Rivista Mat. Univ. Parma 4, 219-226 (1953)

GUIDO SERPENTE (*)

Sul calcolo di certe somme. (**)

In questa Nota considero le somme

$$S_{m,n} = g_0 a_0^n + g_1 a_1^n + g_2 a_2^n + \dots + g_m a_m^n , \tag{1}$$

$$(m = 0, 1, 2, \dots;\ n = 0, 1, 2, \dots),$$

dove a_0, a_1, $a_2, \dots$, $a_\mu, \dots$ è una generica *progressione aritmetica* (di ragione d) e g_0, g_1, $g_2, \dots$, $g_\mu, \dots$ è una generica *progressione geometrica* (di ragione q). Metto in evidenza come l'*Algebra delle successioni* ([1]) si presti ad individuare un facile procedimento per calcolare le somme $S_{m,n}$, in completo parallelismo al comune procedimento per sommare più numeri consecutivi in progressione geometrica.

Nella espressione così ottenuta per le somme $S_{m,n}$ distinguo i due casi $q = 1$, $q \neq 1$, e deduco poi agevolmente, sempre a mezzo di detta Algebra, svariate espressioni notevoli di tali somme mediante i numeri di BERNOULLI, i numeri di EULERO, le differenze di 0^n, ecc..

1. – Procedimento di calcolo delle somme $S_{m,n}$.

Nel caso particolare elementare delle somme

$$S_{m,0} = g_0 + g_1 + g_2 + \dots + g_m \tag{2}$$

(*) Indirizzo: Via Isonzo 29, Ancona (Italia).

(**) Argomento estratto dalla Tesi di laurea dell'A. sostenuta nella Università di Pisa (anno accad. 1949-1950). Ricevuto il 12-VII-1953.

([1]) A. MAMBRIANI, *Sull'Algebra delle successioni*: Memoria I, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **8**, 103-139 (1930); Memoria II, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **9**, 25-56 (1931).

è ben noto che si ha

$$S_{m,0} = \begin{cases} (m+1)g_0 & \text{se è} \quad q = 1\,, \\[2ex] \dfrac{g_0 - g_{m+1}}{1-q} & \text{se è} \quad q \neq 1\,. \end{cases} \tag{3}$$

Nel caso generale conviene pure distinguere due casi.

1° Caso. È contemporaneamente $d = 0$, $q = 1$. Allora si ha subito

$$S_{m,n} = (m+1) g_0 a_0^n\,. \tag{4}$$

2° Caso. *Non* è contemporaneamente $d = 0$, $q = 1$. Allora moltiplicando binomialmente n (2) per qd^n ambo i membri di (1) si ottiene:

$$S_{m,n} \overset{n}{:} qd^n = g_0 a_0^n \overset{n}{:} qd^n + g_1 a_1^n \overset{n}{:} qd^n + \dots + g_m a_m^n \overset{n}{:} qd^n\,.$$

Essendo

$$g_r a_r^n \overset{n}{:} qd^n = g_r q (a_r^n \overset{n}{:} d^n) = g_r q (a_r + d)^n = g_{r+1} a_{r+1}^n\,,$$

risulta

$$S_{m,n} \overset{n}{:} qd^n = g_1 a_1^n + g_2 a_2^n + \dots + g_{m+1} a_{m+1}^n\,. \tag{5}$$

Sottraendo ora membro a membro dalla (1) la (5) si ha, a semplificazioni fatte,

$$S_{m,n} - S_{m,n} \overset{n}{:} qd^n = g_0 a_0^n - g_{m+1} a_{m+1}^n\,,$$

ed essendo (3) $S_{m,n} = S_{m,n} \overset{n}{:} \varepsilon_n$, segue

$$S_{m,n} \overset{n}{:} (\varepsilon_n - qd^n) = g_0 a_0^n - g_{m+1} a_{m+1}^n\,. \tag{6}$$

Abbiamo quindi (4)

$$S_{m,n} = \frac{g_0 a_0^n - g_{m+1} a_{m+1}^n \,{}^{|n}}{\varepsilon_n - qd^n}\,, \tag{7}$$

