Rivista Mat. Univ. Parma 4, 255-287 (1953)

LAMBERTO CESARI (*)

Teoremi di approssimazione per superficie. (**)

In precedenti ricerche sull'area delle superficie [3, (A), IV, VII; vedasi anche 3, (a); 3, (c)] (1), sulla trasformazione degli integrali doppi [3, (A), VIII; vedasi anche 3, (d)], e sugli integrali sopra una superficie in calcolo delle variazioni [3, (e), (f), (g), (h); vedasi anche 3, (A)], ho fatto uso di un tipo di teoremi che ho chiamato teoremi di approssimazione. Alcuni di questi teoremi hanno una forma particolarmente semplice la quale mostra che l'area di una superficie continua in forma parametrica può essere calcolata mediante operazioni di passaggio al limite [3, (A), VII]. Tali teoremi, che sono richiamati nei nn. **5**, **6**, sono usati ad esempio in [3, (A), VII] allo scopo di dimostrare l'identità delle definizioni di area di LEBESGUE, PEANO e GEÖCZE.

Nel presente lavoro, dopo aver richiamato alcuni di questi teoremi, dimostro un nuovo teorema di approssimazione (n. **9**). Tale teorema sarà usato da V. E. BONONCINI [**1**] in questioni riguardanti la continuità degli integrali lineari del calcolo delle variazioni sopra superficie chiuse.

1. – Proprietà dell'indice topologico [cfr. 3, (A), III].

Per comodità del lettore richiamo varie notazioni e teoremi. Sia E_2 il piano euclideo dei punti $p = (x, y)$ e denotiamo con $|p - p'|$, $\{I, I'\}$ le distanze di due punti $p, p' \in E_2$, o di due insiemi $I, I' \subset E_2$; onde $\{p, I\}$ denota la distanza di un punto $p \in E_2$ dall'insieme $I \subset E_2$. Sia $|I|$ la misura esterna di

(*) Professore o. della Università di Bologna. Indirizzo: Via Castiglione 1, Bologna (Italia).

(**) Ricevuto il 15-X-1953.

(1) I numeri in neretto e parentesi quadra richiamano la Bibliografia alla fine del lavoro.

un insieme $I \subset E_2$ e pertanto $|I|$ è la misura di LEBESGUE se I è misurabile. Diciamo I_ϱ, $\varrho > 0$, l'insieme di tutti i punti $p \in E_2$ con $\{p, I\} < \varrho$ (intorno di raggio ϱ di I in E_2). Pertanto $I_\varrho \supset I$ e, se I è chiuso e limitato, e perciò compatto, si ha $I_\varrho \to I$, $|I_\varrho| \to |I|$ al tendere di ϱ a zero.

Sia C: $(T, J) : p = T(t)$, $t \in J = [0 \leqslant t \leqslant 1]$, una curva continua chiusa orientata del piano E_2. Allora C è pensata come l'immagine continua del segmento $J = [0, 1]$, ove 0 ed 1 sono identificati e un senso positivo è scelto in $[0, 1]$, diciamo quello corrispondente a t crescente (dunque J è topologicamente equivalente ad una circonferenza orientata). Denotiamo con $[C]$ l'insieme compatto dei punti $p \in E_2$ ricoperti da C, con $l(C)$, $0 \leqslant l(C) \leqslant +\infty$, la lunghezza secondo JORDAN della curva C, e con $\|C, C'\|$ la distanza secondo FRÉCHET di due curve continue chiuse orientate C, C' in E_2.

Supponiamo che il piano E_2 sia orientato e che un verso positivo sia stato scelto per le rotazioni su E_2, ad esempio quello antiorario. Sia $O(p; C) \gtreqless 0$ l'indice topologico della curva C rispetto al punto $p \in E_2$ [3, (A), III] (per definizione $O(p; C) = 0$ per ogni $p \in [C]$). Allora $O(p; C)$, $p \in E_2$, pensata come una funzione di p in E_2, è nulla fuori di ogni cerchio σ ricoprente $[C]$ ed è misurabile secondo BOREL in E_2. Pertanto esiste (finito, oppure $+\infty$) l'integrale di LEBESGUE

$$v[C] = (E_2) \int |O(p; C)| , \qquad 0 \leqslant v \leqslant +\infty .$$

Qualora $O(p; C)$ sia anche integrabile secondo LEBESGUE, allora $0 \leqslant v < +\infty$, ed esiste pure l'integrale

$$u[C] = (E_2) \int O(p; C) , \qquad u \gtreqless 0 , \qquad |u| \leqslant v .$$

Ricordiamo le seguenti proposizioni:

(1.1). Se $l(C) < +\infty$, allora $|[C]| = 0$, e $O(p; C)$, $p \in E_2$, è integrabile (secondo LEBESGUE) in E_2 [cfr. 3, (A), (8.8, i)].

(1.2). Per ogni punto $p \in E_2$ con $\{p, [C]\} > \|C, C'\|$ risulta $p \in E_2 - ([C] + [C'])$ e $O(p; C) = O(p; C')$ [3, (A), (8.3, i)].

(1.3). Se $\|C_n, C\| \to 0$ al tendere all'infinito di n, allora $O(p; C) = \lim O(p; C_n)$ per ogni $p \in E_2 - [C]$; $|O(p; C)| \leqslant \underline{\lim}\, |O(p; C_n)|$ per ogni $p \in E_2$; $v[C] \leqslant \underline{\lim}\, v[C_n]$ quando $n \to \infty$ [3, (A), (8.7, i)].

(1.4). Se $\|C_n, C\| \to 0$ al tendere all'infinito di n e $l(C_n) < M$ (M costante), allora $|[C]| = |[C_n]| = 0$ per ogni n, $O(p; C) = \lim O(p; C_n)$ quasi ovunque in E_2; $v[C] = \lim v[C_n]$, $u[C] = \lim u[C_n]$ al tendere all'infinito di n, e le funzioni $O(p; C_n)$ soddisfano la condizione di completa integrabilità di VITALI [3, (A), (8.8, v)].

(1.5). Se $\|C_n, C\| \to 0$ al tendere all'infinito di n, se $O(p; C)$, $O(p; C_n)$ sono integrabili (secondo LEBESGUE) in E_2, e se $\lim u[C_n] = u[C]+\lambda$, $\lambda \gtreqless 0$, allora $\underline{\lim}\, v[C_n] \geqslant v[C] + |\lambda|$ quando $n \to \infty$ [3, (A), (8.7, ii)].

(1.6). Se π è un poligono semplice e D una suddivisione finita di π in poligoni semplici q, se $H = \pi^* + \sum q^*$, ove $\sum$ denota una qualsiasi somma estesa a tutti i poligoni $q \in D$, se (T, H) è una qualsiasi trasformazione continua di H nel piano E_2 dei punti $p = (x, y)$, se C, c sono le curve continue chiuse e orientate $C: (T, \pi^*)$, $c: (T, q^*)$ per ogni $q \in D$, allora $O(p; C) = \sum O(p; c)$ per ogni punto $p \in E_2 - T(H)$ [3, (A), (8.6, i)].

Ricordiamo infine il ben noto teorema di HILBERT:

(1.7). Se C_n, $(n = 1\,2, 3, \ldots)$, è una qualsiasi successione di curve continue, con $l(C_n) \leqslant M$ (M costante) e tutte contenute in un insieme compatto $K \subset E$, allora esiste in K una curva C di accumulazione, cioè si può determinare una successione $[n]$ di interi tali che $\|C_n, C\| \to 0$, quando $n \to \infty$ con $n \in [n]$ [cfr. 6, I, p. 87].

2. – Notazioni [cfr. 3, (A), II].

Siano E_2 il piano euclideo orientato dei punti $w = (u, v)$, E_3 lo spazio euclideo dei punti $p = (x, y, z)$ ed E_{21}, E_{22}, E_{23} i piani coordinati yz, zx, xy di E_3 con le consuete convenzioni circa l'orientamento (sinistrorso). Indichiamo con $|w - w'|$, $|p - p'|$ le distanze euclidee dei punti $w, w' \in E_2$, $p, p' \in E_3$, e sia A il quadrato unità $A = [0 \leqslant u, v \leqslant 1]$ del piano E_2. Dato un insieme $M \subset E_2$ $[M \subset E_3]$, denoteremo con M^*, $\overline{M}$, M^0 rispettivamente la frontiera di M, la chiusura di M e il sottoinsieme dei punti interni di M. Dati due insiemi M e N, M aperto in N, N chiuso, $M \subset N \subset E_2$ $[\subset E_3]$, denoteremo con $F(M) = \overline{M} - M = M^* - MM^*$ la frontiera di M in N.

Sia (T, A): $p = T(w)$, $w \in A$, una qualsiasi trasformazione continua di A in E_3. Pertanto (T, A) determina una superficie continua S di FRÉCHET e (T, A) è una rappresentazione di S. Per semplicità useremo la notazione $S = (T, A)$, o, più esplicitamente,

$$S = (T, A): \quad x = x(w), \quad y = y(w), \quad z = z(w), \quad w \in A.$$

Denoteremo con $[S] = T(A)$ l'insieme dei punti occupati da S in E_3. Diremo che S è una superficie poliedrica se esiste una rappresentazione di S, diciamo (T, A), che è continua in A e lineare in ciascun triangolo t di una conveniente suddivisione finita D di A in triangoli t, (cioè x, y, z sono funzioni lineari di u e v in ciascun triangolo $t \in D$). Diremo $a(S) = a(T, A)$ l'area elementare di una superficie poliedrica S; con $L(S) = L(A, T)$ indichiamo l'area di LEBESGUE di una qualsiasi superficie continua $S = (T, A)$ [3, (A)]. Pertanto $a(S) = L(S)$ per ogni superficie poliedrica. Diremo che S è orientata se un verso positivo (diciamo antiorario) per le rotazioni è stato scelto nel piano E_2; diremo che S è chiusa se T è costante sulla periferia A^* di A (e i punti di A^* sono identificati). Date due trasformazioni continue $S=(T, A)$, $S'= (T', A)$, poniamo $d = d(T, T', A) = \max|T(w) - T'(w)|$ per tutti i punti $w \in A$. Pertanto se $S = (T, A)$, $S_n = (T_n, A)$, $n=1, 2,...$, sono date trasformazioni piane continue (superficie continue), con $S_n \rightarrow S$ intenderemo semplicemente che $d_n = d(T_n, T, A) \rightarrow 0$, cioè $T_n \rightrightarrows T$ al tendere all'infinito di n.

3. – [Cfr. 3, (A), III, IV]. Data una trasformazione continua (T, A) di A in E_3, diciamo (T_r, A), $r = 1, 2, 3$, le trasformazioni piane proiezioni di (T, A) sui piani coordinati E_{2r} di E_3. Sia $q \subset A$ un qualsiasi poligono semplice e chiuso, sia q^* la periferia di q (orientata in senso antiorario), siano C: (T, q^*), C_r: (T_r, q^*), $r = 1, 2, 3$, le curve continue chiuse, orientate, immagini di q^* rispetto a T, T_r, siano $[C] \subset E_3$, $[C_r] \subset E_{2r}$, $r=1, 2, 3$, gli insiemi compatti dei punti occupati dalle curve C, C_r, e siano $O(p; C_r)$, $p \in E_{2r}$, gli indici topologici delle curve C_r, $r=1, 2, 3$ (considerati come funzioni di p in E_{2r} e nulli in $[C_r]$). Ciascuna funzione $O(p; C_r)$ è misurabile secondo BOREL e pertanto esistono (finiti o $+\infty$) i seguenti integrali di LEBESGUE:

$$v_r = v(q, T_r) = (E_{2r})\int |O(p; C_r)|, \quad (r = 1, 2, 3); \quad v(q, T) = (v_1^2+v_2^2+v_3^2)^{\frac{1}{2}} \geq 0 .$$

Di più, se $L(A, T) < +\infty$, allora le funzioni $O(p; C_r)$ sono tutte integrabili secondo LEBESGUE e quindi anche i numeri seguenti esistono

$$u_r = u(q, T_r) = (E_{2r})\int O(p; C_r), \quad (r = 1, 2, 3); \quad u(q, T) = (u_1^2 + u_2^2+u_3^2)^{\frac{1}{2}} \geq 0 ,$$

e si ha

$$|u_r| \leq u, \quad 0 \leq v_r \leq v, \quad |u_r| \leq v_r, \quad 0 \leq u \leq v < +\infty .$$

Se D denota un qualsiasi sistema finito di poligoni semplici chiusi e non sovrapposti $q \subset A$, poniamo

$$V(A, T_r) = \operatorname*{Sup}_{D} \sum_{q \in D} v(q, T_r), \quad (r = 1, 2, 3); \qquad V(A, T) = \operatorname*{Sup}_{D} \sum_{q \in D} v(q, T) ,$$

e, se $L(A, T) < +\infty$, anche

$$U(A, T_r) = \operatorname*{Sup}_{D} \sum_{q \in D} |u(q, T_r)|, \quad (r =1, 2, 3); \qquad U(A, T) = \operatorname*{Sup}_{D} \sum_{q \in D} u(q, T) .$$

Inoltre, per ogni punto $p \in E_{2r}$, poniamo

$$N(p;\, T_r,\, A) = \operatorname*{Sup}_{D} \sum_{q \in D} |O(p;\, C_r)|\,, \qquad (r = 1, 2, 3)\,.$$

Le funzioni $N(p;\, T_r,\, A)$ sono non negative, inferiormente semicontinue in E_{2r} e, se $L(A,\, T) < +\infty$, anche integrabili (secondo LEBESGUE) in E_{2r} [3, (A), (12.1), (12.8, ii) e (9.1)]. Porremo inoltre

$$W(A,\, T_r) = (E_{2r}) \int N(p;\, T_r,\, A)\,.$$

Vale il seguente teorema:

(3.1). Per ogni trasformazione continua $(T,\, A)$ si ha $V(A,\, T) = L(A,\, T)$, $W(A,\, T_r) = V(A,\, T_r) = L(A,\, T_r)$, $(r = 1, 2, 3)$, e, se $L(A,\, T) < +\infty$, si ha anche $U(A,\, T) = L(A,\, T)$, $U(A,\, T_r) = L(A,\, T_r)$, $(r=1, 2, 3)$ [3, (A), (12.8, ii), (12.9, iii)].

Tutte le precedenti considerazioni e, in particolare, il teorema (3.1) valgono anche se A è una qualsiasi regione poligonale R, o una regione chiusa di JORDAN di connessione finita, o qualsiasi somma M finita di regioni R o di JORDAN, disgiunte, o qualsiasi insieme aperto in E_2, o qualsiasi insieme aperto in un insieme M, ecc.. Per dettagli su tali estensioni si veda [3, (A)]. Ricordiamo in proposito il seguente teorema:

(3.2). Se H è un qualsiasi insieme chiuso $H \subset A$, se $\{\alpha\}$ indica la collezione numerabile dei componenti α dell'insieme $A - H$ aperto in A, allora $L(A,\, T) \geqslant L(A - H,\, T) = \sum L(\alpha,\, T)$, ove la somma $\sum$ è estesa a tutti gli $\alpha \in \{\alpha\}$ e, se $|T_r(H)| = 0$, $(r=1, 2, 3)$, allora $L(A,\, T) = L(A-H,\, T) = \sum L(\alpha,\, T)$ [3, (A), (21.4, i)].

Per ogni poligono semplice $\pi \subset A$ e ogni suddivisione finita D di π in poligoni semplici q, diciamo C_r: $(T_r,\, \pi^*)$, c_r: $(T_r,\, q^*)$, $r=1, 2, 3$, le curve continue chiuse immagini delle poligonali semplici π^*, q^* $(q \in D)$. Diciamo $\sum$ ogni somma estesa a tutti i poligoni $q \in D$ e sia M_r l'insieme compatto $M_r = \sum T_r(q^*) = T_r(\sum q^*) \subset E_{2r}$. Allora, da (1.6), si ha $O(p;\, C_r) = \sum O(p;\, c_r)$ per ogni punto $p \in E_{2r} - M_r$, $r=1, 2, 3$. In particolare per ogni trasformazione poliedrica $S = (T,\, A)$ gli insiemi M_r hanno misura nulla in E_{2r}, e quindi le relazioni $O(p;\, C_r) = \sum O(p;\, c_r)$, $|O(p;\, C_r)| \leqslant \sum |O(p;\, c_r)|$ valgono quasi dappertutto in E_{2r}. Per integrazione in E_{2r} si ricava allora $u(\pi,\, T_r) = \sum u(q,\, T_r)$, $|u(\pi,\, T_r)| \leqslant \sum |u(q,\, T_r)|$, $v(\pi,\, T_r) \leqslant \sum v(q,\, T_r)$, $r = 1, 2, 3$. Si dimostra facilmente che si ha anche $u(\pi,\, T) \leqslant \sum u(q,\, T)$, $v(\pi,\, T) \leqslant \sum v(q,\, T)$ per ogni suddivisione D di A e ogni trasformazione poliedrica $(T,\, A)$. Ricordiamo ancora che un insieme $K \subset E_2$ (o in ogni E_N), si dice un continuo se compatto e connesso (cioè chiuso, limitato e concatenato). Data una successione I_n, $n=1, 2,\ldots,$ di insiemi I_n contenuti in un dato insieme compatto $K \subset E_2$ diremo $I' = \lim\inf I_n$ $[I'' = \lim\sup I_n]$ l'insieme I' $[I'']$ di tutti i punti $p \in E_2$ che hanno la seguente proprietà: per ogni intorno U di p si ha $UI_n \neq 0$ per tutti gli n abbastanza grandi [per infiniti valori dell'indice n] [cfr. **7**, p. 10]. Pertanto $I' \subset I'' \subset K \subset E_2$. Vale la seguente proposizione:

(3.3). Se gli insiemi I_n contenuti nell'insieme compatto K sono continui e $I' \neq 0$, allora I'' è un continuo.

