TRISTANO MANACORDA (*)

Il moto di un corpo di massa variabile. (**)

1. – Premesse.

Lo studio della dinamica di un punto prima, poi di un corpo di massa variabile è stato oggetto di numerose ricerche. T. LEVI CIVITA [1] (1) ha determinato l'equazione di moto di un punto la cui massa vari per apporto od emissione di particelle. Dopo le osservazioni di E. ALMANSI [3] e di E. FERMI [2], egli ritornò sulla questione [4], [5] per togliere una ipotesi, dimostratasi non necessaria, introdotta nel suo precedente lavoro, e considerare, per le particelle che cadono sul punto di massa variabile (assunto come modello di un astro) una distribuzione maxwelliana di velocità. Sulla questione tornarono poi D. GRAFFI [6], che introdusse la considerazione di una distribuzione di velocità qualsiasi, M. MANARINI [7], [8] e, recentemente, A. DE CASTRO BRZEZICKI [12], [13].

Di recente il problema del corpo di massa variabile ha invece acquistato interesse per l'importanza della questione nello studio della dinamica dei razzi. J. B. ROSSER, R. R. NEWTON e G. L. GROSS nel loro ampio studio sulla balistica dei razzi [9], hanno posto a fondamento della trattazione due relazioni che sono in sostanza le equazioni cardinali della dinamica per un corpo di massa variabile e che vengono poi applicate con qualche approssimazione. Le due equazioni verranno determinate nel corso della presente Nota in modo rigoroso e con procedimento differente, e, per la seconda equazione cardinale, più semplice. Infine, un lavoro di G. LAMPARIELLO [10], che ha applicato ad un problema di moto di razzi l'equazione di LEVI CIVITA, ha suggerito ad R. VALCOVICI [11] di determinare le equazioni di moto di un corpo rigido di massa variabile. Di quest'ultimo lavoro sono venuto a conoscenza solo quando questa Nota era già completata.

In questa Nota si riprende la questione nell'intento di darle un assetto, per quanto è possibile, organico e completo, ed anche più generale. Si deter-

---

(*) Indirizzo: Via Dupré 32, Firenze (Italia).
(**) Ricevuto il 5-XII-1952.
(1) I numeri in parentesi quadra richiamano la Bibliografia alla fine del lavoro.

mina così il teorema della quantità di moto del centro di massa in una forma valida anche per corpi continui non rigidi, dandone la forma particolare nel caso di un corpo rigido, stabilendo poi l'equazione di moto del centro di massa. Ambedue queste relazioni non erano state determinate dagli Autori citati. Si trovano poi le equazioni cardinali della dinamica, in una forma valida anche per i corpi non rigidi, dandone poi ancora la forma per il caso di un sistema rigido. Come conseguenza se ne deducono le equazioni di moto di un corpo rigido di massa variabile, già determinate, come si è detto, da R. VALCOVICI con altro procedimento. Si applicano infine le equazioni trovate ad un semplice ma espressivo esempio.

2. – Teorema del moto del centro di massa.

Sia C un sistema materiale continuo, di massa iniziale M, il quale, durante un intervallo di tempo T perda, per emissione, la massa M_1. In tal modo, durante l'intervallo di tempo $(0, T)$ la massa di C diviene una funzione del tempo $m = m(t)$ che sarà supposta continua e derivabile, con derivata prima continua. Si ammette inoltre che la densità della distribuzione materiale in C sia funzione continua dei punti P di C.

Nell'istante t sia $S(t)$ il campo occupato dalla massa $m(t)$. Il centro di massa di $S(t)$ è definito da

$$m(t)(G-O) = \int_S \varrho[P(t)-O]\,\mathrm{d}S\,, \tag{1}$$

con O punto fisso. Nell'istante $t+\Delta t$, $\Delta t > 0$, la massa è divenuta $m-\Delta m$, $\Delta m > 0$, e occupa un campo S'. Il nuovo centro di massa è quindi definito da

$$[m(t)-\Delta m](G'-O) = \int_{S'} \varrho'(P'-O)\,\mathrm{d}S'\,, \tag{2}$$

in cui $\varrho'\,\mathrm{d}S'$ indica la massa della particella P' che nell'istante t occupava la posizione P ed aveva la massa $\varrho\mathrm{d}S$. Si ha dunque $\varrho'\,\mathrm{d}S' = \varrho\,\mathrm{d}S$. Il secondo membro della (2) può scriversi

$$\int_{S'} \varrho'(P'-O)\,\mathrm{d}S' = \int_{S'} \varrho'(P'-P)\,\mathrm{d}S' + \int_{S'} \varrho'(P-O)\,\mathrm{d}S'\,. \tag{3}$$