(2) Cfr. loc. cit. in (1), Memoria I, pag. 109.
(3) Cfr. loc. cit. in (1), Memoria I, pag. 106, n. 2.
(4) Cfr. loc. cit. in (1), Memoria I, pag. 132, n. 27.

ossia

$$g_0 a_0^n + g_1 a_1^n + g_2 a_2^n + \dots + g_m a_m^n = \frac{g_0 a_0^n - g_{m+1} a_{m+1}^n |n}{\varepsilon_n - q d^n}, \tag{7'}$$

$$(m = 0, 1, 2, \dots;\ n = 0, 1, 2, \dots),$$

e non è contemporaneamente $d = 0$, $q = 1$. In parole: *La somma di più numeri consecutivi di una successione della forma*

$$g_0 a_0^n, \quad g_1 a_1^n, \quad g_2 a_2^n, \quad \dots, g_\mu a_\mu^n, \quad \dots,$$

dove la successione $\{a_\mu\}$ *è una progressione aritmetica di ragione* d, *la successione* $\{g_\mu\}$ *è una progressione geometrica di ragione* q *ed inoltre* n *è un intero non negativo, è uguale alla differenza fra il primo elemento e quello che segue l'ultimo divisa binomialmente* n *per la differenza* $\varepsilon_n - qd^n$ [si sottintende che non è contemporaneamente $d = 0$ e $q = 1$, caso in cui vale la (4)].

2. – Alcune osservazioni.

La formula (7') per $n = 0$ si riduce subito alla seconda delle (3).
La (7') per $g_0 = 1$, $q = 1$, $n = 1$ ci dà la nota formula

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_m = (m + 1)\,\frac{a_0 + a_m}{2} \tag{8}$$

per calcolare la somma di più numeri consecutivi in progressione aritmetica. Infatti da (7') abbiamo

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_m = \left[\frac{a_0^n - a_{m+1}^n |n}{\varepsilon_n - d^n}\right]_{n=1}. \tag{9}$$

Ma è [5]:

$$\frac{a_0^n - a_{m+1}^m |n}{\varepsilon_n - d^n} = \frac{(a_0^{n+1} - a_{m+1}^{n+1})/(n+1)\ |n}{(\varepsilon_{n+1} - d^{n+1})/(n+1)} =$$

$$= \frac{(a_0^{n+1} - a_{m+1}^{n+1})/(n+1)\ |n}{-d^{n+1}/(n+1)} = \frac{a_0^{n+1} - a_{m+1}^{n+1}}{n+1} \mathbin{\dot{:}} \left(-\frac{d^{n+1}}{n+1}\right)^{-1)^n},$$

---

[5] Cfr. loc. cit. in [1], Memoria I, pag. 127, formula (6''').

e poichè i primi due elementi delle successioni

$$\frac{a_0^{n+1} - a_{m+1}^{n+1}}{n+1}, \qquad \left(-\frac{d^{n+1}}{n+1}\right)^{-1)^n}, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

sono, rispettivamente,

$$a_0 - a_{m+1}, \quad \frac{a_0^2 - a_{m+1}^2}{2}; \qquad -\frac{1}{d}, \ \frac{1}{2},$$

si conclude

$$\left[\frac{a_0^n - a_{m+1}^n \,|^n}{\varepsilon_n - d^n}\right]_{n=1} = \frac{a_0 - a_{m+1}}{2} - \frac{a_0^2 - a_{m+1}^2}{2d} = \frac{(a_0 - a_{m+1})d + a_{m+1}^2 - a_0^2}{2d} =$$

$$= \frac{(a_{m+1} - a_0)(-d + a_{m+1} + a_0)}{2d} = \frac{a_{m+1} - a_0}{d} \, \frac{(a_{m+1} - d) + a_0}{2},$$

dove nell'ultimo membro si ha $(a_{m+1} - a_0)/d = m + 1$, $a_{m+1} - d = a_m$: pertanto la (9) coincide con la (8).

3. - Caso $q = 1$.