4. – [Cfr. **3**, (A), (9.15)]. Sia (T, A) una trasformazione continua di A in E_3 con $L(A, T) < +\infty$. Sia $R \subset A$ una regione poligonale chiusa $R = r_0 - (r_1 + \ldots + r_\nu)$, ove $r_0, r_1, \ldots, r_\nu$, $0 \leqslant \nu < +\infty$, sono poligoni semplici, $(r_0)^0 \supset r_i$, $\bar{r}_i \bar{r}_j = 0$, $(i, j = 1, 2, \ldots, \nu)$. Indichiamo R con la notazione più semplice $R = (r_0, r_1, \ldots, r_\nu)$ e la frontiera di R con $R^* = (r_0^*, r_1^*, \ldots, r_\nu^*)$. Siano $C_i = (T, r_i^*)$, $C_{ir} = (T_r, r_i^*)$, $(r = 1,2,3;\ i = 0,1,\ldots,\nu)$, le curve continue orientate e chiuse immagini di r_i^* rispetto a T e T_r, ove r_0^* è orientata in senso antiorario e r_i^*, $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$ in senso orario. Sia $M_r \subset E_{2r}$ l'insieme compatto $M_r = \sum^* [C_{ir}]$, ove $\sum^*$ denota una qualsiasi somma estesa a tutti i valori di $i = 0, 1, 2, \ldots, \nu$, ossia a tutti i componenti r_i^* di R^*. Diciamo $\varphi(p; R, T_r)$, $p \in E_{2r}$, la funzione così definita: $\varphi(p; R, T_r) = 0$ se $p \in M_r$, $\varphi(p; R, T_r) = \sum^* O(p; C_r)$ se $p \in E_{2r} - M_r$. La funzione φ è misurabile secondo Borel in E_{2r} e, essendo $L(A, T) < +\infty$, anche L-integrabile in E_{2r}. Pertanto sono finiti i numeri seguenti:

$$\begin{aligned}
u_{*r} &= u_*(R, T_r) = (E_{2r}) \int \varphi(p; R, T_r), \qquad (r = 1,2,3)\,, \\
u_* &= u_*(R, T) = (u_{*1}^2 + u_{*2}^2 + u_{*3}^2)^{\frac{1}{2}} \geqslant 0; \\
v_{*r} &= v_*(R, T_r) = (E_{2r}) \int |\varphi(p; R, T_r)|, \quad (r = 1, 2, 3), \\
v_* &= v_*(R, T) = (v_{*1}^2 + v_{*2}^2 + v_{*3}^2)^{\frac{1}{2}} \geqslant 0\,,
\end{aligned}$$

e si ha

$$|u_{*r}| \leqslant u_*\,, \qquad 0 \leqslant v_{*r} \leqslant v_*\,, \qquad |u_{*r}| \leqslant v_{*r}\,, \qquad 0 \leqslant u_* \leqslant v_*\,.$$

Di più i numeri v_{*r}, v_* esistono (finiti o $+\infty$) anche se $L(A, T) = +\infty$. Se $\nu = 0$ le funzioni u_{*r}, u_*, v_{*r}, v_* si riducono alle funzioni u_r, u, v_r, v del n. **3**.

Se D denota un qualsiasi sistema finito di regioni poligonali chiuse e non sovrapposte $R \subset A$, poniamo

$$U_*(A, T_r) = \operatorname*{Sup}_{D} \sum_{R \in D} |u_*(R, T_r)|\,, \quad (r = 1, 2, 3)\,; \quad U_*(A, T) = \operatorname*{Sup}_{D} \sum_{R \in D} u_*(R, T),$$

$$V_*(A, T_r) = \operatorname*{Sup}_{D} \sum_{R \in D} v_*(R, T_r), \qquad (r = 1, 2, 3)\,; \quad V_*(A, T) = \operatorname*{Sup}_{D} \sum_{R \in D} v_*(R, T),$$

e, per ogni punto $p \in E_{2r}$, anche

$$N_*(p;\, T_r, A) = \operatorname*{Sup}_{D} \sum_{R \in D} |\varphi(p;\, R,\, T)|\,, \qquad (r = 1, 2, 3)\,.$$

Le funzioni $N_*(p;\, A,\, T_r)$, $p \in E_{2r}$, sono non negative, inferiormente semicontinue in E_{2r}, e, essendo $L(A, T) < +\infty$, anche integrabili secondo LEBESGUE. Poniamo

$$W_*(A,\, T_r) = (E_{2r}) \int N_*(p;\, A,\, T_r)\,.$$

Ovviamente risulta

$$U(A,\, T_r) \leqslant U_*(A,\, T_r)\,, \qquad V(A,\, T_r) \leqslant V_*(A,\, T_r)\,,$$

$$W(A,\, T_r) \leqslant W_*(A,\, T_r)\,, \qquad N(p;\, A,\, T_r) \leqslant N_*(p;\, A,\, T_r)$$

per ogni $p \in E_{2r}$, $(r=1, 2, 3)$, e anche $U(A,\, T) \leqslant U_*(A,\, T)$, $V(A,\, T) \leqslant V_*(A,\, T)$. Tuttavia il seguente risultato è ben noto [cfr. **3**, (A), (12.15, iv e v)]:

(4.1). Per ogni trasformazione continua (T, A) si ha $N(p;\, T_r, A) = N_*(p;\, T_r, A)$ per tutti i punti $p \in E_{2r}$ ad eccezione al più di un insieme numerabile, e inoltre $W(A,\, T_r) = V_*(A,\, T_r) = L(A,\, T_r) = W_*(A,\, T_r) = V(A,\, T_r)$, $(r = 1, 2, 3)$; $V_*(A,\, T) = L(A,\, T) = V(A,\, T)$. Finalmente, se $L(A,\, T) < +\infty$, si ha pure $V_*(A,\, T_r) = L(A,\, T_r) = V(A,\, T_r)$, $(r = 1, 2, 3)$; $U_*(A,\, T) = L(A,\, T) = U(A,\, T)$.

Come nel n. **3** valgono le stesse estensioni al caso in cui A è una regione poligonale chiusa o una regione di JORDAN chiusa, semplice o no, o un insieme aperto.

Per ogni regione poligonale $\pi \subset A$ e ogni suddivisione finita D di π in regioni poligonali q, diciamo $\sum$ ogni somma estesa a tutte le regioni $q \in D$, e M_r l'insieme compatto $M_r = \sum T_r(q^*) = T_r(\sum q^*) \subset E_{2r}$, $(r = 1, 2, 3)$. Allora, da (1.6) e dalla definizione della funzione φ si ha facilmente $\varphi(p;\, \pi,\, T_r) = \sum \varphi(p;\, q,\, T_r)$ per ogni punto $p \in E_{2r} - M_r$, $(r = 1, 2, 3)$. In particolare per ogni trasformazione poliedrica (T, A) si ha $|M_r| = 0$, $(r = 1, 2, 3)$, e le relazioni $\varphi(p;\, \pi,\, T_r) = \sum \varphi(p;\, q,\, T_r)$, $|\varphi(p;\, \pi,\, T_r)| \leqslant \sum |\varphi(p;\, q,\, T_r)|$ valgono quasi dappertutto. Per integrazione in E_2 si ha pertanto $u_*(\pi,\, T_r) = \sum u_*(q,\, T_r)$, $|u_*(\pi,\, T_r)| \leqslant \sum |u_*(q,\, T_r)|$, $v_*(\pi,\, T_r) \leqslant \sum v_*(q,\, T_r)$, $(r = 1, 2, 3)$. Avremo occasione di applicare la prima di queste relazioni (n. **15**). Anche qui, come nel n. **3**, si ha $u_*(\pi,\, T) \leqslant \sum u_*(q,\, T)$, $v_*(\pi,\, T) \leqslant \sum v_*(q,\, T)$ per ogni D e per ogni trasformazione poliedrica (T, A).

5. – Indici d, m, σ e richiamo di un primo teorema di approssimazione.

Sia (T, A) una trasformazione continua di A in E_3. Sia $D = D' + D''$ una suddivisione finita del quadrato A in poligoni semplici $q \in D'$ e in regioni poligonali $R \in D''$, $R = (r_0, r_1, \ldots, r_\nu)$. Poniamo ora $d = \max \operatorname{diam} [T(q), T(R)]$ per tutti i $q \in D'$, $R \in D''$; diciamo $\sum'$ ogni somma estesa a tutti i poligoni $q \in D'$ che sono completamente interni ad A, cioè $q \subset A^0$; diciamo $\sum''$ ogni somma estesa a tutte le regioni poligonali $R \in D''$ e, per ogni $R \in D''$, diciamo $\sum^*$ qualsiasi somma estesa a tutti i componenti r_i^*, $(i = 0, 1, \ldots, \nu)$, della frontiera $R^* = (r_0^*, r_1^*, \ldots, r_\nu^*)$ di R. Sia $M_r \subset E_{2r}$ l'insieme $M_r = \sum' T_r(q^*) = T_r(\sum' q^*) \subset E_{2r}$; poniamo $m = \max |M_r|$, $(r = 1, 2, 3)$, e inoltre $\sigma = \sum'' \sum^* \operatorname{diam} T(r_i^*)$. Diciamo $d \geqslant 0$, $m \geqslant 0$, $\sigma \geqslant 0$ gli *indici* della suddivisione $D = D' + D''$ di A. Valgono i seguenti teoremi di approssimazione:

(5.1). Per ogni trasformazione continua (T, A) e per ogni $\varepsilon > 0$ arbitrario, esistono suddivisioni $D = D' + D''$ di A aventi indici d, m, $\sigma < \varepsilon$ [**3**, (A), (21.1, i)].

(5.2). Se (T, A) è una qualsiasi trasformazione continua e $D_n = D_n' + D_n''$, $n = 1, 2, \ldots$, una successione di suddivisioni di A aventi indici d_n, m_n, $\sigma_n \to 0$ al tendere all'infinito di n, allora

$$\lim_{n\to\infty} \sum' v(q, T) = V(A, T), \quad \lim_{n\to\infty} \sum' v(q, T_r) = V(A, T_r), \quad (r = 1, 2, 3),$$

e, se $L(A, T) < +\infty$, si ha anche

$$\lim_{n\to\infty} \sum' u(q, T) = U(A, T), \quad \lim_{n\to\infty} \sum' |u(q, T_r)| = U(A, T_r), \quad (r = 1, 2, 3),$$

[**3**, (A), (21.2, i), (21.3, i)].

Qualora $|T_r(A^*)| = 0$, $(r = 1, 2, 3)$, allora nella definizione degli insiemi M_r la somma $\sum'$ può essere estesa a tutti i poligoni $q \in D'$ (e non solo a quelli con $q \subset A^0$) e il teorema (5.1) vale ancora. Se $|T_r(A^*)| = 0$ solo per un qualche valore di r, $(r = 1, 2, 3)$, allora analoghe modificazioni alla definizione di M_r possono farsi per gli stessi valori di r e il teorema (5.1) vale ancora. Nel teorema (5.2) si può sempre estendere $\sum'$ a tutti i poligoni $q \in D_n'$.

Teoremi analoghi a (5.2), che non occorrono nel presente studio, valgono circa la approssimazione della funzione $N(p; T_r, A)$ [vedi **3**, (A), anche per altre funzioni N^+, N^-, n analoghe alla N]. Ricordiamo invece il seguente lemma (5.3), di natura più elementare, che ci occorre nel seguito.

Sia $L(A, T) < \infty$. Sia D un qualunque sistema finito di poligoni, semplici, non sovrapposti, $q \subset A$ e sia μ_r la differenza, non negativa, $\mu_r = U(A, T_r) - \sum |u(q, T_r)|$, ove $\sum$ denota ogni somma estesa a tutti i poligoni $q \in D$. Sia C_r la curva continua C_r: (T_r, A^*) e, per ogni $q \in D$, sia c_r la curva c_r: (T_r, q^*).

(5.3). Esiste un insieme $B_r \subset E_{2r}$, misurabile secondo BOREL, tale che $|B_r| \leqslant \mu_r$ e $O(p; C_r) = \sum O(p; c_r)$ per ogni punto $p \in E_{2r} - ([C_r] + [B_r])$, [**3**, (A), (12.12, i), (12.13, i)].

6. – Indici d_*, m_* e relativi teoremi di approssimazione.

Sia ancora (T, A) una qualsiasi trasformazione di A in E_3 e sia D_* una suddivisione finita di A in regioni poligonali (di indici $0 \leqslant \nu < +\infty$). Denotiamo con $\sum'$ una qualsiasi somma estesa a tutte le regioni poligonali $R \in D$ che sono completamente interne ad A, $R \subset A^0$, e sia $M_{*r} \subset E_{2r}$ l'insieme $M_{*r} = \sum' T_r(R^*) = T_r(\sum' R^*) \subset E_{2r}$. Poniamo $d_* = \max \operatorname{diam} T(R)$ per tutti gli $R \in D$, e $m_* = \max |M_{*r}|$, $(r = 1, 2, 3)$. Diremo $d_* \geqslant 0$, $m_* \geqslant 0$ gli indici della suddivisione D_*. Valgono i seguenti teoremi di approssimazione [**3**, (A), (21.2, Nota 2)].

(6.1). Per ogni trasformazione continua (T, A) e per $\varepsilon > 0$ arbitrario, esistono suddivisioni D_* di A di indici d_*, $m_* < \varepsilon$.

(6.2). Se (T, A) è una qualsiasi trasformazione continua e D_{*n}, $n = 1, 2, \ldots$, una successione di suddivisioni di A di indici d_{*n}, $m_{*n} \to 0$ al tendere all'infinito di n, allora

$$\lim_{n\to\infty} \sum' v_*(R, T) = V_*(A, T), \qquad \lim_{n\to\infty} \sum' v_*(R, T_r) = V_*(A, T_r), \qquad (r = 1, 2, 3),$$

e, se $L(A, T) < +\infty$, si ha anche

$$\lim_{n\to\infty} \sum' u_*(R, T) = U_*(A, T), \qquad \lim_{n\to\infty} \sum' |u_*(R, T_r)| = U_*(A, T_r), \qquad (r = 1, 2, 3).$$

Qualora $|T_r(A^*)| = 0$, $(r = 1, 2, 3)$, allora nella definizione degli insiemi M_r la somma $\sum'$ può essere estesa a tutte le regioni $R \in D_*$ (e non solo a quelle con $R \subset A^0$) e il teorema (6.1) vale ancora. Se $|T_r(A^*)| = 0$ solo per qualche valore di r, $(r = 1, 2, 3)$, allora analoghe modificazioni alla definizione di M_r possono farsi per gli stessi valori di r e il teorema (6.1) sussiste ancora. Nel teorema (6.2) si può sempre estendere $\sum'$ a tutte le regioni $R \in D_{*n}$.

Infine richiamiamo il seguente lemma analogo a (5.3) e la cui dimostrazione è identica. Sia Q una qualunque regione poligonale e D un qualunque sistema finito di regioni poligonali non sovrapposte $R \subset Q \subset A$, e sia μ_r la differenza non negativa $\mu_r = U_*(A, T_r) - \sum |u_*(R, T_r)|$, ove $\sum$ denota ogni somma estesa a tutte le regioni $R \in D$.

(6.3). Esiste un insieme $B_r \subset E_{2r}$ misurabile secondo BOREL tale che $|B_r| \leqslant \mu_r$ e $\varphi(p; Q, T_r) = \sum \varphi(p; R, T_r)$ per ogni punto $p \in E_{2r} - ([C_r] + [B_r])$.

7. – Un secondo tipo di teoremi di approssimazione.