La trasformazione che porta S' in S è continua ed invertibile. Perciò nella (3) si può considerare P' funzione di P o inversamente. Sia allora S_1 la parte di S che corrisponde ad S', cioè il campo occupato in S, nell'istante t, dalle masse che occupano S' nell'istante $t + \Delta t$. La (3) può scriversi:

$$(4) \qquad \int_{S'} \varrho'(P' - O)\,\mathrm{d}S' = \int_{S_1} \varrho(P' - P)\,\mathrm{d}S + \int_{S_1} \varrho(P - O)\,\mathrm{d}S\,.$$

Sottraendo allora dalla (2) la (1) si ottiene

$$(5) \qquad m(t)[G' - G] - \Delta m(G - O) = \int_{S_1} \varrho(P' - P)\,\mathrm{d}S - \int_{S - S_1} \varrho(P - O)\,\mathrm{d}S\,.$$

Si osservi ora che $P' - P$ rappresenta lo spostamento del punto P nell'intervallo Δt. Può dunque scriversi

$$(6) \qquad (P' - P) = \Delta t\,[\dot{P}(t) + \boldsymbol{\epsilon}(P, \Delta t)]\,,$$

con $\lim_{\Delta t \to 0} \boldsymbol{\epsilon} = 0$ qualunque sia P, e dove $\dot{P}$ indica la derivata di P rispetto al tempo. Dividendo la (5) per Δt e passando al limite per $\Delta t \to 0$ si ha quindi

$$(7) \qquad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{S_1} \varrho(P' - P)\,\mathrm{d}S = \lim_{\Delta t \to 0} \int_{S_1} \varrho \dot{P}\,\mathrm{d}S + \lim_{\Delta t \to 0} \int_{S_1} \varrho \boldsymbol{\epsilon}\,\mathrm{d}S = \int_{S} \varrho \dot{P}\,\mathrm{d}S = \boldsymbol{Q}(t)\,,$$

essendo $\boldsymbol{Q}$ la quantità di moto del sistema al tempo t. Dalla (5) si ha allora

$$(8) \qquad m(t)\dot{G}(t) = \boldsymbol{Q}(t) - \dot{m}(G - O) - \boldsymbol{q}(t)\,,$$

perchè si ha $-\lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta m}{\Delta t} = \dot{m}$. Nella (8) $\boldsymbol{q}(t)$ è dato da

$$(9) \qquad \boldsymbol{q}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{S - S_1} \varrho(P - O)\,\mathrm{d}S\,.$$

La (8) vale per qualunque sistema, anche non rigido. Sia ora C un sistema rigido, ed indichi O^* un punto solidale a C. L'integrale che figura nella (9) può scriversi

$$(10) \qquad \int_{S - S_1} \varrho(P - O)\,\mathrm{d}S = \int_{S - S_1} \varrho(P - O^*)\,\mathrm{d}S + \Delta m\,(O^* - O)\,.$$

Con riferimento ad una terna $\mathcal{T}$ di origine O^* e solidale con C, l'integrale a secondo membro rappresenta, a meno del segno, la variazione del momento statico (vettoriale) $\boldsymbol{J}^*$. Ne segue che

$$-\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{S-S_1}\varrho(P-O^*)\,\mathrm{d}S$$

è la derivata rispetto al tempo e relativa a $\mathcal{C}$ di $\boldsymbol{J}^*$. La (8) diviene, perciò, in questo caso:

$$m\dot{G}=\boldsymbol{Q}-\dot{m}(G-O^*)+\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{J}^*\right)_R\,. \tag{11}$$

Ma si ha $\boldsymbol{J}^*=m(G-O^*)$, e si ottiene finalmente

$$m\dot{G}=\boldsymbol{Q}+m(\dot{G})_R\,, \tag{12}$$

con $(\dot{G})_R$ velocità relativa a $\mathcal{C}$ di G. La (12) può ottenersi anche direttamente dalla definizione di quantità di moto di un corpo.

