta}{dx},$$

da cui, derivando successivamente ancora due volte,

$$b' \int \varphi \, dx = \left(m \frac{d\beta}{dx} \right)',$$

$$\varphi = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{b'} \left(m \frac{d\beta}{dx} \right)' \right] = \gamma(a, b, c, b', c', b'', c'', \dots).$$

Questa relazione implica che φ , anzichè funzione arbitraria di x e di y , sia funzione di $a, b, c, b', c', b'', c'', \dots$. L'ipotesi che I_1, I_2, I_3, I_4 si possano esprimere mediante una funzione arbitraria φ e le sole sue derivate parziali prime e seconde nel caso generale (quando cioè b e c non si trovino in alcuno dei casi degeneri) è dunque assurda e il Teorema II è completamente dimostrato.

Osservazione. Abbiamo provato che I_1, I_2, I_3, I_4 si possono esprimere mediante $a, b, c, b', c', \dots, \varphi$ e le sue derivate parziali prime, seconde e terze nel caso generale. Notiamo esplicitamente che nell'espressione di I_1 e

quindi della φ devono venire coinvolte le derivate terze. Infatti, nè I_2 , nè I_3 , nè I_4 possono contenere le derivate terze, giacchè altrimenti $\varphi = \frac{\partial I_2}{\partial x} = \frac{1}{b} \frac{\partial I_3}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial I_4}{\partial x}$ conterrebbe le derivate quarte.

Corollario 1°. *Se $\varphi(x, y)$ è una funzione arbitraria di x e di y e $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$, $\gamma(x, y)$ sono tre funzioni assegnate di x e di y , delle quali α non identicamente nulla, è possibile esprimere le quattro funzioni*

$$I_1 = \varphi, \quad I_2 = \int \alpha \varphi dx, \quad I_3 = \int \beta \varphi dx, \quad I_4 = \int \gamma \varphi dx$$

mediante α , β , γ , α' , β' , γ' , ..., una nuova funzione arbitraria $\psi(x, y)$ e le sue derivate parziali prime, seconde e terze, ma non mediante α , β , γ , α' , β' , γ' , ..., ψ e le sue derivate parziali prime e seconde, a meno che:

a') *sia $\beta \equiv 0$ oppure $\gamma \equiv 0$ (nel qual caso le quattro funzioni si esprimono con α , β , γ , ..., ψ e le sue derivate prime e « seconde »);*

b') *sia $\beta \equiv 0$ e contemporaneamente $\gamma \equiv 0$ (nel qual caso le quattro funzioni si esprimono con α , β , γ , ..., ψ e le sue derivate « prime »);*

c') *sia $\beta = \alpha \varrho(y)$ oppure $\gamma = \alpha \varrho(y)$ (nel qual caso le quattro funzioni si esprimono con α , β , γ , ..., ψ e le sue derivate prime e « seconde »);*

d') *sia $\gamma = \beta \varrho(y)$ (nel qual caso le quattro funzioni si esprimono con α , β , γ , ..., ψ e le sue derivate prime e « seconde »);*

e') *sia $\beta = \alpha \varrho(y)$ e contemporaneamente $\gamma = \alpha \varrho(y)$ (nel qual caso le quattro funzioni si esprimono con α , β , γ , ..., ψ e le sue derivate « prime »);*

f') *sia $\gamma = \alpha A(y) + \beta B(y)$ (nel qual caso le quattro funzioni si esprimono con α , β , γ , ..., ψ e le sue derivate prime e « seconde »).*

Infatti, posto: $\alpha \varphi = \tau$, la tesi segue dal Teorema II nel quale si assuma $a = 1/\alpha$, $b = \beta/\alpha$, $c = \gamma/\alpha$.