Ricordiamo anzitutto la seguente proposizione:

(7.1). Se (T, A), (T_n, A), $(n = 1, 2, \ldots)$, sono trasformazioni continue qualsiansi di A in E_3 e (T_r, A), (T_{nr}, A), $(r = 1, 2, 3)$, sono le relative trasformazioni piane, se $L(A, T) < +\infty$, $L(A, T_n) < +\infty$ e $L(A_n, T) \to L(A, T)$ $d(T_n, T, A) \to 0$ al tendere all'infinito di n, allora si ha anche $L(A, T_{nr}) \to$ $\to L(A, T_r)$, $(r = 1, 2, 3)$. Pertanto, tenendo presente (3.1), si ha pure $W(A, T_{nr}) \to W(A, T_r)$, $V(A, T_{nr}) \to V(A, T_r)$, $(r = 1, 2, 3)$. Inoltre le successioni di funzioni integrabili $N(p; T_{nr}, A)$, $p \in E_{2r}$, $(n = 1, 2, \ldots;\ r = 1, 2, 3)$, soddisfano la condizione di VITALI di completa integrabilità [cfr. **3**, (A), (9.9, i), (24.3, i), (12.11, iii e Nota)].

Vale ora il seguente teorema di approssimazione:

(7.2). Sia (T, A) una qualsiasi trasformazione continua di A in E_3 con $L(A, T) < +\infty$, e sia (P_t, A), $(t = 1, 2, \ldots)$, una successione di trasformazioni poliedriche con $d(P_t, T, A) \to 0$, $a(P_t, A) \to L(A, T)$ al tendere all'infinito di t. Sia $D_n = D'_n + D''_n$, $(n = 1, 2, \ldots)$, una successione di suddivisioni di A i cui indici, rispetto a (T, A), d_n, m_n, σ_n tendono a zero al tendere all'infinito di n (n. **5**). Allora per ogni n esiste un altro intero $t(n)$ tale che, qualunque sia $t \geqslant t(n)$, risulta

$$\lim_{n \to \infty} \sum' |u(q, P_{tr})| = U(A, T_r), \quad (r = 1, 2, 3); \qquad \lim_{n \to \infty} \sum' u(q, P_t) = U(A, T),$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum' |u(q, P_{tr}) - u(q, T_r)| = 0, \quad (r = 1, 2, 3); \quad \lim_{n \to \infty} \sum' |u(q, P_t) - u(q, T)| = 0,$$

uniformemente rispetto a $t \geqslant t(n)$.

Le relazioni relative alle trasformazioni piane P_{tr}, $(r = 1, 2, 3)$, sono state dimostrate in [**3**, (A), (22.1, ii)]; le relazioni relative alle trasformazioni P_t seguono dal fatto che $\sum' u(q, T) \to U(A, T)$ al tendere all'infinito di n (5.2) e dalle seguenti ovvie diseguaglianze:

$$\sum' |u(q, P_t) - u(q, T)| = \sum' |[\sum_r u^2(q, P_{tr})]^{\frac{1}{2}} - [\sum_r u^2(q, T_r)]^{\frac{1}{2}}| \leq$$
$$\leq \sum_r \sum' |u(q, P_{tr}) - u(q, T_r)|,$$

$$\sum' u(q, P_t) \geq \sum' u(q, T) - \sum' |u(q, P_t) - u(q, T)|.$$

Pertanto (7.2) è provata.

Se la condizione $a(P_t, A) \to L(A, T)$ viene sostituita dalla condizione più debole $a(P_t, A) < M$ per ogni t, vale allora il seguente teorema di approssimazione:

(7.3). Sia (T, A) una qualsiasi trasformazione continua di A in E_3 con $L(A, T) < +\infty$, e sia (P_t, A), $(t=1, 2, ...,)$, una successione di trasformazioni poliedriche con $d(P_t, T, A) \to 0$, $a(P_t, A) < M$, (M costante). Sia $D_n = D'_n + D''_n$, $(n=1, 2, ...)$, una successione di suddivisioni di A i cui indici, rispetto a (T, A), d_n, m_n, σ_n tendono a zero al tendere all'infinito di n (n. **5**). Allora esistono due successioni $[t_k]$, $[n_k]$ di interi tali che $t_k \to \infty$, $n_k \to \infty$ e

$$\varliminf_{k\to\infty} \sum' u(q, P_{t_k}) \geq U(A, T), \qquad \varliminf_{k\to\infty} \sum' |u(q, P_{t_k r})| \geq U(A, T_r), \qquad (r=1, 2, 3),$$

$$\varliminf_{k\to\infty} \sum' v(q, P_{t_k}) \geq V(A, T), \qquad \varliminf_{k\to\infty} \sum' v(q, P_{t_k r}) \geq V(A, T_r), \qquad (r=1, 2, 3),$$

ove $\sum'$ è estesa a tutti i poligoni $q \in D'_{n_k}$ con $q \subset A^0$ [3, (A), (22.2, i)]. Se $|T_r(A^*)| = 0$ per tutti gli $r=1, 2, 3$, oppure solo per un qualche $r=1, 2, 3$, allora valgono le stesse osservazioni come nel n. **5**.

8. – Alcune proposizioni preliminari.

Sia $R = (r_0, r_1, ..., r_\nu) \subset E_2$, $0 \leq \nu < +\infty$, una qualsiasi regione poligonale chiusa del piano E_2 di punti $w = (u, v)$, sia $R^* = (r_0^*, r_1^*, ..., r_\nu^*)$ la sua frontiera, sia (T, R^*) una qualsiasi trasformazione continua piana di R^* in un altro piano E'_2 di punti $p = (x, y)$ e siano C_i le curve continue chiuse orientate $C_i = (T, r_i^*)$, $(i = 0, 1, ..., \nu)$. Pertanto $M = T(R^*) = \sum^* [C_i]$, ove $\sum^*$ è estesa a tutti gli $i = 0, 1, ..., \nu$, e la funzione $\varphi(p; R, T)$ è definita come nel n. **4** ponendo $\varphi = 0$ se $p \in M$, $\varphi = \sum O(p; C_i)$ se $p \in E'_2 - M$. Sia $u_*(R, T) = (E'_2) \int \varphi(p; R, T)$, $v_*(R, T) = (E'_2) \int |\varphi(p; R, T)|$, ove supponiamo esplicitamente che la funzione φ sia integrabile secondo LEBESGUE in E'_2. Sia (T_n, R^*) una successione di trasformazioni continue di R^* in E'_2 tali che, se $d_n = d(T_n, T, R^*) = \max |T_n(w) - T(w)|$ per tutti i $w \in R^*$, risulti $d_n \to 0$ al tendere all'infinito di n. Per ogni n siano C_{ni}: (T_n, r_i^*) le curve continue chiuse orientate immagini di r_i^* rispetto a T_n, siano $\varphi_n(p; R, T_n)$ le relative funzioni φ che supporremo tutte integrabili secondo LEBESGUE in E_2' e $u_*(R, T_n)$, $v_*(R, T_n)$ le corrispondenti funzioni u_*, v_*.

(8.1). Se $\lim u_*(R, T_n) = u_*(R, T) + \lambda$, $\lambda \gtreqless 0$, al tendere di n all'infinito, allora $\varliminf v_*(R, T_n) \geqslant v_*(R, T) + |\lambda|$.

Osservazione. Questa proposizione si riduce alla proposizione (1.5) se R è una regione poligonale semplice ($\nu = 0$). La dimostrazione è analoga e viene riferita nelle righe seguenti per comodità del lettore.

Dimostrazione di (8.1).

Sia $\Delta_n = u_*(R, T_n) - u_*(R, T)$, $\Delta_n' = v_*(R, T_n) - v_*(R, T)$, $(n=1, 2, ...)$. Poichè la funzione $\varphi(p; R, T)$ è integrabile in E_2', preso ad arbitrio un numero $\varepsilon > 0$ si può trovare un altro numero $\sigma > 0$ tale che, per ogni insieme misurabile $h \subset E_2'$, $|h| < \sigma$, risulta $(h)\int |\varphi(p; R, T)| < \varepsilon/2$. L'insieme $M = T(R^*)$ è compatto onde per ogni $\varrho > 0$ si ha $M \subset M_\varrho$ (n. **1**) e inoltre $M_\varrho \to M$, $|M_\varrho| \to |M|$ al tendere di ϱ a zero. Esiste pertanto un numero $\varrho > 0$ tale che $|M_\varrho| < |M| + \sigma$. Sia $\bar{n}$ il più piccolo intero tale che $d(T_n, T, A) < \varrho$ per tutti gli $n \geqslant \bar{n}$. Per ogni $p \in E_2' - M_\varrho$ risulta ora $\{p, M\} \geqslant \varrho$ onde $\{p, [C_i]\} \geqslant \varrho$, $(i = 0, 1, ..., \nu)$, e quindi, in virtù della (1.2), anche $p \in E_2' - [C_i] - [C_{ni}]$. Dunque $p \in E_2' - \sum^* [C_i] - \sum^* [C_{ni}]$, ossia $p \in E_2' - T(R^*) - T_n(R^*)$ e, sempre dalla (1.2), anche $O(p; C_i) = O(p; C_{ni})$, $(i = 0, 1, 2, ..., \nu)$. In definitiva abbiamo $\varphi(p; R, T) = \varphi(p; R, T_n)$ per ogni $p \in E_2' - M_\varrho$ e $n \geqslant \bar{n}$. Si ha poi $\varphi(p; R, T) = 0$ per ogni $p \in M$. In conseguenza si ha successivamente:

$$\begin{aligned}
|\Delta_n| &= |(E_2')\int \varphi(p; R, T_n) - (E_2')\int \varphi(p; R, T)| = \\
&= |(M_\varrho)\int \varphi(p; R, T_n) - (M_\varrho)\int \varphi(p; R, T)| \leqslant \\
&\leqslant (M_\varrho)\int |\varphi(p; R, T_n)| + (M_\varrho)\int |\varphi(p; R, T)| = \\
&= (M_\varrho)\int |\varphi(p; R, T_n)| - (M_\varrho)\int |\varphi(p; R, T)| + 2(M_\varrho)\int |\varphi(p; R, T)| = \\
&= [(E_2')\int |\varphi(p; R, T_n)| - (E_2')\int |\varphi(p; R, T)|] + 2(M_\varrho - M)\int |\varphi(p; R, T)|,
\end{aligned}$$

$$|\Delta_n| \leqslant \Delta_n' + 2(M_\varrho - M)\int |\varphi(p; R, T)|,$$

dove l'ultimo termine è $< \varepsilon$ e $|\Delta_n| \to |\lambda|$ al tendere all'infinito di n. Pertanto $\varliminf \Delta_n' \geqslant |\lambda| - \varepsilon$ e, poichè ε è arbitrario, risulta anche $\varliminf \Delta_n' \geqslant \lambda$. La proposizione (8.1) è quindi dimostrata.

Sia ora R definita come sopra e (T, R) una qualsiasi trasformazione continua piana di R in E_2'. Sia (T_n, R), $(n = 1, 2, ...)$, una successione di trasformazioni poliedriche piane tali che $d_n = d(T_n, T, R) \to 0$ al tendere di n

all'infinito, ove $d(T_n, T, R) = \max|T_n(w) - T(w)|$ per tutti i $w \in R$. Come sopra sia $M = \sum^* T(r_i^*) = T(R^*)$, sia $\varepsilon > 0$ un numero arbitrario, sia M_ε l'insieme di tutti i punti $p \in E_2'$ aventi una distanza $< \varepsilon$ da M. Sia ora D una qualsiasi suddivisione finita di R in regioni poligonali q (semplici o non semplici) tali che $\max \operatorname{diam} T(q) < \varepsilon/3$, sia D' il sistema finito di regioni $q \in D$ con $T(q)[E_2' - M_\varepsilon] \neq 0$, e sia $D'' = D - D'$. Denotiamo con $\sum'$, $\sum''$ somme qualsiasi estese a tutte le regioni $q \in D'$, oppure $q \in D''$, rispettivamente.

(8.2). Se $\underline{\lim}\, v_*(R, T_n) \geqslant v_*(R, T) + \lambda$, $\lambda \geqslant 0$, allora $\underline{\lim} \sum'' v_*(q, T_n) \geqslant \lambda$.

Osservazione. Se R e tutti i poligoni $q \in D$ sono semplici, allora (8.2) si riduce ad una proposizione precedentemente dimostrata [**3**, (A), (22.1, i)]. La dimostrazione è analoga e viene riferita per comodità del lettore.

Dimostrazione di (8.2).

Ovviamente si ha $T(q) \subset E_2' - M_{2\varepsilon/3}$ per ogni $q \in D'$ e $T(q) \subset M_\varepsilon$ per ogni $q \in D''$. Supponiamo che la tesi di (8.2) non sia vera. Allora esiste un $\sigma > 0$ tale che

$$\sum'' v_*(q, T_n) < \lambda - \sigma, \tag{1}$$

per infiniti n. Diciamo $\bar{n}$ il più piccolo intero tale che $d_n < \varepsilon/3$ per tutti gli $n \geqslant \bar{n}$, e siano C_i, C_{in} le curve $C_i = (T, r_i^*)$, $C_{in} = (T_n, r_i^*)$, $(i = 0, 1, 2, \ldots, \nu)$, immagini delle poligonali semplici r_i^* costituenti la frontiera di R. Per ogni $p \in E_2' - M_{\varepsilon/3}$ si ha $\{p, [C_i]\} \geqslant \{p, M\} \geqslant \varepsilon/3$, e quindi, in forza di (1.2), $p \in E_2' - [C_i] - [C_{in}]$, $(i = 0, 1, 2, \ldots, \nu)$, $p \in E_2' - \sum^* [C_i] - \sum^* [C_{in}]$, $p \in E_2' - T(R^*) - T_n(R^*)$, e anche $O(p; C_i) = O(p; C_{in})$, $(i = 0, 1, 2, \ldots, \nu)$. Pertanto $\varphi(p; R, T) = \varphi(p; R, T_n)$ per ogni $p \in E_2' - M_{\varepsilon/3}$ e $n \geqslant \bar{n}$. Se diciamo I_n l'insieme $I_n = T_n(R^*)$ si ha $|I_n| = 0$, essendo T_n una trasformazione poliedrica, e, d'altra parte, dall'osservazione alla fine del n. **4**, anche

$$\varphi(p; R, T_n) = \sum \varphi(p; q, T_n) \tag{2}$$

per ogni n e $p \in E_2' - I_n$.

Si ha ora

$$\begin{aligned} v_*(R, T_n) &= (E_2') \int |\varphi(p; R, T_n)| = \\ &= [(E_2' - M_{\varepsilon/3}) + M_{\varepsilon/3}] \int |\varphi(p; R, T_n)| = J_1 + J_2 \end{aligned} \tag{3}$$

e ovviamente si ha anche

$$\begin{aligned} J_1 = (E_2' - M_{\varepsilon/3}) \int |\varphi(p; R, T_n)| &= (E_2' - M_{\varepsilon/3}) \int |\varphi(p; R, T)| \leqslant \\ &\leqslant (E_2') \int |\varphi(p; R, T)| = v_*(R, T) . \end{aligned} \tag{4}$$

Per ogni $q \in D'$ l'insieme $T(q)$ è contenuto in un cerchio Γ avente il centro in un punto $\bar{p}$ di $E_2' - M_\varepsilon$ e di raggio $\varepsilon/3$, onde $T_n(q)$ è contenuto in un cerchio Γ' avente il centro in $\bar{p}$ e di raggio $2\varepsilon/3$. Pertanto $\Gamma' \subset E_2' - M_{\varepsilon/3}$ e, in conseguenza, $\varphi(p; q, T_n) = 0$ per ogni punto fuori di Γ, in particolare per ogni punto $p \in M_{\varepsilon/3}$, ove q è una qualsiasi regione $q \in D'$. Abbiamo allora, utilizzando la (2) e l'ultima osservazione,

$$\begin{aligned} J_2 &= (M_{\varepsilon/3}) \int |\varphi(p; R, T_n)| \leqslant \sum (M_{\varepsilon/3}) \int |\varphi(p; q, T_n)| = \\ &= \sum{}'' (M_{\varepsilon/3}) \int |\varphi(p; q, T_n)| \leqslant \sum{}'' (E_2') \int |\varphi(p; q, T_n)| = \\ &= \sum{}'' v_*(q, T_n) . \end{aligned}$$

In virtù della (1) abbiamo pertanto $J_2 \leqslant \lambda - \sigma$ per infiniti n e, dalle (3) e (4), anche

$$v_*(R, T_n) = J_1 + J_2 \leqslant v_*(R, T) + \lambda - \sigma , \qquad \sigma > 0 ,$$

per infiniti n. Si ha quindi

$$\underline{\lim}\, v_*(R, T_n) \leqslant v_*(R, T) + \lambda - \sigma , \qquad \sigma > 0 ,$$

ove $\underline{\lim}$ è preso al tendere all'infinito di n per tutti i valori $n=1, 2, \ldots$. Poichè lo stesso $\underline{\lim}$ è $\geqslant v_*(R, T) + \lambda$, si è ottenuta una contraddizione. Pertanto (8.2) risulta provata.

