Rivista Mat. Univ. Parma 5, 3-54 (1954)

GIOVANNI RICCI (*)

Sull'andamento della differenza di numeri primi consecutivi. (**)

Sommario.

(*) Professore o. della Università di Milano. Indirizzo: Istituto Matematico, via C. Saldini 50, Milano, Italia.

(**) La presente ricerca venne iniziata qualche anno fa (vedasi [12], p. 199), ma

§ 1. – Definizioni. Problemi. I tre teoremi preliminari.

1.1. – Introduzione. Sia $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ la successione crescente 2, 3, 5, ... dei numeri primi e fissiamo l'attenzione sulla differenza $p_{n+1} - p_n$ come funzione di n. Un classico teorema di P. TCHEBYCHEFF assicura che, per ogni $\varepsilon > 0$, esistono infiniti valori n' di n tali che $p_{n'} < (1+\varepsilon)n' \ln n'$ e, da questo, come facile conseguenza, si deduce che, per ogni $\varepsilon > 0$, esistono infiniti valori n' di n tali che

$$p_{n'+1} - p_{n'} < (1 + \varepsilon) \ln p_{n'} .$$

P. ERDÖS [5] (1) ha dimostrato che esiste un numero $\gamma < 1$ tale che per infiniti valori n' di n si abbia $p_{n'+1} - p_{n'} < \gamma \ln p_{n'}$: cioè che

$$\liminf_{n \to +\infty} (p_{n+1} - p_n)/\ln p_n = E < 1 . \tag{1.1.1}$$

R. A. RANKIN [9] ha calcolato un valore possibile di γ e precisamente quello che risulta dalle maggiorazioni eseguite nel teorema di V. BRUN secondo lo schema di A. BUCHSTAB [3]; questo calcolo ha condotto al risultato $E < 57/59$. Già in precedenza, nell'indirizzo di G. H. HARDY e J. E. LITTLEWOOD, lo stesso R. A. RANKIN [8] era pervenuto al seguente risultato:

« Sia Θ l'estremo superiore dell'insieme delle parti reali degli zeri di tutte le funzioni $L(s, \chi)$ analitiche di $s = \sigma + it$, definite, per $\sigma > 1$, dalle ben note serie di DIRICHLET $\sum \chi(n)/n^s$. Allora, se $\gamma > (1+4\Theta)/5$, per N abbastanza grande, esiste almeno un p_n che soddisfa alle due condizioni

$$N < p_n < p_{n+1} < 2N, \qquad p_{n+1} - p_n < \gamma \ln p_n \text{ »},$$

e, più recentemente, esso ha dimostrato [10] l'analogo teorema con $\gamma = c(1+4\Theta)/5$, $c = 42/43$. Pertanto

$$E \leqq c(1 + 4\Theta)/5$$

e, nella « ipotesi estesa di RIEMANN », cioè nell'ipotesi $\Theta = 1/2$, risulta $E \leqq \leqq 3c/5 < 109/186 = 0{,}586\ldots$.

è stata completata in qualche sua parte di dettaglio soltanto recentemente. Ricevuto il 25-1-1954.

(1) I numeri in neretto entro parentesi [ ] si riferiscono alla Bibliografia collocata alla fine della presente Memoria.

Con la presente Memoria noi intendiamo portare un contributo allo studio dell'andamento della differenza $p_{n+1}-p_n$ di interi primi consecutivi: i problemi che abbiamo affrontato si possono porre, provvisoriamente e in forma grossolana, al modo seguente. Consideriamo l'intervallo $(1-\delta)\xi < p_n \leqq \xi$ di ampiezza $\delta\xi$: come si valuta il numero di quelle differenze $p_{n+1}-p_n$, con p_n in detto intervallo, che sono piccole? oppure, che hanno un valore intermedio? E come si devono scegliere, in funzione di p_n, i confini per classificare secondo la grandezza tali differenze, affinchè il loro numero abbia l'ordine di grandezza $\delta\xi/\ln\xi$? oppure sia asintotico a $\delta\xi/\ln\xi$, al crescere indefinitamente di ξ?

Il problema, in questo ordine di idee, si trova enunciato in G. RICCI [**12**] (2) e ivi si trova anche accennato un risultato che è contenuto in uno dei teoremi della presente Memoria (vedi Teor. X, n. **2.4** e l'Osservazione che lo segue).