Per $q = 1$, e ponendo per semplicità $g_0 = 1$, la formula (7′) diviene:

$$a_0^n + a_1^n + a_2^n + \ldots + a_m^n = \frac{a_0^n - a_{m+1}^n \,|^n}{\varepsilon_n - d^n}, \tag{10}$$

$$(m = 0, 1, 2, \ldots;\ n = 0, 1, 2, \ldots),$$

ossia:

La somma di più numeri consecutivi di una successione della forma

$$a_0^n, \quad a_1^n, \quad a_2^n, \quad \ldots, \quad a_\mu^n, \quad \ldots,$$

dove la successione $\{a_\mu\}$ *è una progressione aritmetica di ragione* $d \neq 0$ *ed* n *è un intero non negativo, è uguale alla differenza fra il primo elemento e quello che segue l'ultimo divisa binomialmente* n *per la differenza* $\varepsilon_n - d^n$.

1°) È ora facile esprimere il secondo membro di (10) mediante *i numeri* B_n *di Bernoulli*, che si possono definire così [6]:

$$B_n = \frac{\varepsilon_{n-1} \,|^n}{1^n - \varepsilon_n}. \tag{11}$$

---

(6) A. MAMBRIANI, *Saggio di una nuova trattazione dei numeri e dei polinomi di Bernoulli e di Euler*, Mem. R. Accad. Italia **3**, n. 4, pp. 36 (1932); cfr. pag. 10, formula [5].

Invero abbiamo:

$$\frac{a_0^n - a_{m+1}^n}{\varepsilon_n - d^n}\Big|^{n} = \frac{a_{m+1}^n - a_0^n}{d^n - \varepsilon_n}\Big|^{n} = \frac{d\varepsilon_{n-1}}{d^n - \varepsilon_n}\Big|^{n} \overset{n}{:} \frac{a_{m+1}^n - a_0^n}{d\varepsilon_{n-1}}\Big|^{n} .$$

Ma è

$$\frac{d\varepsilon_{n-1}}{d^n - \varepsilon_n}\Big|^{n} = \frac{d^n\varepsilon_{n-1}}{d^n - \varepsilon_n}\Big|^{n} = d^n \frac{\varepsilon_{n-1}}{1^n - \varepsilon_n}\Big|^{n} = d^n B_n ,$$

e inoltre [7]

$$\frac{a_{m+1}^n - a_0^n}{d\varepsilon_{n-1}}\Big|^{n} = \frac{(a_{m+1}^{n+1} - a_0^{n+1})/(n+1)}{d\varepsilon_n/(n+1)}\Big|^{n} = \frac{a_{m+1}^{n+1} - a_0^{n+1}}{(n+1)d} ,$$

onde si ottiene

$$\frac{a_0^n - a_{m+1}^n}{\varepsilon_n - d^n}\Big|^{n} = d^n B_n \overset{n}{:} \frac{a_{m+1}^{n+1} - a_0^{n+1}}{(n+1)d} .$$

Si conclude quindi con la formula:

$$(10') \qquad a_0^n + a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n = d^n B_n \overset{n}{:} \frac{a_{m+1}^{n+1} - a_0^{n+1}}{(n+1)d} ,$$

dove i B_n sono i numeri di BERNOULLI definiti da (11).

2°) È pure facile esprimere il secondo membro di (10) mediante i numeri D_n così definiti [8]:

$$(12) \qquad D_n = \frac{2\varepsilon_{n-1}}{1^n - (-1)^n}\Big|^{n} , \qquad (n = 0, 1, 2, \dots) .$$

Invero abbiamo [9]

$$\frac{a_0^n - a_{m+1}^n}{\varepsilon_n - d^n}\Big|^{n} = \frac{a_{m+1}^n - a_0^n}{d^n - \varepsilon_n}\Big|^{n} = \frac{(a_{m+1} - d/2)^n - (a_0 - d/2)^n}{(d/2)^n - (-d/2)^n}\Big|^{n} =$$

$$= \frac{d\varepsilon_{n-1}}{(d/2)^n - (-d/2)^n} \overset{n}{:} \frac{(a_{m+1} - d/2)^n - (a_0 - d/2)^n}{d\varepsilon_{n-1}}\Big|^{n} .$$