9. – Enunciato di un nuovo teorema di approssimazione.

Sia $S = (T, A) : p = p(w)$, $w \in A$, una trasformazione continua del quadrato A in E_3 e sia $S_n = (T_n, A) : p = p_n(w)$, $w \in A$, $(n = 1, 2, \ldots)$, una successione di trasformazioni continue di A in E_3, con $d_n = d(T_n, T, A) \to 0$ al tendere di n all'infinito. Siano (T_r, A), (T_{nr}, A), $(r = 1, 2, 3)$, le trasformazioni piane proiezioni di T_n, T_{nr} sui piani coordinati E_{2r}, $(r = 1, 2, 3)$, di E_3. Siano $C : (T, A^*)$, $C_r : (T_r, A^*)$, $C_n : (T_n, A^*)$, $C_{nr} : (T_{nr}, A^*)$ le curve continue chiuse orientate immagini di A^* rispetto a T, T_r, T_n, T_{nr}. Pertanto $\|C_{nr}, C_r\| \leqslant \|C_n, C\| \leqslant d_n$, $(n=1, 2, \ldots)$, e $\|C_{nr}, C_r\| \to 0$, $\|C_n, C\| \to 0$ al tendere di n all'infinito, $r=1, 2, 3$.

Teorema I (*di approssimazione*). *Sia $S = (T, A)$ una trasformazione continua e $S_n = (T_n, A)$, $(n=1, 2, \ldots)$, una successione di trasformazioni poliedriche di A in E_3, con $d_n = d(T_n, T, A) \to 0$, $a(S_n) < M$, $l(C_{n3})$, $l(C_3) \leqslant M$, $(n=1, 2, \ldots)$, ove M è un numero fisso. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ arbitrario esiste una successione $[n]$ di interi n e, per ogni $n \in [n]$, una suddivisione $D = D_0 +$*

$+D_1+\ldots+D_\nu$ *di* A *in poligoni semplici* q *tali che, se* $\sum$, $\sum^{(j)}$ *denotano somme estese a tutti i poligoni* $q \in D$, *oppure* $q \in D_j$, $(j = 0, 1, \ldots, \nu)$, *rispettivamente, e* $\sum_j$ *denota una somma estesa ai valori* $j = 1, 2, \ldots, N$, *risulta*: (1) diam $T(q) < \varepsilon$ *per ogni* $q \in D_0$, diam $T(\sum^{(j)} q) < \varepsilon$ *per ogni* $j = 1, 2, \ldots, \nu$; (2) $|M_3| < \varepsilon$, *ove* $M_3 = T_3(\sum^{(0)} q^*) \subset E_{23}$; (3) $U(A, T_3) - \sum^{(0)} |u(q, T_3)| < \varepsilon$, $\sum_j \sum^{(j)} |u(q, T_3)| < \varepsilon$; (4) $\sum^{(0)} |u(q, T_{n3}) - u(q, T_3)| < \varepsilon$ *per ogni* $n \in [n]$; (5) $\sum_j |\sum^{(j)} u(q, T_{n3})| < \varepsilon$ *per ogni* $n \in [n]$; (6) *i poligoni* $q \in D_0$ *e il numero* ν *sono gli stessi per ogni* $n \in [n]$.

Un teorema analogo vale sostituendo l'indice $r = 3$ con $r = 1$ o $r = 2$. La dimostrazione del Teorema I è divisa nei seguenti nn. **10-11-12-13-14-15.** La condizione $l(C_{n3})$, $l(C_3) \leqslant M$ è certo soddisfatta se $l(C_n)$, $l(C) \leqslant M$. A maggior ragione la stessa condizione è soddisfatta se $l(C_n) = l(C) = 0$, cioè se le stesse curve sono ridotte a semplici punti e perciò le superficie S, S_n sono chiuse.

10. – Dimostrazione del Teorema I.

Siano $S = (T, A)$: $p = T(w)$, $w \in A$, e $S_n = (T_n, A)$: $p = T_n(w)$, $w \in A$, $n = 1, 2, \ldots$, le date trasformazioni, ossia, con altre notazioni,

$$T: \quad x = x(w), \quad y = y(w), \quad z = z(w), \qquad w \in A,$$

$$T_n: \quad x = x_n(w), \quad y = y_n(w), \quad z = z_n(w), \qquad w \in A, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Da $a(S_n) < M$, $S_n \to S$, e dalla nota proprietà di semicontinuità inferiore dell'area di Lebesgue segue $L(S) = L(A, T) \leqslant \underline{\lim}\, a(S_n) \leqslant M$. Da $l(C_n) \leqslant M$, $C_n \to C$, e dalla nota proprietà di semicontinuità inferiore della lunghezza di Jordan segue $l(C) = l(A^*, T) \leqslant \underline{\lim}\, l(C_n) \leqslant M$.

11.– Il ragionamento del presente numero viene condotto relativamente alla variabile z e dovrà successivamente essere ripetuto per sostituzione circolare delle variabili x, y, z.

Diciamo m_3', m_3'' $[m_{n3}', m_{n3}'']$ il minimo ed il massimo di $z(w)$ $[z_n(w)]$ in A. Allora $m_{n3}' \to m_3'$, $m_{n3}'' \to m_3''$ al tendere di n all'infinito. Supporremo $m_3'' - m_3' > \varepsilon$. Il procedimento del presente numero può essere omesso altrimenti.

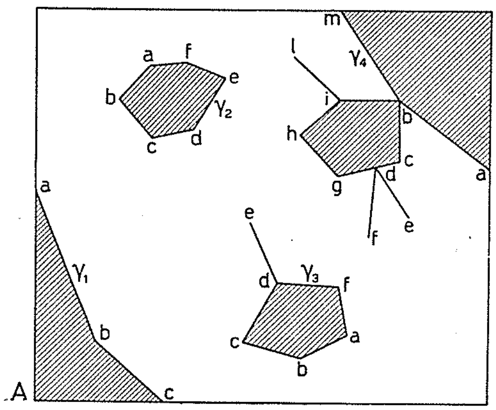
Sia $f_3(p)$, $p \in E_3$, la funzione $f_3(p) = z$. Allora per ogni $\bar{z}$, $m_3' < \bar{z} < m_3''$, possiamo considerare gli insiemi $H_3(\bar{z})$, $D_3^-(\bar{z})$, $D_3^+(\bar{z})$ (certamente non vuoti) di tutti i punti $w \in A$, dove $z(w) = \bar{z}$, $z(w) < \bar{z}$, $z(w) > \bar{z}$ rispettivamente. L'insieme $H_3(\bar{z})$ è compatto, gli insiemi $D_3^-(\bar{z})$, $D_3^+(\bar{z})$ sono aperti in A. Pertanto ciascuno degli insiemi $D_3^-(\bar{z})$, $D_3^+(\bar{z})$ ha al più una infinità numerabile di componenti. Sia $\{\alpha\} = \{\alpha\}_{\bar{z}}^-$ la collezione dei componenti α di $D_3^-(\bar{z})$. Per ogni

$\alpha \in \{\alpha\}$ consideriamo la frontiera $F(\alpha)$ di α in A, $F(\alpha) = \bar{\alpha} - \alpha = \alpha^* - \alpha\alpha^*$. L'insieme $F(\alpha)$ è compatto, $F(\alpha) \subset H_3(\bar{z})$, e pertanto $F(\alpha) = \sum \gamma$ è la somma, non necessariamente numerabile, dei suoi componenti γ. Ciascun γ è un continuo contenuto in $H_3(\bar{z})$ che può essere ridotto ad un semplice punto. Sia $\{\gamma\} = \{\gamma\}_\alpha$ la collezione dei componenti γ di $F(\alpha)$.

Da $m'_{n3} \to m'_3$, $m''_{n3} \to m''_3$, $m''_3 - m'_3 > \varepsilon$ segue che esiste un intero n_0 tale che per ogni $n \geqslant n_0$ risulta $|m'_{n3} - m'_3| < \varepsilon/7$, $|m''_{n3} - m''_3| < \varepsilon/7$, $m''_{n3} - m'_{n3} > 5\varepsilon/7$. Per ogni $n \geqslant n_0$ e $m'_{n3} < \bar{z} < m''_{n3}$, consideriamo gli insiemi $H_{n3}(\bar{z})$, $D^-_{n3}(\bar{z})$, $D^+_{n3}(\bar{z})$, certamente non vuoti, di tutti i punti $w \in A$ dove $z_n(w) = \bar{z}$, $z_n(w) < \bar{z}$, $z_n(w) > \bar{z}$ rispettivamente. Essendo $z_n(w)$ una funzione quasi lineare in A, l'insieme compatto $H_{n3}(\bar{z})$ è la somma finita di segmenti e triangoli di A. Di più ciascun insieme $D^-_{n3}(\bar{z})$, $D^+_{n3}(\bar{z})$ è aperto in A ed ha al più un numero finito di componenti α. Sia $\{\alpha\}' = \{\alpha\}^-_{n\bar{z}}$ la collezione dei componenti α di $D^-_{n3}(\bar{z})$. Per ogni $\alpha \in \{\alpha\}'$ la frontiera $F(\alpha) = \bar{\alpha} - \alpha = \alpha^* - \alpha\alpha^*$ è la somma di un numero finito di componenti γ. Diremo $\{\gamma\} = \{\gamma\}_\alpha$ la collezione finita dei componenti γ di $F(\alpha)$. Allora ogni $\gamma \in \{\gamma\}$ è una somma finita di segmenti.

Può accadere che ciascun $\gamma[\gamma \in \{\gamma\}_\alpha, \alpha \in \{\alpha\}^-_{n\bar{z}}]$ sia una poligonale semplice, aperta o chiusa (come $\gamma_1 = abc$ e $\gamma_2 = abcdefa$ nella figura); può accadere che i punti di γ possano essere ordinati come in una poligonale aperta o chiusa purchè certi punti o segmenti vengano contati più di una volta (come $\gamma_3 = abcdedfa$ e $\gamma_4 = abcdedfdghilibm$ nella figura). Ciò può essere provato considerando i possibili cammini da α ai punti di γ (elementi finali nella teoria di CARATHÉODORY). Si veda [**3**, (A), VI] per tale procedimento, ove è preso in considerazione il caso generale di una superficie continua qualsiasi e di una funzione $f(p)$ supposta soltanto lipschitziana in E_3 [cfr. **3**, (i) e anche **2**, **4**]. Nel caso attuale ciascun γ è una somma di segmenti e pertanto l'ordinamento accennato dei punti di γ è di natura essenzialmente elementare.

Penseremo perciò ciascun γ come un insieme di punti ordinati come in una poligonale semplice (chiusa o aperta), ove i punti di γ possono essere contati più di una volta. In conseguenza l'immagine $C = (T_n, \gamma)$ di γ rispetto a T_n è una poligonale (chiusa o aperta, non necessariamente semplice) completamente contenuta nel piano $z = \bar{z}$, e diremo $l(C)$ la lunghezza di C. Porremo inoltre



$$l_n(\bar{z}) = \sum_{\alpha \in \{\alpha\}^-_{n\bar{z}}} \sum_{\gamma \in \{\gamma\}_\alpha} l(C).$$

Questo numero è una delle possibili definizioni di lunghezza della curva di livello $z = \bar{z}$ sulla superficie poliedrica $S_n = (T_n, A)$. La funzione $l_n(z)$, $m'_{n3} < z < m''_{n3}$, è una funzione lineare a tratti con al più un numero finito di punti di discontinuità. Tale funzione è stata studiata (nel caso generale) in [**3**, (A)] (cfr. anche [**3**, (i)]) e verifica la relazione integrale

$$(5) \qquad a(S_n) \geqslant \int_{m'_{n3}}^{m''_{n3}} l_n(z)\,dz\,.$$

Sia $\varepsilon_1 > 0$ un qualsiasi numero $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon/7$. Per quanto occorrerà nei prossimi numeri fisseremo per ε_1 il valore $\varepsilon_1 = \varepsilon/115$. Sia $n_1 \geqslant n_0$ un intero tale che $|m'_{n3} - m'_3| < \varepsilon_1$, $|m''_{n3} - m''_3| < \varepsilon_1$ per ogni $n \geqslant n_1$. Sia M_1 il numero reale $M_1 = M\varepsilon_1^{-1}$. Diciamo j_1, j_2 i due interi ($\gtreqless 0$) definiti dalle seguenti relazioni:

$$j_1\varepsilon_1 \leqslant m'_3 < (j_1+1)\varepsilon_1 < (j_1+2)\varepsilon_1 < \dots < (j_2-1)\varepsilon_1 \leqslant m''_3 < j_2\varepsilon_1\,,$$

onde, per ogni $n \geqslant n_1$, si ha pure

$$(j_1-1)\varepsilon_1 < m'_{n3} < (j_1+2)\varepsilon_1\,, \qquad (j_2-2)\varepsilon_1 < m''_{n3} < (j_2+1)\varepsilon_1\,.$$

Si noti che

$$(j_2-j_1)\varepsilon_1 \geqslant m''_3 - m'_3 > \varepsilon \geqslant 7\varepsilon_1\,, \qquad j_2 - j_1 > 7\,,$$

$$(j_2-2)\varepsilon_1 - (j_1+2)\varepsilon_1 = (j_2-j_1-4)\varepsilon_1 > 3\varepsilon_1\,.$$

Consideriamo ora gli intervalli $h'_1, h'_2, \dots, h'_{\nu'}$ definiti da $[m'_{n3}, (j_1+3)\varepsilon_1]$, $[j\varepsilon_1, (j+1)\varepsilon_1]$, $(j = j_1+3, j_1+4, \dots, j_2-4)$, $[(j_2-3)\varepsilon_1, m''_{n3}]$. Pertanto $\nu' = (j_2-4)-(j_1+3)+1+2 > 3$, e ciascun intervallo h'_i ha lunghezza $\geqslant \varepsilon_1$ e $\leqslant 4\varepsilon_1$ [tutti meno il primo e l'ultimo hanno lunghezza $= \varepsilon_1$]. In ciascun intervallo h'_i, $(i = 1, 2, \dots, \nu')$, vi deve essere almeno un punto $\bar{z}$ ove $l_n(\bar{z}) \leqslant M\varepsilon_1^{-1}$. Infatti in caso opposto si avrebbe $l_n(z) > M\varepsilon_1^{-1}$ per ogni z interno ad h'_i e per qualche $i = 1, 2, \dots, \nu'$; quindi

$$M \geqslant a(S_n) \geqslant \int_{m'_{n3}}^{m''_{n3}} l_n(z)\,dz \geqslant (h'_i)\int l_n(z)\,dz > \varepsilon_1 M\varepsilon_1^{-1} = M\,,$$

e questa relazione è evidentemente contraddittoria. Sia dunque $\bar{z}$ un punto interno a h'_i ove $l(\bar{z}) \leqslant M\varepsilon_1^{-1} = M_1$, $(i = 1, 2, \dots, \nu')$. Se ora consideriamo i punti $\bar{z}$ sopra determinati relativi ai soli intervalli $h'_2, h'_4, \dots, h'_{2\nu}$ (cioè a tutti gli intervalli di posto pari, trascurando l'ultimo se ν' è pari), si ha $2\nu = \nu' - 1$ se ν' è dispari, $2\nu = \nu' - 2$ se ν' è pari, e pertanto da $\nu' > 3$ segue $\nu \geqslant 1$.

Se diciamo $z_{n1}, z_{n2}, \dots, z_{n\nu}$ i relativi punti $\bar{z} = z_{ni} \in h'_{2i}$, $(i = 1, 2, \dots, \nu)$, e $z_{n0} = m'_{n3}$, $z_{n,\nu+1} = m''_{n3}$, abbiamo una suddivisione di $[m'_{n3}, m''_{n3}]$ in $\nu+1 \geqslant 2$ intervalli $[z_{ni}, z_{n,i+1}]$, $(i = 0, 1, \dots, \nu)$, ciascuno di lunghezza $> \varepsilon_1$ e $< 5\varepsilon_1$. Si ha $z_{n0} = m_{n3} \to m'_3$, $z_{n,\nu+1} = m''_{n3} \to m''_3$ al tendere all'infinito di n. Mediante ν successive estrazioni possiamo determinare una successione $[n]_1$ di interi $n=1, 2, \ldots$, tali che $z_i = \lim z_{ni}$ esista finito al tendere all'infinito di n con $n \in [n]_1$, $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$. Da $z_{n0} < z_{n1} < z_{n2} < \ldots < z_{n,\nu+1}$, segue $z_0 < z_1 < z_2 < \ldots < z_{\nu+1}$ ove $z_0 = m_3'$, $z_{\nu+1} = m_3''$, e i punti $z_0, z_1, \ldots, z_{\nu+1}$ dividono $[z_0, z_{\nu+1}] = [m_3', m_3'']$ in $\nu+1$ intervalli ciascuno di lunghezza $\geqslant \varepsilon_1$ e $\leqslant 5\varepsilon_1$.