1.2. – La funzione enumeratrice $D_\delta(\xi;\mu,\lambda)$ e la funzione somma $S_\delta(\xi;\mu,\lambda)$. Sia $0<\delta\leqq 1$ e $0\leqq\mu<\lambda\leqq+\infty$: denotiamo con

$$\boldsymbol{A}(\delta\mu\lambda)\ (\equiv \boldsymbol{A}(\xi;\ \delta\mu\lambda))$$

il campo dei numeri interi n pei quali sono verificate le seguenti condizioni (3):

$$\boldsymbol{A}(\delta\mu\lambda)\quad \begin{cases} \mu\ln p_n < p_{n+1}-p_n \leqq \lambda\ln p_n\,, \qquad (1-\delta)\xi < p_n \leqq \xi \\ \qquad (0<\delta\leqq 1, \quad 0\leqq\mu<\lambda\leqq+\infty)\,. \end{cases}$$

È evidente il significato da assegnare ai campi $\boldsymbol{A}(\delta 0\lambda)$, $\boldsymbol{A}(\delta\mu\infty)$, $\boldsymbol{A}(\delta 0\infty)$.

Poniamo:

$$D_\delta(\xi;\mu,\lambda) = \sum_{\boldsymbol{A}(\delta\mu\lambda)} 1 \qquad (\textit{funzione enumeratrice}), \tag{1.2.1}$$

$$S_\delta(\xi;\mu,\lambda) = \sum_{\boldsymbol{A}(\delta\mu\lambda)} (p_{n+1}-p_n) \qquad (\textit{funzione somma}). \tag{1.2.2}$$

Fissato ξ, ambedue le funzioni D_δ e S_δ sono monotone non decrescenti al crescere di δ, al crescere di λ e al decrescere di μ; esse sono additive per l'intervallo (μ,λ).

(2) Vedi G. RICCI [12], pp. 199-200.

(3) Il campo $\boldsymbol{A}(\delta\mu\lambda)$ dipende anche da ξ: per semplificare la scrittura, non essendovi pericolo di equivoco, tralasciamo questo indice.

In conseguenza del « Primzahlsatz » risulta, evidentemente,

$$D_\delta(\xi;\,0,\,\infty) = \sum_{(1-\delta)\xi<p_n\leqq\xi} 1 \sim \delta\xi/\ln\xi\,,$$

$$S_\delta(\xi;\,0,\,\infty) = \sum_{\dots}(p_{n+1}-p_n)\sim\delta\xi\,,$$

e quindi siamo condotti a « normalizzare » le due funzioni D_δ e S_δ considerando i rapporti

$$D_\delta(\xi;\,\mu,\,\lambda):(\delta\xi/\ln\xi)\,,\qquad S_\delta(\xi;\,\mu,\,\lambda):(\delta\xi)\,.$$

1.3. – La costante H di Shah e Wilson e i coefficienti $\mathcal{B}_\delta$ e $B_\delta(\mu,\lambda)$ di Viggo Brun. Seguendo P. Erdös [**5**], poniamo alla base della nostra ricerca il seguente teorema di Viggo Brun [**2**] (vedasi anche [**3**] e [**4**]).

« Sia $0<\delta\leqq 1$, $2a$ intero pari $\geqq 2$. Denotiamo con $Z_\delta(\xi;\,2a)$ il numero delle coppie $(p_n,\,p_m)$ di interi primi, tali che

$$p_m-p_n=2a\,,\qquad (1-\delta)\xi<p_n\leqq\xi\,,\qquad 2a\leqq\delta\xi\,;\tag{1.3.1}$$

poniamo

$$\Phi(2a)=\prod_{3\leqq p|a}\frac{p-1}{p-2}\,.\tag{1.3.2}$$

Allora, per $\xi\geqq\xi_0(\delta)$ abbastanza grande, risulta

$$Z_\delta(\xi;\,2a)<c\Phi(2a)\cdot\delta\xi/\ln^2\xi\,,\tag{1.3.3}$$

essendo c una costante assoluta (indipendente da a, δ, ξ). »

Normalizziamo la funzione $Z_\delta(\xi;\,2a)$ col porre

$$Z_\delta(\xi;\,2a)=z_\delta(\xi;\,2a)\cdot\Phi(2a)\cdot\delta\xi/\ln^2\xi\tag{1.3.4}$$

e fissiamo l'attenzione su $z_\delta(\xi;\,2a)$: la (1.3.3) si può scrivere

$$z_\delta(\xi;\,2a)<c\,.\tag{1.3.5}$$

Denotiamo con c' ogni numero positivo tale che risulti $z_\delta(\xi;\,2a)<c'$ per $0<2a\leqq\delta\xi$ e $\xi\geqq\xi_0(\delta,\,c')$ abbastanza grande (indipendente ancora da a): ogni c è anche un c'.