3. – La prima equazione cardinale della dinamica.

Per definizione è

$$\boldsymbol{Q}(t)=\int\limits_S\varrho\dot{P}(t)\,\mathrm{d}S\,. \tag{13}$$

Nell'istante $t+\Delta t$, con le notazioni del numero precedente, si ha

$$\boldsymbol{Q}(t+\Delta t)=\int\limits_{S'}\varrho'\dot{P}'\,\mathrm{d}S'\,,$$

in cui $\dot{P}'$ indica la velocità di P nella posizione P'. Ora, al solito, per la corrispondenza continua e biunivoca tra S' ed S_1, nell'ultima relazione scritta $\dot{P}'$ può considerarsi funzione dei punti P di S_1. Può dunque scriversi

$$\boldsymbol{Q}(t+\Delta t)=\int\limits_{S_1}\varrho\dot{P}'\,\mathrm{d}S\,. \tag{14}$$

Sottraendo allora dalla (14) la (13) si ottiene:

$$\boldsymbol{Q}(t+\Delta t)-\boldsymbol{Q}(t)=\int\limits_{S_1}\varrho\,[\dot{P}'-\dot{P}]\,\mathrm{d}S-\int\limits_{S-S_1}\varrho\dot{P}\,\mathrm{d}S\,.$$

Ma avendosi anche qui $\dot{P}' - \dot{P} = \Delta t\,[\ddot{P}(t) + \eta(P, \Delta t)]$ con $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \eta = 0$ qualunque sia P, dividendo la precedente relazione per Δt e passando al limite si ottiene

$$\dot{Q}(t) = \int_S \varrho \ddot{P}\,\mathrm{d}S - \boldsymbol{p}(t)\,,$$

con

$$\boldsymbol{p}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{S - S_1} \varrho \dot{P}\,\mathrm{d}S\,. \tag{15}$$

Ma $\int_S \varrho \ddot{P}\,\mathrm{d}S = \boldsymbol{F}^{(e)}$, con $\boldsymbol{F}^{(e)}$ risultante delle forze esterne, e si ottiene la prima equazione cardinale della dinamica nella forma

$$\dot{\boldsymbol{Q}}(t) = \boldsymbol{F}^{(e)} - \boldsymbol{p}(t)\,. \tag{16}$$

È bene osservare che tra le forze $\boldsymbol{F}^{(e)}$ figurano anche le forze esercitate su C a causa del distacco delle particelle.

4. – Calcolo delle forze di distacco.

Schematizziamo il fenomeno della emissione di particelle da parte di C ammettendo che esso consista, istante per istante, in un brusco cambiamento della velocità delle particelle, o di una parte delle particelle, che si vengono a trovare, nell'istante considerato, sulla frontiera di $S(t)$. Nell'intervallo infinitesimo Δt lascino il corpo le particelle che, all'istante t, occupano il campo $S - S_1 = \Delta S$. Nell'istante t la loro quantità di moto è $\int_{\Delta S} \varrho \dot{P}\,\mathrm{d}S$, mentre all'istante $t + \Delta t$ le medesime particelle occupano il campo $\Delta S'$ ed hanno la quantità di moto $\int_{\Delta S'} \varrho' \boldsymbol{v}'(P')\,\mathrm{d}S'$. Per la corrispondenza tra ΔS e $\Delta S'$, questo ultimo integrale si può scrivere $\int_{\Delta S} \varrho \boldsymbol{v}'(P)\,\mathrm{d}S$ in cui $\boldsymbol{v}'$ è espresso in funzione di P per il tramite dei punti P' di S'. Le particelle in esame hanno dunque subito una variazione della quantità di moto pari a $\int_{\Delta S} \varrho[\boldsymbol{v}' - \dot{P}]\,\mathrm{d}S$, e ad essa corrisponde un impulso subito dal corpo dato da

$$\boldsymbol{f}\Delta t = -\int_{\Delta S} \varrho[\boldsymbol{v}' - \dot{P}]\,\mathrm{d}S\,.$$