12. – Sia H l'insieme compatto $H = H(z_1) + H(z_2) + \ldots + H(z_\nu)$, cioè l'insieme dei punti $w \in A$ ove $z(w) = z_1$, oppure $= z_2, \ldots$, oppure $= z_\nu$. Gli insiemi compatti $T_1(H) \subset E_{21}$, $T_2(H) \subset E_{22}$ sono contenuti ciascuno in un sistema di rette $z = z_i$, $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$, e quindi $|T_1(H)| = |T_2(H)| = 0$. L'insieme $T_3(H) \subset E_{23}$ è compatto ma può avere misura positiva in E_{23}.

L'insieme $A - H$ è aperto in A e perciò la collezione $\{\alpha\}_0$ dei componenti α di $A - H$ è numerabile. Per ogni $\alpha \in \{\alpha\}_0$, la frontiera $F(\alpha) = \bar{\alpha} - \alpha = \alpha^* - \alpha\alpha^*$ di α è un insieme compatto contenuto in H, mentre $\alpha\alpha^* \subset A^*$ è un insieme aperto in A^* e pertanto la somma numerabile dei suoi componenti che sono intervalli aperti non sovrapposti di A^*. Diremo $\{\gamma\}_\alpha$ la collezione, eventualmente non numerabile, dei componenti γ di $F(\alpha)$.

Per ogni regione $\alpha \in \{\alpha\}_0$ e per ogni componente γ di $F(\alpha)$ la funzione $z(w)$ è costante in γ e può avere su γ al più due valori distinti, diciamo z_i, z_{i+1}, cioè al più due valori consecutivi della successione finita $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$. Di più si ha $z_i < z(w) < z_{i+1}$ per ogni $w \in \alpha$.

Diremo $\{\alpha\}_1$ la collezione dei soli componenti $\alpha \in \{\alpha\}_0$ di $A - H$ per i quali $z(w)$ assume due valori distinti su $F(\alpha)$ [e precisamente due valori z_i, z_{i+1} su almeno due componenti distinti γ, γ' di $F(\alpha)$]. Porremo in $\{\alpha\}_1$, anche quei componenti $\alpha \in \{\alpha\}_0$ per i quali $z(w)$ assume un solo valore su $F(\alpha)$ ma assume il valore z_1, oppure z_ν in qualche punto di α. Pertanto, se $\{\alpha\}_2 = \{\alpha\}_0 - \{\alpha\}_1$, $z(w)$ è costante su $F(\alpha)$ per ogni $\alpha \in \{\alpha\}_2$.

Se $\alpha \in \{\alpha\}_1$, allora $z(w)$ assume il valore $\bar{z} = 2^{-1}(z_i + z_{i+1})$ in almeno un punto $w_0 \in \alpha$ e quindi, da $z_{i+1} - z_i \geqslant \varepsilon_1$ segue $0 < \bar{z} - z_i$, $z_{i+1} - \bar{z} \geqslant \varepsilon_1/2$. Diremo $\delta > 0$ un numero tale che $|z(w) - z(w')| < \varepsilon_1/16$ per tutte le coppie di punti $w, w' \in A$ con $|w - w'| \leqslant \delta$. Osserviamo ora che ogni componente σ di $\alpha\alpha^* \subset A^*$ è un arco di A^* congiungente due componenti γ, γ' di $F(\alpha)$. Se diciamo c il cerchio di centro $w_0 \in \alpha$ e raggio δ, allora $z(w)$ assume su cA valori tutti compresi nell'intervallo $(\bar{z} - \varepsilon_1/16, \bar{z} + \varepsilon_1/16)$ e quindi diversi da z_i e z_{i+1}. In conseguenza $(cA)F(\alpha) = 0$ e, essendo A un quadrato e $w_0 \in A$, l'insieme cA contiene almeno un semicerchio o un quadrante (di centro $w_0 \in A$) contenuti in α. Dunque la collezione $\{\alpha\}_1$ è finita.

Osserviamo che due insiemi $\alpha \in \{\alpha\}_0$, relativi ad intervalli (z_i, z_{i+1}), (z_{i+h}, z_{i+h+1}), con $h > 1$, cioè non consecutivi, sono separati in A da almeno un insieme $\alpha \in \{\alpha\}_1$, relativo a ciascuno degli intervalli intermedi. Lo stesso vale per ogni coppia di punti $w, w' \in A$ con $z(w) < z_{i+1}$, $z_{i+h} < z(w')$.

Diciamo n_2 un intero $n_2 \geqslant n_1$ tale che $|z_{ni} - z_i| < \varepsilon_1/16$ per ogni $i=1, 2, \ldots, \nu$, $n \geqslant n_2$, $n \in [n]_1$, e inoltre tale che $|z_n(w) - z(w)| < \varepsilon_1/32$ per gli stessi n e per ogni $w \in A$. Allora per ogni coppia di punti w, $w' \in A$ con $|w - w'| \leqslant \delta$ e per ogni $n \geqslant n_2$, $n \in [n]_1$, risulta $|z_n(w) - z_n(w')| < \varepsilon_1/16 + 2(\varepsilon_1/32) = \varepsilon_1/8$.

Per ogni coppia α, α' di insiemi α, $\alpha' \in \{\alpha\}_1$, relativi ad intervalli (z_i, z_{i+1}) (z_{i+1}, z_{i+2}) consecutivi, consideriamo due punti, diciamo $w_0 \in \alpha$, $w_0' \in \alpha'$, dove $z(w)$ assume i valori $2^{-1}(z_i + z_{i+1}) = \bar{z}$, $2^{-1}(z_{i+1} + z_{i+2}) = \bar{z}'$ rispettivamente. Essendo $z_i < \bar{z} < z_{i+1} < \bar{z}' < z_{i+2}$ e tutti questi valori differendo l'uno dall'altro di almeno $\varepsilon_1/2$, risulta pure $\bar{z} < z_{ni} < \bar{z}'$ per ogni $n \geqslant n_2$, $n \in [n]_1$, e quindi l'insieme $H_{n3}(z_{ni})$ separa w_0 e w_0' in A. Pertanto w_0 appartiene ad un componente α di $D_n^-(z_{ni})$ che non contiene w_0', neppure sulla frontiera, e quindi esiste un componente γ_{n3} di $F(\alpha)$ che separa w_0 e w_0' in A.

La curva C_{n3}: (T_n, γ_{n3}), immagine di γ_{n3} rispetto a T_n, ha certamente lunghezza $\leqslant l_n(z_{n,i+1}) \leqslant M\varepsilon_1^{-1} = M_1$. Diciamo w_n un punto qualsiasi di γ_{n3}. Poichè $w_n \in A$ per ogni n, esiste almeno un punto di accumulazione $\bar{w}$ della successione $[w_n]$ (con $n \in [n]_1$), e quindi esiste pure una sottosuccessione $[n]_2 \subset [n]_1$, di interi tale che $w_n \to \bar{w}$ al tendere di n all'infinito con $n \in [n]_2$. Segue che $\bar{w} \in \liminf \gamma_{n3}$ e quindi $\liminf \gamma_{n3} \neq 0$, ove $n \to \infty$ con $n \in [n]_2$. Da (3.4) si ha che $h_3 = \limsup \gamma_{n3}$ è un continuo. Da $z(\gamma_{n3}) = z_{n,i+1}$, $z_{n,i+1} \to z_{i+1}$, segue $z(w) = z_{i+1}$ per ogni $w \in h_3$ e quindi $h_3 \subset H$. Ovviamente h_3 separa w_0 da w_0' in A e anche α e α' in A. Ciò vale anche se si definisce h_3 mediante una sottosuccessione $[n]_3 \subset [n]_2$ come dovremo fare nel seguito. Da (1.7) possiamo intanto determinare la sottosuccessione $[n]_3$ in modo che le curve C_{n3}: (T_n, γ_{n3}), tutte di lunghezza $\leqslant M_1$, abbiano una curva limite C, cioè $\|C_n, C\| \to 0$ quando $n \to \infty$ con $n \in [n]_3$. Pertanto anche la curva C ha lunghezza $\leqslant M_1$, e quindi ha proiezioni di misura zero sui piani coordinati. Dunque $|T_3(h_3)| = 0$, $|T_1(h_3)| = |T_2(h_3)| = 0$, ove i due ultimi insiemi sono contenuti nella retta $z = \bar{z}$ dei piani E_{21}, E_{22}.

Possiamo pensare di ripetere il ragionamento indicato, successivamente per ciascuna delle coppie α, $\alpha' \in \{\alpha\}_1$ relative ad intervalli consecutivi. Per semplicità di notazioni diremo ancora $[n]_3$ la successione di interi così ottenuta. Per ogni $n \in [n]_3$, $n \geqslant n_2$, avremo dunque un insieme finito di insiemi γ_{n3} e $h_3 = \limsup \gamma_{n3}$, di curve C_{n3} : (T_n, γ_{n3}) e di curve C_3 con $\|C_{n3}, C_3\| \to 0$ quando $n \to \infty$, $n \in [n]_3$, $l(C_{n3}) \leqslant M_1$, $l(C_3) \leqslant M_1$.

Se $\widetilde{H}_{n3}$, $\widetilde{H}_3$ sono gli insiemi somma degli insiemi γ_{n3} e h_3, si ha $\widetilde{H}_{n3} = \sum \gamma_{n3}$, $\widetilde{H}_3 = \sum h_3$, $\widetilde{H}_3 \subset H$, $T(\widetilde{H}_3) = \sum [C]$, $|T_r(\widetilde{H}_3)| = 0$, $(r=1, 2, 3)$, ove $T_1(\widetilde{H}_3)$, $T_2(\widetilde{H}_3)$ sono insiemi contenuti nelle rette $z = z_i$, $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$, dei piani E_{21}, E_{22}. Si noti anche che $\widetilde{H}_3 = \limsup \widetilde{H}_{n3}$ quando $n \to \infty$, $n \in [n]_3$. Consideriamo l'insieme $\widetilde{A}_3 = A - \widetilde{H}_3$, aperto in A, e diciamo $\{\widetilde{\alpha}\}$ la collezione, al più numerabile, dei componenti $\widetilde{\alpha}$ di $\widetilde{A}_3$. Ciascun $\widetilde{\alpha} \in \{\widetilde{\alpha}\}$ potrà contenere punti di insiemi $\alpha \in \{\alpha\}$ relativi ad un intervallo (z_i, z_{i+1}) e al più di due intervalli adiacenti (z_{i-1}, z_i), (z_{i+1}, z_{i+2}), oltre a punti ove $z(w) = z_i, z_{i+1}$. Pertanto $z(w)$ ha in ciascun $\tilde{\alpha} \in \{\tilde{\alpha}\}$ una oscillazione $\leqslant z_{i+2} - z_{i-1} = 3 \cdot 5\varepsilon_1 = 15\varepsilon_1$.

Possiamo anche considerare, per ogni $n \geqslant n_2$ e $n \in [n]_3$, l'insieme $\tilde{A}_{n3} = A - \tilde{H}_{n3}$, aperto in A, e diremo $\{\tilde{\alpha}\}_n$ la collezione, certo finita, dei componenti $\tilde{\alpha}$ di $\tilde{A}_{n3}$. Se diciamo $\bar{z}$ l'estremo inferiore di $z(w)$ in un qualsiasi $\tilde{\alpha} \in \{\tilde{\alpha}\}_n$, allora sarà $z_i \leqslant \bar{z} < z_{i+1}$ per un qualche i. Dimostriamo che non vi possono essere in $\tilde{\alpha}$ punti w'' con $z(w'') > z_{i+3}$. Infatti in tal caso esisterebbero punti $w', w'' \in \tilde{\alpha}$ con $z(w') < z_{i+1}$, $z(w'') > z_{i+3}$ e due insiemi $\alpha_1, \alpha_2 \in \{\alpha\}_1$ relativi agli intervalli (z_{i+1}, z_{i+2}), (z_{i+2}, z_{i+3}), α_1 separante w' da α_2, α_2 separante α_1 da w'' in A, e quindi vi sarebbe almeno un insieme γ_{n3} separante w'' e w' in A. Dunque w'' e w' non potrebbero essere entrambi in $\tilde{\alpha}$. Ciò assicura che $z(w) \leqslant z_{i+3}$ in $\tilde{\alpha}$, e quindi $z(w)$ ha in $\tilde{\alpha}$ una oscillazione $\leqslant z_{i+3} - z_i < 3 \cdot 5\varepsilon_1 = 15\varepsilon_1$. Pertanto $z_n(w)$ ha in ciascun $\tilde{\alpha} \in \{\tilde{\alpha}\}_n$ una oscillazione $< 15\varepsilon_1 + 2(\varepsilon_1/4) < 16\varepsilon_1$.

Abbiamo notato che gli insiemi γ_{n3} non sono necessariamente poligonali semplici (aperte o chiuse) ed è ora giunto il momento di sostituire ad essi delle poligonali semplici γ'_{n3}. Ricordiamo che per ogni coppia α, α' di insiemi $\alpha, \alpha' \in \{\alpha\}_1$, relativi ad intervalli consecutivi (z_i, z_{i+1}), (z_{i+1}, z_{i+2}), i punti $w_0 \in \alpha$, $w'_0 \in \alpha'$ sono separati dalla frontiera $F(\alpha_n)$ di un qualche componente α_n di $D_n^-(z_{n,i+1})$ e perciò da un componente γ_{n3} di $F(\alpha_n)$. Possiamo sostituire ora a γ_{n3} una poligonale semplice $\gamma'_{n3} \subset \alpha_n$ in modo che la distanza $\| C_{n3}, C'_{n3} \|$ sia piccola quanto si vuole, diciamo $< \varepsilon_1/4$ e anche $< n^{-1}$, ove C_{n3}, C'_{n3} sono le immagini di γ_{n3}, γ'_{n3} rispetto a T_n, con le convenzioni già fatte per γ_{n3}. Che ciò possa farsi è stato dimostrato nel caso generale di trasformazioni continue in [**3**, (A), VI; **3**, (i)]. Nel caso attuale ove T_n è una trasformazione quasi lineare l'asserto ha carattere elementare. Potremo altresì supporre che tutti i punti di α_n non separati da γ'_{n3} (da γ_{n3}) abbiano da γ_{n3} una distanza piccola quanto si vuole, diciamo $< \delta$ e anche $< n^{-1}$ [**3**, (A), VII]. Potremo, inoltre, supporre, essendo qui T_n quasi lineare, che $l(C'_{n3}) < l(C_{n3}) + 1$, e quindi $l(C'_{n3}) \leqslant M_1 + 1$. Finalmente, essendo i continui γ_{n3} relativi ad uno stesso α tutti disgiunti (oppure coincidenti), possiamo supporre che anche le curve γ'_{n3} distinte siano disgiunte. Infine, essendo $z_n(w) = z_{n,i}$ per ogni $w \in \gamma_{n3}$ e per qualche i, risulterà $z_{n,i} - \varepsilon_1/8 < z_n(w) < z_{n,i}$ per ogni $w \in \gamma'_{n3}$ e anche $|z_n(w) - z_i| < \varepsilon_1/4$ per ogni $w \in \gamma'_{n3}$. Per semplicità diremo che γ'_{n3} è una curva γ' relativa al livello z_i. Le curve γ'_{n3} sono così disgiunte e in numero non superiore al numero delle coppie α, α' di regioni $\alpha, \alpha' \in \{\alpha\}_1$, relative ad intervalli consecutivi (z_i, z_{i+1}), (z_{i+1}, z_{i+2}), e questo ultimo numero dipende solo dalla funzione $z(w)$, $w \in A$, e non da n. Pertanto il numero delle parti π'_3 nelle quali le stesse curve γ'_{n3} dividono A (una unità in più del numero delle curve γ'_{n3}) è limitato indipendentemente da n e, per ogni parte π'_3, la chiusura $\bar{\pi}'_3$ è una regione poligonale di A. Possiamo altresí supporre che per ciascuna regione π'_3 la frontiera

$F(\pi_3')$ di π_3' in A abbia almeno due componenti (linee γ_{n3}') relativi a livelli diversi (cioè $z(w)$ assume su essi valori $z(w)$ con $|z(w)-z_i|<\varepsilon_1/4$, $|z(w)-z_{i+1}|<\varepsilon_1/4$) [oppure $z(w)$ assume il valore z_1 o z_ν in π_3' e valori $z(w)$ con $|z(w)-z_i|<\varepsilon_1/4$ con $i=2$, oppure $i=\nu-1$, su $F(\pi_3')$]. Dobbiamo ora dimostrare che $z(w)$ ha in ciascuna regione π_3' una oscillazione $<16\varepsilon_1$ (e $\geqslant \varepsilon_1/2$). La dimostrazione è la stessa vista sopra e non la ripetiamo. Denoteremo con H_{n3}' l'insieme $\sum \gamma_{n3}'$.