Ma è

$$\frac{d\varepsilon_{n-1}}{(d/2)^n - (-d/2)^n}\Big|^{n} = \left(\frac{d}{2}\right)^n \frac{2\varepsilon_{n-1}}{1^n - (-1)^n}\Big|^{n} = \left(\frac{d}{2}\right)^n D_n ,$$

---

(7) Cfr. loc. cit. in (1), Memoria I, pag. 127, formula (6‴).
(8) Cfr. loc. cit. in (6), pag. 12, formula [8].
(9) Cfr. loc. cit. in (1), Memoria I, pag. 130, n. 25, β).

e inoltre [10]

$$\frac{(a_{m+1}-d/2)^n-(a_0-d/2)^n}{d\varepsilon_{n-1}}\Big|^n=\frac{(a_{m+1}-d/2)^{n+1}-(a_0-d/2)^{n+1}}{(n+1)d}\;;$$

onde si ottiene

$$\frac{a_0^n-a_{m+1}^n}{\varepsilon_n-d^n}\Big|^n=\left(\frac{d}{2}\right)^n D_n \overset{n}{:} \frac{(a_{m+1}-d/2)^{n+1}-(a_0-d/2)^{n+1}}{(n+1)d}\,.$$

Si conclude quindi con la formula:

$$(10'')\qquad a_0^n+a_1^n+a_2^n+\dots+a_m^n=\left(\frac{d}{2}\right)^n D_n \overset{n}{:} \frac{(a_{m+1}-d/2)^{n+1}-(a_0-d/2)^{n+1}}{(n+1)d}\,,$$

dove i D_n sono i numeri definiti da (12) (ed è $d\neq 0$).

4. – Caso $q\neq 1$, in particolare $q=-1$.

In questo caso nella formula (7′) il denominatore

$$\varepsilon_n-qd^n\,,\qquad\qquad (n=0,1,2,\dots),$$

della frazione binomiale al secondo membro non è inizialmente nullo. Tenendo presente la formula [11]

$$\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_n-q}\Big|^n=\sum_{r=0}^{n}\frac{q^r\Delta^r 0^n}{(1-q)^{r+1}}\,,\qquad\qquad (q\neq 1),$$

(10) Cfr. loc. cit. in (1), Memoria I, pag. 127, formula (6‴).

(11) Si ha [loc. cit. in (1), Memoria II, pag. 49, formula (51)], per $q\neq 1$,

$$\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_n-q}\Big|^n=(\varepsilon_n-q)^{-1)^n}=\sum_{r=0}^{n}\frac{[(1-q)\varepsilon_n-(\varepsilon_n-q)]^{r)^n}}{(1-q)^{r+1}}=\sum_{r=0}^{n}\frac{(-q\varepsilon_n+q)^{r)^n}}{(1-q)^{r+1}}\,,$$

ossia

$$\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_n-q}\Big|^n=\sum_{r=0}^{n}\frac{q^r(1^n-\varepsilon_n)^{r)^n}}{(1-q)^{r+1}}\,.$$

Ed essendo [loc cit. in (1), Memoria II, pag. 30, formula (4)]

$$(1^n-\varepsilon_n)^{r)^n}=\Delta^r 0^n\,,$$

si conclude con la formula

$$\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_n-q}\Big|^n=\sum_{r=0}^{n}\frac{q^r\Delta^r 0^n}{(1-q)^{r+1}}\,,\qquad\qquad (q\neq 1)\,.$$

dove i numeri $\Delta^r 0^n$, $(r = 0, 1, 2, \ldots)$, sono le note *differenze di* 0^n, segue [12]

$$d^n \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_n - q}\Big|^n = \frac{\varepsilon_n d^n}{\varepsilon_n d^n - q d^n}\Big|^n = \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_n - q d^n}\Big|^n = d^n \sum_{r=0}^{n} \frac{q^r \Delta^r 0^n}{(1-q)^{r+1}}.$$

La (7′) si scrive allora:

$$g_0 a_0^n + g_1 a_1^n + \ldots + g_m a_m^n = (g_0 a_0^n - g_{m+1} a_{m+1}^n) \overset{n}{\cdot} d^n \sum_{r=0}^{n} \frac{q^r \Delta^r 0^n}{(1-q)^{r+1}}, \tag{13}$$

dove $\{a_\mu\}$ *è una progressione aritmetica di ragione* d *e* $\{g_\mu\}$ *è una progressione geometrica di ragione* $q \neq 1$.