Da questa, dividendo per Δt e passando al limite per $\Delta t \to 0$ si ottiene

$$f(t) = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta S} \varrho [\boldsymbol{v}' - \dot{P}] \, \mathrm{d}S \, .$$

Sostituendo nella (16) si ha:

$$\dot{\boldsymbol{Q}}(t) = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{f} - \boldsymbol{p} = \boldsymbol{F} - \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta S} \varrho \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}S \, , \tag{17}$$

in cui ora $\boldsymbol{F}$ indica la risultante delle forze esterne indipendenti dalle forze che dipendono dal distacco delle particelle, e $\boldsymbol{v}$ si può considerare la velocità della particella P subito dopo il distacco. L'integrale nell'ultimo membro della (17) rappresenta la quantità di moto che avrebbe nell'istante t la massa contenuta in $S - S_1$ se si muovesse con la velocità $\boldsymbol{v}$. Al limite, perciò, l'ultimo termine della (17) rappresenta la quantità di moto emessa dal corpo nell'unità di tempo, e si può leggere la (17) come in [9], pag. 6.

5. – Il teorema del moto del centro di massa per un corpo rigido di massa variabile.

Dalla (12), derivando rispetto al tempo, si ottiene:

$$m\ddot{G} = -\dot{m}[\dot{G} - (\dot{G})_R] + \dot{\boldsymbol{Q}} + m \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\dot{G})_R \, .$$

Essendo $\dot{G} - (\dot{G})_R = \dot{O}^* + \boldsymbol{\omega} \wedge (G - O^*)$, con $\boldsymbol{\omega}$ velocità di rotazione di C, e $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\dot{G})_R = (\ddot{G})_R + \boldsymbol{\omega} \wedge (\dot{G})_R$, si ha:

$$m\ddot{G} = \boldsymbol{Q} - \dot{m}\dot{O}^* - \dot{m}\boldsymbol{\omega} \wedge (G - O^*) + m(\ddot{G})_R + m\boldsymbol{\omega} \wedge (\dot{G})_R \, . \tag{18}$$

Si ha anche, dalla (17),

$$\dot{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{F} - \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{S - S_1} \varrho \dot{P} \, \mathrm{d}S - \boldsymbol{p}_R \, ,$$

con $\boldsymbol{p}_R = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{1}{\Delta t} \displaystyle\int_{S-S_1} \varrho \boldsymbol{v}_R \, \mathrm{d}S$, $\boldsymbol{v}_R = \boldsymbol{v} - \dot{P}$ velocità, subito dopo il distacco, relativa a C. Ma in quanto C ora è rigido, $\dot{P} = \dot{O}^* + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O^*)$, e si ottiene

$$\dot{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{F} + \dot{m}\dot{O}^* + \boldsymbol{\omega} \wedge \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m(G - O^*)\right]_R - \boldsymbol{p}_R \,.$$

Sostituendo nella (18) si ha:

$$m\ddot{G} = \boldsymbol{F} + m(\ddot{G})_R + 2m\boldsymbol{\omega} \wedge (\dot{G})_R - \boldsymbol{p}_R \,, \tag{19}$$

che costituisce l'equazione di moto del centro di massa nel caso in esame. Nella (19) si può far figurare l'accelerazione di O^*. Si ha infatti

$$\ddot{G} - (\ddot{G})_R - 2\boldsymbol{\omega} \wedge (\dot{G})_R = \ddot{O}^* + \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (G - O^*) + \boldsymbol{\omega} \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (G - O)] \,,$$

e quindi:

$$m\ddot{O}^* = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{p}_R - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (G - O^*) - m\boldsymbol{\omega} \wedge [\boldsymbol{\omega} \wedge (G - O^*)] \,, \tag{19'}$$

con

$$\boldsymbol{p}_R = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{S - S_1} \varrho \boldsymbol{v}_R \,\mathrm{d}S \,.$$

6. – La seconda equazione cardinale della dinamica.