Corollario 2°. *Se $\varphi(x, y)$ è una funzione arbitraria di x e di y e $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$, $\gamma(x, y)$ sono funzioni assegnate di x e di y , delle quali α non identicamente nulla, si ha:*

a) *È possibile esprimere le quattro funzioni*

$$L_1 = \varphi, \quad L_2 = \int \alpha \varphi dx, \quad L_3 = \frac{\partial}{\partial y} \int \beta \varphi dx, \quad L_4 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int \gamma \varphi dx,$$

in termini di α , β , γ , $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$, $\frac{\partial \alpha}{\partial y}$, $\frac{\partial \beta}{\partial x}$, $\frac{\partial \beta}{\partial y}$, ..., di una nuova funzione arbitraria ψ e delle sue derivate parziali prime, seconde, terze e quarte.

b) *Non è possibile esprimere L_1 in termini di α , β , γ , ..., ψ e delle sue deri-*

vate parziali prime e seconde, L_2, L_3, L_4 in termini di $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \psi$ e delle sue derivate prime, seconde, terze e quarte, a meno che β, γ non si trovino in uno dei casi degeneri a'), b'), c'), d'), e'), f').

Infatti la possibilità di esprimere L_1, L_2, L_3, L_4 nel modo indicato in a) discende da quanto esposto nella dimostrazione della prima parte del Teorema II. Inoltre, supposto che $L_1 = I_1 = \varphi$ contenga le derivate seconde al più, $L_2 = \int \alpha \varphi dx$ non può contenere che le derivate prime al più (in quanto $\varphi = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial L_2}{\partial x}$), $L_3 = \frac{\partial}{\partial y} \int \beta \varphi dx$ non può contenere che le derivate seconde al più, perchè se contenesse le terze, $I_3 = \int \beta \varphi dx$ conterrebbe le seconde e quindi $\varphi = \frac{1}{\beta} \frac{\partial I_3}{\partial x}$ le terze. Infine $L_4 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int \gamma \varphi dx$ non può contenere che le derivate terze al più perchè se contenesse le quarte, $I_4 = \int \gamma \varphi dx$ conterrebbe le seconde e quindi $\varphi = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial I_4}{\partial x}$ le terze. In definitiva dovrebbe aversi:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 = \varphi = I_1 = F(\psi, p, q, r, s, t, \alpha, \beta, \gamma, \dots), \\ L_2 = \int \alpha \varphi dx = I_2 = G(\psi, p, q, \alpha, \beta, \gamma, \dots), \\ L_3 = \frac{\partial}{\partial y} \int \beta \varphi dx = \frac{\partial I_3}{\partial y} = H(\psi, p, q, r, s, t, \alpha, \beta, \gamma, \dots), \\ L_4 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int \gamma \varphi dx = \frac{\partial^2 I_4}{\partial y^2} = K\left(\psi, p, q, r, s, t, \dots, \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}, \alpha, \beta, \gamma, \dots\right), \end{array} \right.$$

e quindi:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = F(\psi, p, q, r, s, t, \alpha, \beta, \gamma, \dots), \\ I_2 = G(\psi, p, q, \alpha, \beta, \gamma, \dots), \\ I_3 = \bar{H}(\psi, p, q, \alpha, \beta, \gamma, \dots), \\ I_4 = \bar{K}(\psi, p, q, \alpha, \beta, \gamma, \dots). \end{array} \right.$$

L'impossibilità di esprimere L_1, L_2, L_3, L_4 nel modo indicato in b) discende allora dal Corollario 1°.

Osservazione. Si è provato che è possibile esprimere le funzioni L_1, L_2, L_3, L_4 in termini di $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \psi, p, q, r, s, t, \dots, \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4}$. Notiamo esplicitamente che nell'espressione di $L_1 = \varphi$ devono comparire le derivate terze. Infatti se $L_1 = I_1 = \varphi$ contenesse solo le derivate seconde al più, le funzioni

$I_2 = L_2, I_3, I_4$ dovrebbero contenere le derivate prime al più e l'assurdo segue dal Corollario 1°.