13. – I ragionamenti dei nn. **11** e **12** possono essere ripetuti successivamente sostituendo x e y alla coordinata z e permutando circolarmente le lettere x, y, z. Otterremo allora una nuova sottosuccessione $[n]_4 \subset [n]_3$ di interi n, e diremo $\widetilde{H}_{nr}$, $\widetilde{H}_r$, $(r=1,2,3)$, gli insiemi così ottenuti, $\widetilde{H}_r = \limsup \widetilde{H}_{nr}$ quando $n\to\infty$, $n\in[n]_4$. Inoltre si ha $\widetilde{H}_{nr}=\sum\gamma_{nr}$, $\widetilde{H}_r=\sum h_r$, ove per ogni h_r si ha $h_r=\limsup\gamma_{nr}$, e considereremo pure gli insiemi $\widetilde{A}_{nr}=A-\widetilde{H}_{nr}$, $\widetilde{A}_r=A-\widetilde{H}_r$, $(r=1,2,3)$. Le curve poligonali $C_{nr}:(T_n,\gamma_{nr})$ (in numero finito) tendono a ben determinate curve continue C_r, cioè $\|C_{nr},C_r\|\to 0$ quando $n\to\infty$, $n\in[n]_4$, e tutte le curve C_{nr}, C_r hanno lunghezza $\leqslant M\varepsilon_1^{-1}=M_1$. Di più avremo $|T_s(\widetilde{H}_r)|=0$, $(r,s=1,2,3)$, ove gli insiemi $T_s(\widetilde{H}_r)\subset E_{2s}$ con $s\neq r$ sono contenuti in un insieme finito di rette.

Diciamo H_0 l'insieme compatto $H_0=\widetilde{H}_1+\widetilde{H}_2+\widetilde{H}_3$, onde $|T_r(H_0)|=0$, $(r=1,2,3)$. Sia A_0 l'insieme $A_0=A-H_0$, aperto in A, e $\{\beta\}_0$ la collezione, al più numerabile, dei componenti β di A_0. Da (3.2) abbiamo allora:

$$(6)\qquad \begin{cases} L(A,T) = L(A_0,T) = \sum L(\beta,T)\,, & \\ L(A,T_r) = L(A_0,T_r) = \sum L(\beta,T_r)\,, & (r=1,2,3), \end{cases}$$

ove la somma $\sum$ è estesa a tutti i $\beta\in\{\beta\}_0$. Si noti che se $H_n=\widetilde{H}_{n1}+\widetilde{H}_{n2}+\widetilde{H}_{n3}$ si ha $\widetilde{H}_0=\limsup\widetilde{H}_n$ quando $n\to\infty$, $n\in[n]_4$.

Consideriamo la funzione $N(p;T_3,A)$, $p\in E_{23}$, che è integrabile in E_{23}. Allora, dato $\varepsilon>0$, esiste un $\sigma>0$ tale che per ogni insieme misurabile $I\subset E_{23}$ con $|I|<\sigma$ risulti $(I)\int N(p;T_3,A)<\varepsilon/15$. Possiamo inoltre supporre $\sigma\leqslant\varepsilon/15$.

Sia $[F_m]$ una successione di figure tali che $F_m\subset F_{m+1}$, $F_m\subset A_0$, $F_m^0\uparrow A_0$ (ogni figura F_m è la somma finita di regioni poligonali chiuse e disgiunte). Si ha $L(F_m,T)\to L(A_0,T)=L(A,T)$ e quindi possiamo fissare una figura, diciamo $F=F_m$, tale che

$$(7)\qquad L(F,T)>L(A_0,T)-\sigma=L(A,T)-\sigma\,.$$

I componenti R di F sono regioni poligonali chiuse e disgiunte, ciascuna interamente contenuta in qualche regione $\beta\in\{\beta\}_0$.

Da $F\subset A_0$, $F\widetilde{H}_0=0$, $\limsup\widetilde{H}_n=\widetilde{H}_0$, segue che esiste un intero n_3, $n_3\geqslant n_2\geqslant n_1$, tale che $F\widetilde{H}_n=0$ per ogni $n\geqslant n_3$, $n\in[n]_4$, e quindi ciascun componente R di F è interamente contenuto in qualche componente β_n di $\widetilde{A}_n = A - \widetilde{H}_n$. Diciamo $\{R\}_F$, $\{\beta\}_F$, $\{\beta_n\}_F$ le collezioni finite dei componenti R di F, dei componenti β di A_0 contenenti almeno un R, dei componenti β_n di $\widetilde{A}_n$ contenenti almeno un R. Distinti componenti R di F possono appartenere al medesimo componente o a distinti componenti β, e al medesimo componente o a distinti componenti β_n di $\widetilde{A}_n$. Se $R, R' \subset \beta$, $\beta \in \{\beta\}_F$, allora è anche R, $R' \subset \beta_n$, $\beta_n \in \{\beta_n\}_F$ per tutti gli n abbastanza grandi; se, R, R' appartengono a componenti β distinti, allora gli stessi R, R' possono appartenere al medesimo componente o a distinti componenti β_n, per ogni n. La collezione $\{R\}_F$ essendo finita, non si possono avere per ogni n, che un numero finito di combinazioni. Pertanto possiamo determinare una successione di interi $n \in [n]_1$, che per semplicità denoteremo ancora con $[n]_4$, in guisa che la distribuzione dei componenti R negli insiemi $\beta \in \{\beta_n\}_F$ sia la stessa per ogni n.

14. – Consideriamo ora gli insiemi $H'_n = H'_{n1} + H'_{n2} + H'_{n3}$, $(n = 1, 2, ...)$, $n \in [n]_4$, ove ogni insieme $H'_{nr} = \sum \gamma'_{nr}$, $(r = 1, 2, 3)$, è definito come H'_{n3} nel n. **12**. Gli insiemi H'_{nr} sono somme di curve γ'_{nr} e i punti di queste curve sono tutti ad una distanza $< n^{-1}$ da H_{nr}, $(r = 1, 2, 3)$. Pertanto da $\limsup H_n = H_0$, $H_0 F = 0$, ove H_0 è un insieme compatto e $n \to \infty$ con $n \in [n]_4$, segue che l'insieme certo non vuoto e compatto $H'_0 = \limsup H'_n$, è contenuto in H_0, e quindi $H'_0 F = 0$. Ne segue anche che esiste un intero n_4 tale che per ogni $n \geqslant n_4$, $n \in [n]_4$, risulta pure $H'_n F = 0$. Per ogni n l'insieme H'_n è la somma di un numero finito di poligonali e quindi l'insieme $A'_n = A - H'_n$ ha un numero finito di componenti, ma tale numero può essere non limitato al crescere di n. Occorre pertanto modificare ulteriormente gli insiemi H'_{nr}, $(r=1, 2, 3)$.

Sappiamo già che per ogni r l'insieme H'_{nr} è la somma delle poligonali semplici e disgiunte γ'_{nr}, in numero minore di un numero fisso, che diciamo N_r. Pertanto H'_{nr} divide A in un numero finito, al più N_r+1, di regioni poligonali π_r. Sappiamo che su ciascuna π_r la funzione $z(w)$ [per $r = 3$, altrimenti $x(w)$, $y(w)$ per $r = 1, 2$] ha una oscillazione $< 16\varepsilon_1$. Di più $z(w)$ [o $x(w)$, $y(w)$] assume su almeno due componenti distinti di $F(\pi_r)$, valori $z(w)$ relativi a due diversi livelli z_i, z_{i+1} (cioè valori $z(w)$ con $|z(w) - z_i| < \varepsilon_1/8$, e $|z(w) - z_{i+1}| < \varepsilon_1/8$). Finalmente sappiamo che, per ciascun livello z_i (o x_j, y_h), la somma delle lunghezze delle poligonali immagini delle curve γ'_{nr} rispetto a T_n è $\leqslant M_1 + 1$.

Poniamo $N = \max\,(N_r + 1)$, $\nu = \max \nu_r$, $(r = 1, 2, 3)$. Anzitutto possiamo supporre che le intersezioni di due qualunque curve γ'_{nr}, γ'_{ns}, $r \neq s$, $(r, s=1, 2, 3)$, avvengano in punti $\bar{w}$ che non sono vertici nè per γ'_{nr}, nè per γ'_{ns}, e pertanto le due poligonali si intersecano in $\bar{w}$. Di più possiamo supporre che tali punti $\bar{w}$ siano tutti distinti. Tutto ciò può essere ottenuto con modificazioni tanto piccole delle poligonali γ'_{n1}, γ'_{n2}, γ'_{n3} così che siano conservate tutte le proprietà già elencate delle poligonali stesse.

Consideriamo ora l'insieme $H'_{n3}+H'_{n1}$ e i vari componenti π'' di $A-(H'_{n3}+H'_{n1})$. Ciascuno di questi componenti è un insieme connesso aperto in A la cui frontiera in A è contenuta nelle somme di semplici poligonali $\sum \gamma'_{n3}$ e $\sum \gamma'_{n1}$. Per le convenzioni fatte sopra circa le intersezioni delle stesse poligonali, la chiusura $\bar{\pi}''$ di ciascun componente π'' è una regione poligonale $\pi'' \subset A$. Consideriamo le regioni $\bar{\bar{\pi}}'_3$ che sono in qualche modo suddivise dalle linee γ'_{n1} di H'_{n1}.

Alcune di tali parti saranno interi componenti $\pi'_1 \subset \pi'_3$ e anche questi sono in numero $\leqslant N$. Avremo poi nuove parti π'' e ciascun componente di $F(\pi'')$ è la somma finita di archi di curve γ'_{n3} e γ'_{n1}. Se una parte π'' ha il contorno formato di archi di curve γ'_{n3} e archi di curve γ'_{n1}, queste ultime relative ad un solo livello x_j, associeremo tali parti ad altre adiacenti sopprimendo archi di curve γ'_{n1}. Così facendo successivamente potremo ritornare ai componenti π'_3 originali, oppure a nuove parti, diciamo $\pi'' \subset \pi'_3$, la cui chiusura $\bar{\pi}''$ è una regione poligonale, e il cui contorno π''^* contiene almeno due archi di curve γ'_{n1} corrispondenti a livelli x_j, x_{j+1} consecutivi e almeno un arco di curva γ'_{n3} relativa ad un qualche livello z_i (oppure almeno due archi di curve γ'_{n3} relative a livelli z_i, z_{i+1} consecutivi). Potrà accadere che intere curve γ'_{n3}, o γ'_{n1}, facciano parte del contorno π''^* di qualche componente π''. Poichè ognuna di tali curve può appartenere al contorno di al più due componenti π'', si avranno al più $4N$ componenti di tale tipo. Finalmente avremo componenti π'' tali che ciascun componente di $F(\pi'')$ è la somma di almeno due archi di curve γ'_{n3} e γ'_{n1}. Potrà accadere che l'immagine di $F(\pi'')$ rispetto a T_n sia la somma finita di curve poligonali di lunghezza complessiva $\geqslant \varepsilon_1/8$. Siccome ogni arco di $F(\pi''^*)$ appartiene al più a due componenti π'' e la somma complessiva delle lunghezze delle curve (T_n, γ'_{nr}) è $< \nu M_1$, possiamo avere al più $2\nu M_1 : (\varepsilon_1/8) = 16\nu\varepsilon_1^{-1}M_1$ regioni π'' di tale tipo. Finalmente può accadere che l'immagine di $F(\pi'')$ rispetto a T_n sia la somma finita di curve poligonali di lunghezza complessiva $< \varepsilon_1/8$. Allora, su ciascun componente h di $F(\pi'')$, $x(w)$ e $z(w)$ hanno oscillazione $< \varepsilon_1/8$. D'altra parte ciascun h contiene almeno un punto $\bar{w}$ di intersezione di archi di curve γ'_{n3} e γ'_{n1} relative a livelli z_i, x_j [oppure z_i, x_{j+1}, oppure z_{i+1}, x_j, oppure z_{i+1}, x_{j+1}] rispettivamente, quindi su ciascun h si ha $|z(w)-z_i|< \varepsilon_1/8$, $|x(w)-x_j|< \varepsilon_1/8$ [oppure le stesse relazioni con z_{i+1} o x_{j+1} al posto di z_i e x_j]; inoltre poichè $F(\pi'')$ possiede almeno due componenti h contenenti due archi di curve γ'_{n1} relative a livelli x_j e x_{j+1} rispettivamente, deve esservi in π'' almeno un punto $\bar{w}$ con $x(\bar{w}) = \bar{x} = 2^{-1}(x_j+x_{j+1})$. Nell'intero cerchio c di centro $\bar{w}$ e raggio δ si ha $|x(w)-\bar{x}|< \varepsilon_1/16$, quindi $x(w)$ ha valori tutti diversi da quelli che $x(w)$ assume in $F(\pi'')$. Pertanto $cF(\pi'') = 0$ e quindi l'intero cerchio c [o almeno un semicerchio o un quadrante di c] appartiene a π'' e il numero dei componenti π'' di quest'ultima categoria è minore di un numero fisso, precisamente $<|A| : (4^{-1}\pi\delta^2) = 4\pi^{-1}\delta^{-2}$. In conclusione possiamo dire che, sopprimendo da $H'_{n1} = \sum \gamma'_{n1}$ opportuni archi di curve γ'_{n1}, abbiamo ottenuto un insieme H''_{n1} tale che $H'_{n3}+H''_{n1}$ divide A in un numero finito di componenti, diciamo π'', in numero minore di un numero fisso indipendente da n e la chiusura $\bar{\pi}''$ di ciascun π'' è una regione poligonale $\bar{\pi}''\subset A$. Ovviamente $\bar{z}_n(w)$ ha una oscillazione $< 16\varepsilon_1$ e $x_n(w)$ una oscillazione $< 3\cdot 16\varepsilon_1 = 48\varepsilon_1$ in ciascuna regione $\bar{\pi}''$. Diremo h un qualsiasi componente di $F(\pi'')$.

Dobbiamo considerare ora l'insieme $H'_{n3}+H''_{n1}+H'_{n2}$. Tutto il precedente ragionamento può essere ripetuto senza difficoltà. Si potrà perciò sopprimere da H'_{n2} opportuni archi di curve γ'_{n2} in modo tale che, se H''_{n2} è il nuovo insieme, risulti che $A - (H'_{n3}+H''_{n1}+H''_{n2})$ è la somma finita di componenti π''' in numero minore di un numero fisso indipendente da n e la chiusura $\bar{\pi}'''$ di ciascun π''' è una regione poligonale $\bar{\pi}'''\subset A$. Inoltre $z_n(w)$, $x_n(w)$, $y_n(w)$ avranno oscillazioni minori di $16\varepsilon_1$, $48\varepsilon_1$, $48\varepsilon_1$, rispettivamente in ciascuna regione $\bar{\pi}'''$ e quindi diam $T_n(\pi''') < 112\varepsilon_1$. La stessa dimostrazione assicura inoltre che diam $T(\pi''') < 112\varepsilon_1$. Più semplicemente se supponiamo n abbastanza grande affinchè sia $d(T_n, T, A) < \varepsilon_1$, risulta diam $T(\pi''') < 115\varepsilon_1$. Infine per essere $\varepsilon_1 = (115)^{-1}\varepsilon$, risulta che, per tutti gli $n\in[n]_1$, $n\geqslant N_1$ e per ogni componente π''' si ha diam $T(\pi''')$, diam $T_n(\pi''') < \varepsilon$.

Denotiamo con π le parti π''' e con h ogni componente di $F(\pi)$. Il numero delle parti π è complessivamente limitato e perciò anche il numero totale dei componenti h di $F(\pi)$ è limitato. Altrettanto dicasi del numero totale dei componenti k di π^*. Possiamo ora estrarre una nuova sottosuccessione $[n]_5$ di interi, $[n]_5\subset[n]_4$, in modo tale che: (1) la distribuzione delle regioni R nelle regioni π sia la stessa per ogni $n\in[n]_5$; (2) il numero ν delle regioni π sia il medesimo per ogni $n\in[n]_5$; (3) per ogni π il numero dei componenti h di $F(\pi)$ e il numero dei componenti k di π^* sia il medesimo per ogni $n\in[n]_5$; (4) per ogni π e per ogni componente h di $F(\pi)$ e k di π^*, la successione, diciamo (Γ_{n3}), oppure (C_{n3}), abbia limite, ove, $\Gamma_{n3}:(T_{n3}, h)$, $C_{n3}:(T_{n3}, h_0)$, quando $n\to\infty$, $n\in[n]_5$. Con questa ultima condizione intendiamo che esistono curve Γ_3 o C_3 tali che $\|\Gamma_{n3}, \Gamma_3\|\to 0$, $\|C_{n3}, C_3\|\to 0$, quando $n\to\infty$, $n\in[n]_5$. Sempre circa la stessa condizione (4) si noti che per ciascuna curva Γ_n si ha $l(\Gamma_{n3})\leqslant K(M+1)$, essendo K un numero fisso. D'altra parte ogni curva C_n è la somma finita di archi Γ_{n3} e archi della curva fissa $C:(T_3, A^*)$ di lunghezza $\leqslant M$, e quindi si ha pure $l(C_{n3})\leqslant$ $\leqslant K'(M+1)$, ove K' è un numero fisso. Pertanto la possibilità di soddisfare la condizione (4) è una conseguenza di (1.7). Si noti che ogni curva k componente di π^* è formata di archi h e di certi sottoarchi h' di A^*. Si può supporre che il numero di tali sottoarchi $h' = h'_n = \alpha_n\beta_n$, $(\alpha_n, \beta_n\in A^*, h'\subset A^*)$, sia il medesimo per ogni n, che α_n e β_n abbiano limite, $\alpha_n\to\alpha$, $\beta_n\to\beta$, quando $n\to\infty$, $n\in[n]_5$, e che anche l'arco $h'_n\to h'_\infty$ abbia per limite un qualche arco h'_∞ di A^* quando $n\to\infty$, $n\in[n]_5$. Per semplicità di notazioni denoteremo d'ora in poi con π le ν regioni poligonali $\bar{\pi}$ e con ∇_n la suddivisione finita di A nelle ν regioni poligonali non sovrapposte π, ottenute avanti per ogni $n \in [n]_5$.