Sia O un punto fisso. Per definizione, se K indica il momento della quantità di moto di C rispetto ad O, è

$$K(t) = \int_S \varrho (P - O) \wedge \dot{P} \,\mathrm{d}S \,. \tag{20}$$

Nell'istante $t + \Delta t$ questo vettore è divenuto, coi simboli già adoperati,

$$K(t + \Delta t) = \int_{S'} \varrho'(P' - O) \wedge \dot{P}' \,\mathrm{d}S' = \int_{S'} \varrho'(P' - P) \wedge \dot{P}' \,\mathrm{d}S' + \int_{S'} \varrho'(P - O) \wedge \dot{P}' \,\mathrm{d}S' \,.$$

Per la solita corrispondenza biunivoca tra S' ed S_1, si può scrivere

$$K(t + \Delta t) = \int_{S_1} \varrho (P' - P) \wedge \dot{P}' \,\mathrm{d}S + \int_{S_1} \varrho (P - O) \wedge \dot{P}' \,\mathrm{d}S \,.$$

Sottraendo da questa la (20) si ottiene:

$$K(t+\Delta t)-K(t)=$$

$$=\int_{S_1}\varrho(P-O)\wedge[\dot{P}'-\dot{P}]\,\mathrm{d}S+\int_{S_1}\varrho(P'-P)\wedge\dot{P}'\,\mathrm{d}S-\int_{S-S_1}\varrho(P-O)\wedge\dot{P}\,\mathrm{d}S\,.$$

Col solito procedimento, dividendo per Δt e passando al limite, si ha

$$\dot{\boldsymbol{K}}(t)=\int_{S}\varrho(P-O)\wedge\ddot{P}\,\mathrm{d}S-\boldsymbol{k}\,,\tag{21}$$

con

$$\boldsymbol{k}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{S-S_1}\varrho(P-O)\wedge\dot{P}\,\mathrm{d}S\,.\tag{22}$$

Ma l'integrale a secondo membro della (21) coincide col momento delle forze esterne rispetto ad O, e si ha la seconda equazione cardinale della dinamica per un corpo continuo di massa variabile nella forma

$$\dot{\boldsymbol{K}}(t)=\boldsymbol{M}^{(e)}-\boldsymbol{k}\,.\tag{23}$$

Nel caso di un corpo rigido conviene riferirsi al punto solidale O^*. Indicando con un asterisco i momenti riferiti ad O^* si ottiene:

$$\dot{\boldsymbol{K}}^*(t)=\boldsymbol{M}^{(e)*}-\dot{O}^*\wedge\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{k}^*\,.\tag{23'}$$

7. – Valutazione del momento delle forze di distacco.

Nel calcolo di $\boldsymbol{M}^{(e)}$ occorre tener conto delle forze di distacco. Adottiamo anche qui lo schema del n. 4. All'istante t, allora, le particelle che occupano $\Delta S=S-S_1$ hanno un momento della quantità di moto dato da

$$\int_{\Delta S}\varrho(P-O)\wedge\dot{P}\,\mathrm{d}S,$$

mentre all'istante $t+\Delta t$ questo momento diviene

$$\int_{\Delta S'}\varrho'(P'-O)\wedge\boldsymbol{v}'(P')\,\mathrm{d}S'.$$

Ma quest'ultimo integrale può scriversi:

$$\int_{\Delta S'}\varrho'(P'-P)\wedge\boldsymbol{v}'(P')\,\mathrm{d}S'+\int_{\Delta S'}\varrho'(P-O)\wedge\boldsymbol{v}'(P')\,\mathrm{d}S'=$$

$$=\int_{\Delta S}\varrho(P'-P)\wedge\boldsymbol{v}'(P)\,\mathrm{d}S+\int_{\Delta S}\varrho(P-O)\wedge\boldsymbol{v}'(P)\,\mathrm{d}S\,,$$

in cui $\boldsymbol{v}'(P)$ indica la velocità dei punti P' di $\Delta S'$ espressa in funzione dei punti P di ΔS. Si ha dunque una variazione del momento della quantità di moto data da

$$\int_{\Delta S} \varrho(P'-P)\wedge \boldsymbol{v}'\,\mathrm{d}S + \int_{\Delta S} \varrho(P-O)\wedge[\boldsymbol{v}'-\dot{P}]\,\mathrm{d}S\,.$$