Ad esempio, da (13) si ottiene:

$$1 + 2\cdot 2 + 2^2\cdot 3 + 2^3\cdot 4 + \ldots + 2^m\cdot(m+1) = 1 + m 2^{m+1},$$

$$1 + 2\cdot 3 + 2^2\cdot 5 + 2^3\cdot 7 + \ldots + 2^m\cdot(2m+1) = 3 + (2m-1)2^{m+1}.$$

Nel caso particolare interessante in cui sia $q = -1$, le somme $S_{m,n}$ si possono esprimere oltre che con i numeri $\Delta^r 0^n$, come indica (13), anche [13] con i numeri

$$C_n = \frac{2\varepsilon_n}{2^n + \varepsilon_n}\Big|^n, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{14}$$

e ancora con i numeri di Eulero

$$E_n = \frac{2\varepsilon_n}{1^n + (-1)^n}\Big|^n, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{15}$$

Invero pel secondo membro di (7′), nel caso $q = -1$ e supposto $g_0 = 1$, si ha

$$\frac{g_0 a_0^n - g_{m+1} a_{m+1}^n}{\varepsilon_n - q d^n}\Big|^n = \frac{a_0^n + (-1)^m a_{m+1}^n}{\varepsilon_n - d^n}\Big|^n = \frac{(-1)^m a_{m+1}^n + a_0^n}{d^n + \varepsilon_n}\Big|^n =$$

$$= \frac{2\varepsilon_n}{d^n + \varepsilon_n}\Big|^n \overset{n}{\cdot} \frac{(-1)^m a_{m+1}^n + a_0^n}{2\varepsilon_n}\Big|^n = d^n \frac{2\varepsilon_n}{1^n + \varepsilon_n}\Big|^n \overset{n}{\cdot} \frac{(-1)^m a_{m+1}^n + a_0^n}{2},$$

onde

$$a_0^n - a_1^n + a_2^n - \ldots + (-1)^m a_m^n = d^n C_n \overset{n}{\cdot} \frac{(-1)^m a_{m+1}^n + a_0^n}{2}; \tag{16}$$

---

[12] Cfr. loc. cit. [1], Memoria I, pag. 130, n. 25, α).
[13] Cfr. loc. cit. in [6], pag. 11, formula [6], e inoltre pag. 12, formula [9].

Oppure si ha

$$\left.\frac{g_0 a_0^n - g_{m+1} a_{m+1}^n}{\varepsilon_n - q d^n}\right|^n = \left.\frac{(-1)^m a_{m+1}^n + a_0^n}{d^n + \varepsilon_n}\right|^n = \left.\frac{(-1)^m (a_{m+1} - d/2)^n + (a_0 - d/2)^n}{(d/2)^n + (-d/2)^n}\right|^n =$$

$$= \left.\frac{2\varepsilon_n}{(d/2)^n + (-d/2)^n}\right|^n \overset{n}{\cdot} \left.\frac{(-1)^m (a_{m+1} - d/2)^n + (a_0 - d/2)^n}{2\varepsilon_n}\right|^n =$$

$$= \left(\frac{d}{2}\right)^n \left.\frac{2\varepsilon_n}{1^n + (-1)^n}\right|^n \overset{n}{\cdot} \frac{(-1)^m (a_{m+1} - d/2)^n + (a_0 - d/2)^n}{2},$$

onde

$$(17) \qquad a_0^n - a_1^n + a_2^n - \ldots + (-1)^m a_m^n = \left(\frac{d}{2}\right)^n E_n \overset{n}{\cdot} \frac{(-1)^m (a_{m+1} - d/2)^n + (a_0 - d/2)^n}{2}.$$

Ad esempio, applicando (16) o (17) abbiamo:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^m m^2 = (-1)^{m+1} \frac{m(m+1)}{2},$$

$$1^2 - 3^2 + 5^2 - \ldots + (-1)^m (2m+1)^2 = (-1)^m 2(m+1)^2 - \frac{1 + (-1)^m}{2}.$$