Corollario 3°. A) Si può esprimere la funzione $L_1 = I_1 = \varphi$ in termini di $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, la funzione arbitraria ψ e le sue derivate prime, seconde e « terze », e la funzione

$$\tau = L_2 + L_3 + L_4 = I_2 + \frac{\partial I_3}{\partial y} + \frac{\partial^2 I_4}{\partial y^2} = \int \alpha \varphi dx + \frac{\partial}{\partial y} \int \beta \varphi dx + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int \gamma \varphi dx,$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, la ψ e le sue derivate prime, seconde, terze e quarte.

B) Non si può esprimere $L_1 = I_1 = \varphi$ mediante $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, la ψ e le sue derivate prime e seconde, e la funzione τ con $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \psi$ e le sue derivate sino alle quarte al più, a meno che le funzioni β e γ si trovino in uno dei casi degeneri a'), b'), c'), d'), e'), f').

La proposizione A) discende dalla proposizione a) del Corollario 2°. Per dimostrare la proposizione B) osserviamo poi che se τ contiene le derivate quarte, una almeno delle tre funzioni I_2, I_3, I_4 deve contenere le derivate seconde. In tal caso, però, $\varphi = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial I_2}{\partial x} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial I_3}{\partial x} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial I_4}{\partial x}$ conterrebbe le derivate terze e non soltanto le seconde. Se poi τ non contiene le derivate quarte ma soltanto le terze al più, si osservi che $L_2 = I_2$ non può contenere tali derivate terze perchè altrimenti $\varphi = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial I_2}{\partial x}$ conterrebbe le quarte. Allora sono L_3 ed L_4 che contengono le terze al più e quindi I_3 ed I_4 contengono al più le seconde. In definitiva I_1, I_2, I_3, I_4 contengono al più le seconde. Ma l'impossibilità di esprimere I_1, I_2, I_3, I_4 con le derivate seconde al più è stata dimostrata nel Corollario 1° del Teorema II, e pertanto la proposizione B) discende da tale Corollario.

Equazioni differenziali delle superficie eccezionali.

1. - Dopo tutte queste premesse siamo in grado di dimostrare la proposizione che costituisce l'oggetto precipuo del presente lavoro.

Intendendo con le notazioni $\varrho(x, y) \equiv 0$, $\varrho(x, y) \not\equiv 0$ significare, rispettivamente, « $\varrho(x, y)$ identicamente nulla rispetto a x e ad y », « $\varrho(x, y)$ non identicamente nulla rispetto ad x e ad y », si osservi che, essendo $e^h = e^{2\mu} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y}$ e quindi $\frac{\partial h}{\partial x} = e^{-h} \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{2\mu} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} \right)$, la relazione $\frac{\partial \mu}{\partial y} \equiv 0$ trascina con sè l'altra $\frac{\partial h}{\partial x} \equiv 0$, mentre la relazione $\frac{\partial h}{\partial x} \not\equiv 0$ implica $\frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \mu}{\partial y} \not\equiv 0$.

Posto, allora,

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{\partial}{\partial y} \left(e^{2\mu} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} \right) - e^{2\mu} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} \frac{\partial h}{\partial x}, \\ \beta = \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x}, \\ \gamma = \frac{\partial h}{\partial x}; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} I_1 = \varphi, \\ I_2 = \int \alpha \varphi \, dx, \\ I_3 = \int \beta \varphi \, dx, \\ I_4 = \int \gamma \varphi \, dx; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} L_1 = \varphi, \\ L_2 = \int \alpha \varphi \, dx = I_2, \\ L_3 = \frac{\partial}{\partial y} \int \beta \varphi \, dx = \frac{\partial I_3}{\partial y}, \\ L_4 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int \gamma \varphi \, dx = \frac{\partial^2 I_4}{\partial y^2}, \end{array} \right.$$

e ricordando le espressioni (1) degli sforzi, si vede chiaramente come la teoria esposta sia applicabile al caso statico che ci interessa, tenuto conto, ben s'intende, della particolarità che dall'essere $\beta \equiv 0$ discende $\gamma \equiv 0$ e viceversa.