Abbiamo supposto che proprio nell'istante t avvenga il distacco della particella P. Ne segue che si ha $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{1}{\Delta t}(P'-P)=\boldsymbol{v}(P)$, con $\boldsymbol{v}$ velocità di P immediatamente dopo il distacco. Se allora nella relazione prima scritta si divide per Δt e si passa al limite per $\Delta t\to 0$, il primo integrale tende a zero, e si ha una variazione istantanea del momento della quantità di moto data da

$$\boldsymbol{\mu}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{S-S_1}\varrho(P-O)\wedge(\boldsymbol{v}-\dot{P})\,\mathrm{d}S\,, \tag{24}$$

in cui $\boldsymbol{v}$ indica la velocità di P immediatamente dopo il distacco. Alla variazione (24) corrisponde un momento di forze agente su C uguale e contrario alla (24), e la (23) può dunque scriversi

$$\dot{\boldsymbol{K}}(t)=\boldsymbol{M}-\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{k}\,, \tag{25}$$

con $\boldsymbol{\mu}$ dato dalla (24), ed in cui $\boldsymbol{M}$ indica il momento, rispetto ad O, delle forze esterne indipendenti dalle forze di distacco. Se si ricorda la (22), la (25) può scriversi

$$\dot{\boldsymbol{K}}=\boldsymbol{M}-\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{S-S_1}\varrho(P-O)\wedge\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}S\,. \tag{25'}$$

L'integrale a secondo membro della (25′) rappresenta il momento della quantità di moto che avrebbe la massa contenuta all'istante t in $S-S_1$ (cioè la massa espulsa nel tempo Δt) se si muovesse con la velocità assoluta $\boldsymbol{v}(P)$. Si può dunque leggere la (25′) come nell'enunciato del principio 5° in [**9**], pag. 11, dicendo che il momento delle forze esterne è uguale alla variazione della quantità di moto nell'unità di tempo più il momento della quantità di moto espulso nell'unità di tempo dal corpo [nel senso precisato dalla (25′)].

8. – Caso di un corpo rigido.

Se C è un sistema rigido si ha

$$\begin{aligned}\boldsymbol{k}^*=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{S-S_1}\varrho(P-O^*)\wedge\dot{P}\,\mathrm{d}S=-\dot{O}^*\wedge\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{S-S_1}\varrho(P-O^*)\,\mathrm{d}S\,-\\ -\left\{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{S-S_1}\varrho[(P-O^*)\wedge]^2\,\mathrm{d}S\right\}\boldsymbol{\omega}\,.\end{aligned} \tag{26}$$

Ora si ha:

$$-\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{S-S_1}\varrho(P-O^*)\,\mathrm{d}S=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,m(G-O^*)\right]_R .$$

Se poi si introduce l'omografia di inerzia del sistema riferita ad O^*:

$$\sigma^*=-\int_S\varrho[(P-O^*)\wedge]^2\,\mathrm{d}S\,,$$

si vede subito che si ha

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{S-S_1}\varrho[(P-O^*)\wedge]^2\,\mathrm{d}S=\left(\frac{\mathrm{d}\sigma^*}{\mathrm{d}t}\right)_R .$$

Con ciò la (26) diventa

$$\boldsymbol{k}^*=\dot{O}^*\wedge\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,m(G-O)\right)_R-\left(\frac{\mathrm{d}\sigma^*}{\mathrm{d}t}\right)_R\boldsymbol{\omega}\,. \tag{27}$$

Sostituendo nella (23′) e tenendo conto della (24), si ottiene

$$\dot{\boldsymbol{K}}^*=\boldsymbol{M}^*-\dot{O}^*\wedge\left[\boldsymbol{Q}+\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,m(G-O^*)\right)_R\right]+\left(\frac{\mathrm{d}\sigma^*}{\mathrm{d}t}\right)_R\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\mu}^*\,. \tag{28}$$