15. – Sia N un numero intero tale che $N\sigma > M+1$. La funzione $N(p; T_3, A)$, $p \in E_{23}$, è integrabile in E_{23} e perciò, per ogni intero $i = 1, 2, \ldots, N$, esiste un numero $\eta_i > 0$ tale che, per ogni insieme misurabile $I \subset E_{23}$, con $|I| < \eta_i$, risulti $(I) \int N(p; T_3, A) < 2^{-i-2}\sigma$. Supporremo $\eta_i \leqslant \sigma$, $(i = 1, 2, \ldots, N)$.

Per ogni $i = 1, 2, \ldots, N$, definiamo (per induzione) una suddivisione $D_i = D_{i1} + D_{i2} + D_{i3}$ di F in regioni poligonali semplici $q \in D_{i1} + D_{i2}$ e non semplici $q \in D_{i3}$ aventi le proprietà sottoindicate, ove denoteremo con M_i l'insieme compatto $M_i = T_3(\sum^{(i)} q^*) = \sum^{(i)} T_3(q^*)$, e con $\sum^{(i)}$ ogni somma estesa a tutte le regioni $q \in D_i$. Anzitutto dobbiamo avere diam $T(q) < \sigma$ per ciascun $q \in D_i$, $(i=1, 2, \ldots, N)$. Intendiamo inoltre che D_i contenga tutti i poligoni $q \in D_{i-1,2} + D_{i-1,3}$, e che ogni poligono $q \in D_{i-1,1}$ sia la somma esatta di poligoni $q \in D_i$, $(i = 1, 2, \ldots, N)$. Denotiamo con $M_{i,1}$ l'insieme compatto, $M_{i,1} \subset M_i$,

$$M_{i1} = \sum_{Q \in D_{i-1,1}} \sum_{\substack{q \in D_{i1} \\ q \subset Q^0}} T_3(q^*), \quad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

ove per $i = 1$ intenderemo che i componenti R di F sostituiscano i poligoni Q di $D_{i-1,1}$. Intenderemo poi che risulti $|M_{i1}| < \eta_1$. Denoteremo con $\varrho_i > 0$ un numero tale che $|(M_{i1})_{2\varrho_i}| < |M_{i1}| + \eta_i < 2\eta_i$, $(i=1, 2, \ldots, N)$. Intendiamo inoltre che risulti diam $T(q) < \varrho_i/3$ per ciascun poligono $q \in D_{i+1}$ con $q \subset Q$, $Q \in D_{i1}$. Finalmente richiederemo che sia

$$\sum_{q \in D_{i1}} |u(q, T_3)| > U(A, T_3) - 2\sigma, \quad (i = 1, 2, \ldots, N). \tag{7}$$

Vediamo ora come è possibile definire le N suddivisioni D_i, $(i = 1, 2, \ldots, N)$.

In virtù di (5.1; 5.2) esiste una suddivisione finita $D_1 = D_{11} + D_{12} + D_{13}$ di F in poligoni semplici $q \in D_{11}$ con $q \subset F^0$, in poligoni semplici $q \in D_{12}$ con $qF^* \neq 0$ e in poligoni non semplici $q \in D_{13}$ tali che, se $\sum^{11}$, $\sum^{12}$, $\sum^{13}$ indicano somme estese a tutti i poligoni $q \in D_{11}$, D_{12}, D_{13} rispettivamente, abbiamo

$$\begin{cases} \sum^{11} |u(q, T_3)| > U(F, T_3) - 2^{-1}\sigma, \\ |M_{11}| < \eta_1, \quad \text{ove} \quad M_{11} = \sum^{11} T_3(q^*) = T_3(\sum^{11} q^*). \end{cases} \tag{8}$$

Possiamo supporre inoltre che si abbia $u(q, T_3) \neq 0$ e quindi $U(q, T_3) > 0$ per ciascun poligono $q \in D_{11}$ (porremo in D_{12} quei poligoni q per i quali ciò non accade). Sia $\varrho_1 > 0$ un numero tale che $|(M_{11})_{2\varrho_1}| < |M_{11}| + \eta_1 < 2\eta_1$.

Consideriamo una suddivisione D_2 di F ottenuta ponendo in D_2 tutti i poligoni $q \in D_{12} + D_{13}$ e dividendo ciascun poligono $Q \in D_{11}$ in nuovi poligoni semplici e non semplici $q \subset Q$ tali che, se indichiamo per un momento con D_{20}

la collezione dei poligoni q che sono semplici e interni ai poligoni $Q \in D_{11}$, cioè $q \subset Q^0$, $Q \in D_{11}$, risulti

$$(9)\quad \begin{cases} \sum\limits_{q \in D_{20}} |u(q, T_3)| > \sum\limits_{Q \in D_{11}} U(Q, T_3) - 2^{-2}\sigma\,, \\ |M_{20}| < \eta_2\,, \quad \text{ove} \quad M_{20} = \sum\limits_{q \in D_{20}} T_3(q^*) = T_3\Big(\sum\limits_{q \in D_{20}} q^*\Big)\,, \\ \operatorname{diam} T(q) < \varrho_1/3 \quad \text{per ogni} \quad q \in D_{20},\ q \subset Q\,,\ Q \in D_{11}\,. \end{cases}$$

L'esistenza di D_2 segue dalle proposizioni (5.1; 5.2) applicate a ciascun poligono $Q \in D_{11}$ con un ε abbastanza piccolo.

Diciamo ora D_{21} la collezione di tutti i poligoni $q \in D_{20}$ con $T_3(q)[E_{23} - (M_{11})_{\varrho_1}] \neq 0$. Pertanto $T_3(q) \subset (M_{11})_{\varrho_1}$ per ogni $q \in D_{20} - D_{21}$. Inoltre per gli stessi poligoni q abbiamo che $T_3(q)$ è completamente contenuto in un cerchio g avente il centro in un punto di $(M_{11})_{\varrho_1}$, raggio $< \varrho_1/3$, e quindi interamente contenuto in $(M_{11})_{2\varrho_1}$. Di più se $c : (T_3, q^*)$, abbiamo $O(p; c) = 0$ al di fuori di g e pertanto anche in $E_{23} - (M_{11})_{2\varrho_1}$. Ne consegue che, se diciamo $\sum$ una qualsiasi somma estesa a tutti i poligoni semplici $q \in D_{20} - D_{21}$, risulta

$$(10)\quad \sum |u(q, T_3)| = \sum |(E_{23}) \int O(p; c)| = \sum |(M_{11})_{2\varrho_1} \int O(p; c)| \leqslant$$
$$\leqslant (M_{11})_{2\varrho_1} \int \sum |O(p; c)| \leqslant (M_{11})_{2\varrho_1} \int N(p; T_3, A) < 2 \cdot 2^{-3}\sigma = 2^{-2}\sigma\,.$$

Avendo ora definito D_{21}, possiamo definire D_{22} e D_{23} ponendo $D_{20} - D_{21}$ e D_{12} in D_{22}, ponendo D_{13} in D_{23}, ponendo in D_{22} ogni rimanente poligono semplice $q \in D_2$, $q \subset Q$, e ponendo in D_{23} ogni poligono non semplice $q \in D_2$, $q \subset Q$. Si noti che l'intera collezione $D_{20} - D_{21}$ è in D_{22}. Abbiamo così definito la suddivisione $D_2 = D_{21} + D_{22} + D_{23}$ di F in poligoni semplici $q \in D_{21} + D_{22}$ e non semplici $q \in D_{23}$ tali che $D_{12} \subset D_{22}$, $D_{13} \subset D_{23}$. Se denotiamo con $\sum^{21}, \sum^{22}, \sum^{23}$ ogni somma estesa a tutti i poligoni $q \in D_{21}$, D_{22}, D_{23} rispettivamente, allora abbiamo

$$D_{12} \subset D_{22}\,, \quad D_{13} \subset D_{23}\,, \quad \sum\nolimits^{21} q \subset \sum\nolimits^{11} q\,;$$

$$\operatorname{diam} T(q) < \min[\sigma, \varrho_1/3] \quad \text{per ogni} \quad q \in \mathfrak{D}_2\,, \quad q \subset Q\,, \quad Q \in D_{11}\,;$$

$$|M_{21}| < \eta_2\,, \quad \text{ove} \quad M_{21} = \sum\nolimits^{21} T_3(q^*) = T_3\Big(\sum\nolimits^{21} q^*\Big)\,;$$
$$T_3(q)\,[E_{23} - (M_{11})_{\varrho_1}] \neq 0 \quad \text{per ogni} \quad q \in D_{21}\,,$$

e inoltre

$$\sum\nolimits^{21} |u(q, T_3)| = \Big(\sum_{q \in D_{20}} - \sum\Big)\, |u(q, T_3)| >$$
$$> \sum\nolimits^{11} U(Q, T_3) - 2^{-2}\sigma - 2^{-2}\sigma \geqslant \sum\nolimits^{11} |u(Q, T_3)| - 2^{-1}\sigma\,.$$

Finalmente fisseremo un numero $\varrho_2 > 0$ in modo tale che

$$|(M_{21})_{2\varrho_2}| < |M_{21}| + \eta_2 < 2\eta_2 .$$

Possiamo ripetere successivamente il ragionamento sopra indicato. Otterremo per ogni $i = 2, 3, ..., N$ una suddivisione $D_i = D_{i1} + D_{i2} + D_{i3}$ di A in: (1) poligoni semplici $q \in D_{i1}$ con $q \subset Q^0$, $Q \in D_{i-1,1}$; (2) poligoni semplici $q \in D_{i2}$ con $q \subset Q$, $Q \in D_{i-1,1}$, oppure $q = Q \in D_{i-1,2}$; (3) poligoni non semplici $q \in D_{i3}$ con $q \subset Q$, $q \subset D_{i-1,1}$, oppure $q = Q \in D_{i-1,3}$. Se denotiamo con $\sum^{i1}, \sum^{i2}, \sum^{i3}$ somme estese a tutti i poligoni $q \in D_{i1}$, D_{i2}, D_{i3} rispettivamente, otteniamo

$$(11) \quad \begin{cases} D_{i-1,2} \subset D_{i2}, \quad D_{i-1,3} \subset D_{i3}, \quad \sum^{i1} q \subset \sum^{i-1,1} q ; \\ \text{diam}\, T(q) < \min[\sigma, \varrho_{i-1}/3] \quad \text{per ogni} \quad q \in D_i, \quad q \subset Q \quad \text{con } Q \in D_{i-1,1} ; \\ |M_{i1}| < \eta_i, \quad |(M_{i1})_{2\varrho_i}| < 2\eta_i, \quad \text{ove} \quad M_{i1} = \sum^{i1} T_3(q^*) = T_3(\sum^{i1} q^*); \\ T_3(q)\,[E_{23} - (M_{i-1,1})_{\varrho_{i-1}}] \neq 0 \quad \text{per ogni} \quad q \in D_{i1} ; \\ \sum^{i1} |u(q, T_3)| > \sum^{i-1,1} |u(q, T_3)| - 2^{-i+1}\sigma . \end{cases}$$

L'ultima relazione, valevole per $i = 2, 3, ..., N$, insieme alla (8), implica

$$\sum^{i1} |u(q, T_3)| > U(F, T_3) - 2^{-1}\sigma - 2^{-2}\sigma - ... - 2^{-i+1}\sigma > U(F, T_3) - \sigma ,$$

e, in virtù della (7) e di (3.1), anche

$$(12) \qquad \sum^{i1} |u(q, T_3)| > U(A, T_3) - 2\sigma \quad \text{per ogni} \quad i = 1, 2, ..., N.$$

Osserviamo ora che per ciascuno dei poligoni $q \in D_i$, $(i=1, 2, ..., N)$, la successione $u(q, T_{n3})$, $(n=1, 2, ...)$, è limitata, essendo $|u(q, T_{n3})| \leqslant U(q, T_{n3}) \leqslant \leqslant U(A, T_{n3}) = a(T_{n3}, A) \leqslant M$. Pertanto, mediante un numero finito di successive estrazioni, possiamo definire una sottosuccessione $[n]_6$ di interi, $[n]_6 \subset [n]_5$, tale che $\lim u(q, T_{n3})$ al tendere all'infinito di n con $n \in [n]_6$ esista per ciascuno dei poligoni semplici q delle collezioni finite D_i, $(i=1, 2, ..., N)$.

Consideriamo ora le somme

$$\Delta_i = \sum^{i1} |\lim u(q, T_{n3}) - u(q, T_3)| , \qquad (i=1, 2, ..., N) ,$$

ove lim è preso per $n \to \infty$ con $n \in [n]_6$, e dimostriamo che per almeno un intero $i=1, 2, ..., N$ si deve avere $\Delta_i < \sigma$.

Supponiamo che ciò non sia e cioè che $\Delta_i \geqslant \sigma$ per ogni $i=1, 2, ..., N$. Allora, per (8.1), si ha

$$\sum^{i1} |\underline{\lim}\, v(q, T_{n3}) - v(q, T_3)| \geqslant \Delta_i \geqslant \sigma , \qquad (i=1, 2, ..., N) ,$$

e quindi, se diciamo d_i la collezione dei poligoni $q \in D_{i+1} - D_{i+1,1}$, contenuti in qualche poligono $Q \in D_i$, risulta, in virtù di (8.2),

$$\underline{\lim} \sum_{q \in d_i} v_*(q, T_3) \geqslant \Delta_i \geqslant \sigma, \quad (i = 1, 2, \ldots, N). \tag{13}$$

Per $i = N$ si assuma $d_i = D_{N1}$ onde la relazione (13), per $i = N$, è una ovvia conseguenza della precedente e della continuità inferiore della funzione non negativa $v(q)$.

Si noti ora che i poligoni $q \in d_1$ (semplici o no) sono interni ai poligoni $Q \in D_{11}$ ma esterni ai poligoni $q \in D_{21}$, $q \subset Q, \ldots$, che i poligoni $q \in d_i$ (semplici o no) sono interni ai poligoni $Q \in D_{i1}$ ma esterni ai poligoni $q \in D_{i+1,1}, \ldots$, ove i può avere i valori $1, 2, \ldots, N$. Pertanto i poligoni $q \in d_1 + d_2 + \ldots + d_N$ sono tutti distinti e non sovrapposti, quindi

$$M \geqslant a(T_n, A) \geqslant a(T_{n3}, A) = V(A, T_{n3}) \geqslant \sum_{i=1}^{N} \sum_{q \in d_i} v(q, T_{n3})$$

per ogni $n \in [n]_6$ e quindi, se $n \to \infty$, $n \in [n]_6$, risulta, in virtù della (13),

$$M \geqslant \underline{\lim} \sum_{i=1}^{N} \sum_{q \in d_i} v_*(q, T_{n3}) \geqslant \sum_{i=1}^{N} \underline{\lim} \sum_{q \in d_i} v_*(q, T_{n3}) \geqslant N\sigma > M + 1 .$$

L'ipotesi $\Delta_i \geqslant \sigma$, $(i = 1, 2, \ldots, N)$, ha dunque condotto ad una contraddizione. Ciò assicura che deve essere $|\Delta_i| < \sigma$ per almeno uno dei valori $i = 1, 2, \ldots, N$ dell'indice i. (Per il ragionamento delle righe precedenti cfr. [**3**, (a), pag. 1389].) Sia i il più piccolo dei valori $i = 1, 2, \ldots, N$ per cui ciò accade, onde

$$\sum^{i1} |\lim u(q, T_{n3}) - u(q, T_3)| < \sigma , \tag{14}$$

ove il limite è preso per $n \to \infty$ con $n \in [n]_5$. Denoteremo con D_0 la collezione finita dei poligoni semplici $q \in D_{i1}$. Dalla (14) segue che esiste un intero $n_6 \geqslant n_5$ tale che, per ogni $n \geqslant n_6$, $n \in [n]_6$, risulta

$$\sum_{q \in D_0} |u(q, T_{n3}) - u(q, T_3)| < 2\sigma . \tag{15}$$

Denoteremo con $[n]$ la successione degli interi $n \in [n]_6$ con $n \geqslant n_6$. La collezione D_0 del Teorema I (n. **9**) sia ora l'attuale collezione D_0 e sia $[n]$ la successione di interi dello stesso Teorema. Allora, essendo $2\sigma < \varepsilon$, dalla (15) segue che la (4) del Teorema I (n. **9**) è completamente dimostrata.