Sussiste precisamente il seguente

Teorema III. Per esprimere gli sforzi nell'integrale generale del sistema indefinito $p_{ik}^{ik} = 0$, ($i, k = 1, 2$),

1°) occorrono e bastano le derivate quinte ⁽¹⁰⁾ nel caso generale, cioè quando risulta:

$$\gamma \neq 0, \quad \alpha \neq 0,$$

senza che sia verificato alcuno dei casi eccezionali c'), d'), e'), f');

2°) occorrono e bastano le derivate quarte, se:

a) $\gamma \neq 0$, $\alpha \neq 0$, ma è verificata una delle condizioni c'), f'), oppure

b) $\gamma \neq 0$, $\alpha \equiv 0$ senza che sia verificato il caso eccezionale d');

3°) occorrono e bastano le derivate terze, se ⁽¹¹⁾:

$$\gamma \equiv 0, \quad \alpha \neq 0;$$

4°) occorrono e bastano le derivate seconde, se:

$$\gamma \equiv 0, \quad \alpha \equiv 0.$$

⁽¹⁰⁾ In questo enunciato alla frase « occorrono e bastano le derivate k -esime » intendiamo sempre che faccia seguito la frase « insieme alla funzione arbitraria ψ ed alle sue derivate prima, seconda, ..., $(k-1)$ -esima ».

⁽¹¹⁾ Il caso $\gamma = \beta \varrho(y)$, ossia $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} \varrho(y)$ è incluso nella proposizione 3°) perchè $1 - \frac{\partial \mu}{\partial y} \varrho(y) = 0$ implica $\frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial y} = 0$ e quindi $\frac{\partial h}{\partial x} = 0$.

Dimostrazione. La proposizione 1°) e quella 2°), a) discendono immediatamente dal Corollario 3° del Teorema II. La proposizione 2°), b) discende dal Corollario 3° del Teorema I. La proposizione 3°) dal Corollario 1° del Teorema I. La proposizione 4°) [che è evidente per quel che riguarda la sufficienza] è stata già dimostrata nel lavoro citato in (1), b).

2. — Denominando *superficie eccezionali del 4°, 3°, 2° tipo* quelle superficie per le quali gli sforzi si esprimono con le derivate di ordine massimo 4, 3, 2 rispettivamente, siamo giunti dunque alla seguente conclusione:

Tutte e sole le superficie eccezionali del quarto tipo sono quelle la cui metrica soddisfa l'equazione differenziale:

$$(18) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{2\mu} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} \right) - e^{2\mu} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} \frac{\partial h}{\partial x} = A(y) \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} + B(y) \frac{\partial h}{\partial x}$$

Tutte e sole le superficie eccezionali del terzo tipo sono quelle la cui metrica soddisfa l'equazione differenziale:

$$(19) \quad \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

Tutte e sole le superficie eccezionali del secondo tipo sono le superficie a curvatura totale costante.

Le (18) e (19) sono le cercate equazioni differenziali delle superficie eccezionali del 4° e 3° tipo.

Chiudiamo segnalando qualche semplice esempio:

La superficie di metrica $ds^2 = dx^2 + (x^2 + y)^2 dy^2$ è una superficie generale.

La superficie di metrica $ds^2 = dx^2 + (x + y^2)^4 dy^2$ è una superficie eccezionale del 4° tipo.

La superficie di metrica $ds^2 = dx^2 + (x^2 + 1)^2 dy^2$ è una superficie eccezionale del 3° tipo.

La superficie di metrica $ds^2 = dx^2 + \cos^2 x dy^2$ è una superficie eccezionale del 2° tipo.