Ma dalla (12) si ha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,m(G-O^*)=\dot{m}(G-O^*)+m\dot{G}-m\dot{O}^*=\boldsymbol{Q}+\dot{m}(G-O^*)-m\dot{O}^*+m(\dot{G})_R=$$

$$=\boldsymbol{Q}+\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,m(G-O^*)\right)_R-m\dot{O}^*\,,$$

e la (28) può scriversi:

$$\dot{\boldsymbol{K}}=\boldsymbol{M}^*-\dot{O}^*\wedge\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[m(G-O^*)]+\left(\frac{\mathrm{d}\sigma^*}{\mathrm{d}t}\right)_R\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\mu}^*\,. \tag{29}$$

Possiamo in questa far figurare esplicitamente $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ ed $\boldsymbol{\omega}$ osservando che si ha

$$\boldsymbol{K}^*=-\dot{O}^*\wedge m(G-O^*)+\sigma^*\boldsymbol{\omega}\,.$$

Derivando rispetto al tempo si ottiene

$$\dot{\boldsymbol{K}}^*=-\ddot{O}^*\wedge m(G-O^*)-\dot{O}^*\wedge\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[m(G-O^*)]+\sigma^*\dot{\boldsymbol{\omega}}+\left(\frac{\mathrm{d}\sigma^*}{\mathrm{d}t}\right)_R\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\omega}\wedge\sigma\boldsymbol{\omega}^*\,.$$

Confrontando con la (29) si ottiene finalmente

$$\sigma^*\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \sigma^*\boldsymbol{\omega} + m(G - O^*) \wedge \ddot{O}^* = \boldsymbol{M}^* - \boldsymbol{\omega}^* , \tag{30}$$

che è la seconda delle equazioni di moto di un corpo rigido di massa variabile.

9. – Una applicazione.

Si consideri il moto di un razzo. Per applicare le formule trovate al caso più semplice, il moto avvenga nel vuoto e il razzo possieda, durante tutto il moto, un asse di rivoluzione che sia l'asse z della terna solidale $\mathcal{T}$. A causa della simmetria materiale, il centro di massa si trova, durante tutto il moto, sull'asse z.

Se $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono i momenti di inerzia del sistema rispetto alla terna $\mathcal{T}$, le (19) e (30) danno ora:

$$m\ddot{G} = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{p}_R + m(\ddot{G})_R + 2m\boldsymbol{\omega} \wedge (\dot{G})_R , \tag{31}$$

$$\begin{cases} (\mathcal{A} - mz^2)\dot{p} + [\mathcal{C} - (\mathcal{A} - mz^2)qr = \psi_x , \\ (\mathcal{A} - mz^2)\dot{q} - [\mathcal{C} - (\mathcal{A} - mz^2)]pr = \psi_y , \\ \mathcal{C}\dot{r} = \psi_z , \end{cases} \tag{32}$$

in cui z è l'unica coordinata di G rispetto a $\mathcal{T}$, e p, q, r sono le componentid i $\boldsymbol{\omega}$ rispetto a $\mathcal{T}$, infine $\boldsymbol{\psi}$ indica il vettore

$$\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{M}^* - \boldsymbol{\mu}^* + (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{p}_R) \wedge (G - O^*) = \boldsymbol{M}_0 - \boldsymbol{\mu}_0 , \tag{33}$$

cioè il momento, rispetto al baricentro, delle forze agenti.

Il moto avvenendo nel vuoto, le forze agenti si riducono alla gravità ed alle forze del getto. La prima ha momento nullo rispetto a G. Se ammettiamo, come si usa fare in un primo studio, che il getto avvenga con una simmetria tale che le forze del getto abbiano momento nullo rispetto a G, le (32) divengono

$$\begin{cases} \mathcal{A}_0\dot{p} + (\mathcal{C} - \mathcal{A}_0)qr = 0 , \\ \mathcal{A}_0\dot{q} + (\mathcal{A}_0 - \mathcal{C})pr = 0 , \\ \mathcal{C}\dot{r} = 0 , \end{cases} \tag{32'}$$

in cui $\mathcal{A}_0$ adesso il momento di inerzia rispetto ad un asse normale a z per il baricentro, ed è, insieme a $\mathcal{C}$, funzione del tempo.