Notiamo che, per ogni $n \in [n]$, ciascun poligono $q \in D_0$ è interno a una delle ν regioni poligonali $\pi \in \nabla_n$ (n. **14**). Per ogni $n \in [n]$ e $\pi \in \nabla_n$ diciamo $D(\pi)$ una qualunque suddivisione di π in poligoni semplici q in modo che ciascun poligono $q \in D_0$, $q \subset \pi^0$, sia anche un poligono $q \in D(\pi)$. Pertanto

$D(\pi)$ può considerarsi decomposta nelle due sottocollezioni $D_0(\pi)$, $D'(\pi)$ dei poligoni $q \in D(\pi)$ che sono poligoni $q \in D_0$ oppure che non sono poligoni $q \in D_0$. Si noti che, per ogni n,

$$D_0 = \sum_{\pi \in \nabla_n} D_0(\pi)$$

e, per ogni n, denoteremo con D la suddivisione di A definita da

$$D = D_0 + \sum_{\pi \in \nabla_n} D'(\pi) ,$$

cioè la suddivisione di A nei poligoni semplici $q \in D_0$ e nei poligoni q delle ν collezioni $D'(\pi)$, $\pi \in \nabla_n$. Le ν collezioni D_j, $(j=1, 2, ..., \nu)$, del Teorema I (n. **9**) siano ora le ν collezioni $D'(\pi)$ [per ognuno dei poligoni $\pi \in \nabla_n$]. Si noti che i poligoni $q \in D_0$ sono gli stessi per ogni n e che il numero ν delle collezioni $D'(\pi)$ pure non dipende da n, $n \in [n]$. Pertanto la (6) del Teorema I (n. **9**) è completamente provata.

Dal n. **14** sappiamo che diam $T_n(\pi) < 112\varepsilon_1 < \varepsilon$, diam $T(\pi) < 115\varepsilon_1 = \varepsilon$ per ogni $\pi \in \nabla_n$, $n \in [n]$. Poichè ogni $q \in D_0$ è interno a qualche $\pi \in \nabla_n$ risulta pure diam $T(q) < \varepsilon$ per ogni $q \in D_0$, e, per la stessa ragione, diam $T(\sum q) < \varepsilon$ ove $\sum$ è estesa a tutti i $q \in D'(\pi)$, per ogni $\pi \in \nabla_n$. Pertanto anche la (1) del Teorema I è provata.

Notiamo che, essendo T_n una trasformazione poliedrica, dal n. **4** risulta

$$u_*(\pi, T_{n3}) = \Big[\sum_{q \in D_0(\pi)} + \sum_{q \in D'(\pi)} \Big] u(q, T_{n3}) \tag{16}$$

per ogni $\pi \in \nabla_n$, $n \in [n]$.

Dalla (12) sappiamo che

$$\sum_{q \in D_0} |u(q, T_3)| > U(A, T_3) - 2\sigma , \tag{17}$$

e quindi, essendo la stessa somma $\leqslant U(A, T_3)$, risulta anche

$$0 \leqslant U(A, T_3) - \sum_{q \in D_0} |u(q, T_3)| < 2\sigma , \tag{18}$$

ciò che dimostra la prima parte della (3) del Teorema I (n. **9**).

D'altra parte, per ogni $n \in [n]$, si ha ora

$$U(A, T_3) - 2\sigma < \sum_{q \in D_0} |u(q, T_3)| = \sum_{\pi \in \nabla_n} \sum_{q \in D_0(\pi)} |u(q, T_3)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\pi \in \nabla_n} \Big[\sum_{q \in D_0(\pi)} + \sum_{q \in D'(\pi)} \Big] |u(q, T_3)| \leqslant U(A, T_3) ,$$

quindi

$$\sum_{\pi \in \nabla_n} \sum_{q \in D'(\pi)} |u(q, T_3)| < 2\sigma < \varepsilon ,$$

ciò che dimostra anche la seconda parte della (3) del Teorema I.

Notiamo che l'insieme

$$M_3 = \sum_{q \in D_0} T_3(q^*) = T_3(\sum_{q \in D_0} q^*) \subset E_{23}$$

ha misura $< \eta_i \leqslant \sigma < \varepsilon$ e perciò anche la (2) del Teorema I è provata.

Per ogni $n \in [n]_6$, per ogni $\pi \in \nabla_n$ e per ogni componente k di π^* dobbiamo considerare le curve $C'_n : (T, k)$, $C_n : (T_n, k)$ e le loro proiezioni C'_{n3}, C_{n3} sul piano E_{23}. Sappiamo già che esiste una curva rettificabile C_3 in E_{23} tale che $\| C_{n3}, C_3 \| \to 0$ al tendere di n all'infinito con $n \in [n]_6$. D'altra parte da $d(T_n, T, A) \to 0$ segue $d(T_{n3}, T_3, A) \to 0$ e quindi $\| C'_{n3}, C_{n3} \| \to 0$. Inoltre, da $\| C'_{n3}, C_3 \| \leqslant \| C'_{n3}, C_{n3} \| + \| C_{n3}, C_3 \|$ segue anche $\| C'_{n3}, C_3 \| \to 0$. Diciamo M_0 l'insieme compatto indipendente da n e di misura nulla, $M_0 = \sum [C_3] \subset E_{23}$, ricoperto dalle varie curve limiti C_3 in numero finito. Allora esistono un numero $\varrho_0 > 0$ tale che $|(M_0)_{\varrho_0}| < \eta_1$ (n. 1) ed un numero N tale che $\| C_{n3}, C_3 \| < \varrho_0$, $\| C'_{n3}, C_3 \| < \varrho_0$ per ogni $n \geqslant N$, $n \in [n]_6$. Se M_n, M'_n sono gli insiemi $M_n = \sum [C_{n3}]$, $M'_n = \sum [C'_{n3}]$ ricoperti da tutte le curve C_{n3} e C'_{n3} rispettivamente, allora si ha $M_n \subset (M_0)_{\varrho_0}$, $M'_n \subset (M_0)_{\varrho_0}$ per ogni $n \geqslant N$, $n \in [n]_6$ e perciò anche $|M_n| < \eta_1$, $|M'_n| < \eta_1$.

Per ogni n e per ogni $\pi \in \nabla_n$ consideriamo la differenza

$$\mu(\pi) = U_*(\pi, T_3) - \sum_{q \in D_0(\pi)} |u(q, T_3)| \geqslant 0$$

e osserviamo che, in forza anche della (18), si ha

$$\sum_{\pi \in \nabla_n} \mu(\pi) = \sum_{\pi \in \nabla_n} U_*(\pi, T_3) - \sum_{q \in D_0} |u(q, T_3)| \leqslant U(A, T_3) - \sum_{q \in D_0} |u(q, T_3)| < 2\sigma . \tag{19}$$

In virtù di (6.3) esiste ora, per ogni $\pi \in \nabla_n$, un insieme misurabile $B(\pi)$ tale che $|B(\pi)| \leqslant \mu(\pi)$ e tale che

$$\varphi(p; \pi, T_3) = \sum_{q \in D_0(\pi)} O(p; c) \tag{20}$$

per ogni $p \in E_{23} - [T_3(\pi^*) + B(\pi)]$, ove $c : (T_3, q^*)$. Se ora B_n è l'insieme

$$B_n = \sum_{\pi \in \nabla_n} B(\pi) ,$$

dalla (19) e dalle relazioni $|B(\pi)| \leqslant \mu(\pi)$, si ha $|B_n| < 2\sigma$. D'altra parte, in virtù della (20), risulta

$$\sum_{\pi \in \nabla_n} |u_*(\pi, T_3) - \sum_{q \in D_0(\pi)} u(q, T_3)| = \sum_{\pi \in \nabla_n} |(E_{23}) \int [\varphi(p; \pi, T_3) - \sum_{q \in D_0(\pi)} O(p; c)]| =$$

$$= \sum_{\pi \in \nabla_n} |[T_3(\pi^*) + B(\pi)] \int [\varphi(p; \pi, T_3) - \sum_{q \in D_0(\pi)} O(p; c)]| \leqslant$$

$$\leqslant (M_n' + B_n) \int \sum_{\pi \in \nabla_n} [|\varphi(p; \pi, T_3)| + \sum_{q \in D_0(\pi)} |O(p; c)|] \leqslant$$

$$\leqslant 2(M_n' + B_n) \int N_*(p; T_3, A) .$$

Essendo $|M_n' + B_n| < \sigma + 2\sigma = 3\sigma$, dalla definizione di σ risulta che l'ultimo integrale è $< 6(\varepsilon/15)$ e quindi

$$\sum_{\pi \in \nabla_n} |u_*(\pi, T_3) - \sum_{q \in D_0(\pi)} u(q, T_3)| < 2\varepsilon/3 . \tag{21}$$

Notiamo che le curve C_3 sono rettificabili e perciò, per la (1.1), le funzioni $O(p; C_3)$ sono integrabili in E_{23}. Segue che si può assumere il numero ϱ_0 definito avanti così piccolo che

$$(M_0)_{\varrho_0} \int \sum_{\pi \in \nabla_n} \sum{}^* |O(p; C_3)| < \sigma . \tag{22}$$

Le curve C_{n3} hanno lunghezze superiormente limitate e $\|C_{n3}, C_3\| \to 0$. Pertanto da (1.4) risulta

$$(E_{23}) \int O(p; C_{n3}) \to (E_{23}) \int O(p; C_3)$$

quando $n \to \infty$, $n \in [n]$. Si può assumere il numero N definito avanti così grande che

$$\sum_{\pi \in \nabla_n} |(E_{23}) \int [\sum{}^* O(p; C_{n3}) - \sum{}^* O(p; C_3)]| < \sigma \tag{23}$$

per ogni $n \geqslant N$, $n \in [n]$. Infine notiamo che, per ogni $n \geqslant N$, $n \in [n]$, $p \in E_{23} - (M_0)_{\varrho_0}$, risulta $O(p; C_{n3}) = O(p, C_{n3}') = O(p; C_3)$. Dunque, da $\varphi(p; \pi, T_{n3}) =$

$= \sum^* O(p; C_{n3})$, $\varphi(p; \pi, T_3) = \sum^* O(p; C'_{n3})$ per ogni $p \in E_{23} - (M_0)_{\varrho_0}$, risulta anche $\varphi(p; \pi, T_{n3}) = \varphi(p; \pi, T_3)$ per ogni $p \in E_{23} - (M_0)_{\varrho_0}$, $n \geqslant N$. Si ha ancora

$$\begin{aligned}
&\sum_{\pi \in \nabla_n} |u_*(\pi, T_{n3}) - u_*(\pi, T_3)| = \\
&\quad = \sum_{\pi \in \nabla_n} |(E_{23}) \int [\varphi(p; \pi, T_{n3}) - \varphi(p; \pi, T_3)]| = \\
&\quad = \sum_{\pi \in \nabla_n} |(M_0)_{\varrho_0} \int [\varphi(p; \pi, T_{n3}) - \varphi(p; \pi, T_3)]| = \\
&\quad = \sum_{\pi \in \nabla_n} |(M_0)_{\varrho_0} \int \{[\varphi(p; \pi, T_{n3}) - \textstyle\sum^* O(p; C_3)] + \sum^* O(p; C_3) - \varphi(p; \pi, T_3)\}| \leqslant \\
&\quad \leqslant \sum_{\pi \in \nabla_n} |(M_0)_{\varrho_0} \int [\textstyle\sum^* O(p; C_{n3}) - \sum^* O(p; C_3)]| + \displaystyle\sum_{\pi \in \nabla_n} |(M_0)_{\varrho_0} \int \textstyle\sum^* O(p; C_3)| + \\
&\qquad\qquad + (M_0)_{\varrho_0} \int \sum_{\pi \in \nabla_n} |\varphi(p; \pi, T_3)| \leqslant \\
&\quad \leqslant \sum_{\pi \in \nabla_n} |(E_{23}) \int [\textstyle\sum^* O(p; C_{n3}) - \sum^* O(p; C_3)]| + (M_0)_{\varrho_0} \int \displaystyle\sum_{\pi \in \nabla_n} \textstyle\sum^* |O(p; C_3)| + \\
&\qquad\qquad + (M_0)_{\varrho_0} \int N_*(p; T_3, A) .
\end{aligned}$$

Da $|(M_0)_{\varrho_0}| < \eta_1$ e dalle (23) e (22), segue

$$\sum_{\pi \in \nabla_n} |u_*(\pi, T_{n3}) - u_*(\pi, T_3)| \leqslant \sigma + \sigma + \sigma = 3\sigma . \tag{24}$$

Si ha ora, utilizzando la (16),

$$\begin{aligned}
&\sum_{\pi \in \nabla_n} |\sum_{q \in D'(\pi)} u(q, T_{n3})| = \sum_{\pi \in \nabla_n} |\sum_{q \in D'(\pi) + D_0(\pi)} u(q, T_{n3}) - \sum_{q \in D_0(\pi)} u(q, T_{n3})| = \\
&\quad = \sum_{\pi \in \nabla_n} |u_*(\pi, T_{n3}) - \sum_{q \in D_0(\pi)} u(q, T_{n3})| \leqslant \sum_{\pi \in \nabla_n} |u_*(\pi, T_{n3}) - u_*(\pi, T_3)| + \\
&\quad + \sum_{\pi \in \nabla_n} |u_*(\pi, T_3) - \sum_{q \in D_0(\pi)} u(q, T_3)| + \sum_{\pi \in \nabla_n} \sum_{q \in D_0(\pi)} |u(q, T_3) - u(q, T_{n3})| .
\end{aligned}$$

Pertanto dalle (24), (21), (15) e ricordando che $\sigma \leqslant \varepsilon/15$, si ha

$$\sum_{\pi \in \nabla_n} |\sum_{q \in D'(\pi)} u(q, T_{n3})| < 3\sigma + 2\varepsilon/3 + 2\sigma \leqslant \varepsilon/3 + 2\varepsilon/3 = \varepsilon ,$$

ciò che dimostra la (5) del Teorema I. Il Teorema I è in tal modo completamente dimostrato ove $[n]$ sia la stessa successione $[n]$ con $n \geqslant N$.

Bibliografia.

[1] V. E. BONONCINI, *Un teorema di continuità per integrali su superficie chiuse*, Rivista Mat. Univ. Parma **4**, 299-311 (1953).

[2] C. CARATHÉODORY, *Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete*, Math. Annalen **73**, 323-370 (1913).

[3] L. CESARI: (A) *Surface area*, Princeton University Press, Princeton 1954; (a) *Sui fondamenti geometrici dell'integrale classico per l'area delle superficie in forma parametrica*, Mem. Accad. Italia **13**, 1323-1481 (1943); (b) *Sull'area secondo Lebesgue delle superficie continue*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) **3**, 486-495 (1947); (c) *Sopra un teorema di approssimazione per le superficie in forma parametrica*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) **4**, 33-39 (1948); (d) *Sulla trasformazione degli integrali doppi*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **27**, 321-374 (1948); (e) *La nozione di integrale sopra una superficie in forma parametrica*, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) **13**, 77-117 (1944); (f) *Condizioni sufficienti per la semicontinuità degli integrali sopra una superficie in forma parametrica*, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) **14**, 47-79 (1945); (g) *Condizioni necessarie per la semicontinuità degli integrali sopra una superficie in forma parametrica*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **29**, 199-224 (1949); (h) *An existence theorem of calculus of variations for integrals on parametric surfaces*, Amer. J. Math. **74**, 265-295 (1952); (i) *Contours of a Fréchet surface*, Rivista Mat. Univ. Parma **4**, 173-194 (1953).

[4] B. v. KERÉKJÁRTÓ, *Vorlesungen über Topologie*, Bd. I, J. Springer, Berlin 1923.

[5] S. SAKS, *Theory of the Integral*, Warsaw-Lwow 1937.

[6] L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, Vol. I (1921), Vol. II (1923), N. Zanichelli, Bologna.

[7] G. T. WHYBURN, *Analytic Topology*, Amer. Math. Soc. Col. Pub., Vol. 28, 1942.