Se $\mathcal{A}_0$ e $\mathcal{C}$ fossero costanti, le (32′) sarebbero le equazioni di una precessione regolare. È facile ottenere anche qui p e q in funzione del tempo. Si ha infatti immediatamente

$$r = r_0 = \text{cost.}\,, \qquad p^2 + q^2 = \Omega^2 = \text{cost.}\,,$$

cioè ancora $\omega = \omega_0 = \text{cost.}$. Eliminando p dalla seconda equazione, si ottiene immediatamente

$$\text{(34)} \qquad \begin{cases} p = \Omega \cos\left[\int^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \varphi\right]\,, \\ q = \Omega \,\mathrm{sen}\left[\int^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \varphi\right]\,, \\ r = r_0\,, \end{cases} \qquad f(t) = \frac{\mathcal{C} - \mathcal{A}_0}{\mathcal{A}_0}\, r_0\,, \quad \varphi = \text{cost.}\,.$$

Si ha cioè ancora una precessione regolare, la cui legge temporale dipende dalla legge con cui varia la massa del razzo.

Torniamo alla (31). Le forze agenti si riducono, come si è detto, al peso e alle forze del getto. Queste ultime si possono esprimere facilmente mediante la pressione alla bocca di uscita dell'eiettore e la velocità relativa di emissione. Se $\boldsymbol{\Phi}_e$ indica tale pressione, diretta in senso contrario al getto, e $\boldsymbol{v}_e$ la velocità di emissione, supposta costante su tutta la sezione di uscita (il che si può supporre con errore trascurabile), le forze del getto sono date da $\boldsymbol{\Phi}_e + \dot{m}\boldsymbol{v}_e$. Nelle ipotesi di simmetria assunte, questa forza è parallela all'asse z, e perciò, se il baricentro fosse fisso nel razzo, la sua traiettoria sarebbe piana. Invece, il fatto che la massa del razzo varia, aggiunge, alle forze del getto, oltre ad una forza parallela all'asse z, nulla in condizioni di regime, anche una forza deviatrice, che è nulla soltanto per $(\dot{G})_R = 0$, oppure per $p = q = 0$. Tale forza appare effettivamente molto piccola in confronto alle altre forze agenti, e può quindi essere trascurata. È chiaro come tale forza possa essere messa in evidenza soltanto con le equazioni complete sopra determinate.

Bibliografia.

[1] T. LEVI CIVITA: *Sul moto di un corpo di massa variabile*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) **8**, 329-333, 621-622 (1929).

[2] E. FERMI: *Sul moto di un corpo di massa variabile*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) **9**, 984-986 (1929).

[3] E. Almansi: *Sul moto di un corpo di massa variabile,* Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) **9**, 1055-1056 (1929).

[4] T. Levi Civita: *Pulviscolo cosmico e distribuzione maxwelliana,* Pont. Acad. Sci. Acta **83**, 176-189 (1930).

[5] T. Levi Civita: *Ancora sul moto di un corpo di massa variabile,* Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) **11**, 626-632 (1930).

[6] D. Graffi: *Un'osservazione sull'equazione di moto di un corpo di massa variabile,* Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) **12**, 575-578 (1930).

[7] M. Manarini: *Il principio di Hamilton e il moto di un punto di massa variabile,* Boll. Un. Mat. Ital. (1) **9**, 267-270 (1930).

[8] M. Manarini: *Il principio di Hamilton e il moto di un punto di massa variabile,* Atti Soc. It. Progr. Sci. $\mathbf{19}_2$, 29-33 (1930).

[9] J. B. Rosser, R. R. Newton, G. L. Gross: *Mathematical theory of rocket flight,* McGraw-Hill, New York 1947.

[10] G. Lampariello: *Sur la dynamique du point materiel de masse variable,* C. R. Acad. Sci. Paris **227**, 35-37 (1948).

[11] V. Valcovici: *Sur les équations de mouvement d'un solide de masse variable,* C. R. Acad. Sci. Paris **228**, 52-53 (1949).

[12] A. de Castro Brzezicki: *Introducion a la dinamica del punto de masa variable,* Revista Acad. Ci. Madrid **45**, 45-89 (1951).

[13] A. de Castro Brzezicki: *Sobre el movimiento plano de los cohetes,* Revista Mat. Hisp. Amer. (4) **12**, 3-7 (1952).