Denotiamo con $\mathcal{B}_\delta$ *l'estremo inferiore dei numeri* c', cioè poniamo

$$\mathcal{B}_\delta = \limsup_{\xi \to +\infty} z_\delta(\xi; 2a) \tag{1.3.6}$$

per $0 < 2a \leqq \delta\xi$, $\xi \to +\infty$. Pertanto $\mathcal{B}_\delta$ è il minimo numero reale non negativo tale che, ad ogni $\varepsilon > 0$, si può coordinare $\xi_0(\delta, \varepsilon)$ in guisa da avere $z_\delta(\xi; 2a) < \mathcal{B}_\delta + \varepsilon$ per $\xi \geqq \xi_0(\delta, \varepsilon)$ e $0 < 2a \leqq \delta\xi$.

Sul «coefficiente di VIGGO BRUN» $\mathcal{B}_\delta$ è noto che (vedi [**4**], [**15**], [**13**]) [1]

$$2H \leqq \mathcal{B}_\delta \leqq 16H\,, \tag{1.3.7}$$

dove

$$H = \prod_{p \geqq 3} \left\{1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right\} = 0.6601... \tag{1.3.8}$$

è la «costante di SHAH e WILSON» introdotta da questi autori [**14**] nello studio sulle formule empiriche attinenti al «problema di GOLDBACH».

Anzichè considerare l'intero intervallo $0 < 2a \leqq \delta\xi$, limitiamo il campo di variabilità dell'intero $2a$ e, per $0 < \delta \leqq 1$, $0 \leqq \mu < \lambda < +\infty$, poniamo:

$$\begin{cases} B_\delta(\mu, \lambda) = \limsup_{\xi \to +\infty} z_\delta(\xi; 2a), \\ \mu \ln \xi < 2a \leqq \lambda \ln \xi\,. \end{cases} \tag{1.3.9}$$

Fissati δ, μ, λ, per ogni $\varepsilon > 0$, risulta $z_\delta(\xi; 2a) < B_\delta(\mu, \lambda) + \varepsilon$ per ξ abbastanza grande; poichè è $\lambda \ln \xi < \xi$, per ξ abbastanza grande risulta anche

$$B_\delta(\mu, \lambda) \leqq \mathcal{B}_\delta \qquad (0 \leqq \mu < \lambda < +\infty)\,. \tag{1.3.10}$$

È evidente che

1) per $\mu' \leqq \mu < \lambda \leqq \lambda'$ è $B_\delta(\mu, \lambda) \leqq B_\delta(\mu', \lambda')$;

2) per $\mu < \tau < \lambda$ è $B_\delta(\mu, \lambda) = \operatorname{Max}(B_\delta(\mu, \tau), B_\delta(\tau, \lambda))$;

3) per la monotonia di $B_\delta(\mu, \lambda)$ esiste (finito) il limite di $B_\delta(\mu, \lambda)$ per $\lambda \to +\infty$ ed è [per la (1.3.10)]

$$\lim_{\lambda \to +\infty} B_\delta(\mu, \lambda) = B_\delta(\mu, \infty) \leqq \mathcal{B}_\delta\,.$$

---

[1] $\mathcal{B}_\delta \leqq 16H$ è dimostrato in [4] e in [15]; $\mathcal{B}_\delta \geqq 2H$ è dimostrato in [13]. Lo schema contenuto in [11] conduce alla più debole limitazione $\mathcal{B}_\delta \leqq 48H$ (vedi [13], p. 138).

1.4. – I coefficienti $\mathcal{C}_\delta$ e $C_\delta(\mu, \lambda)$ attinenti alle differenze $p_{n+1} - p_n$ di interi primi consecutivi. Denotiamo con

$$Z_\delta^*(\xi; 2a) \qquad (2a \text{ intero} \geqq 2)$$

il numero delle soluzioni n del sistema

$$(1.4.1) \qquad p_{n+1} - p_n = 2a\,, \qquad (1-\delta)\xi < p_n \leqq \xi\,, \qquad (0 < \delta \leqq 1)\,,$$

cioè

$$(1.4.2) \qquad Z_\delta^*(\xi; 2a) = \sum_{(1.4.1)} 1\,,$$

e poniamo, analogamente alla (1.3.4),

$$(1.4.3) \qquad Z_\delta^*(\xi; 2a) = z_\delta^*(\xi; 2a)\cdot \Phi(2a)\cdot \delta\xi/\ln^2 \xi$$

allo scopo di fissare l'attenzione sulla funzione «normalizzata» $z_\delta^*(\xi; 2a)$. È evidente che $Z_\delta^* \leqq Z_\delta$ e $z_\delta^* \leqq z_\delta$ e quindi il limite superiore

$$(1.4.4) \qquad \mathcal{C}_\delta = \limsup_{\xi\to+\infty} z_\delta^*(\xi; 2a)\,,$$

per $0 < 2a \leqq \delta\xi$ e $\xi \to +\infty$, risulta finito ed è

$$(1.4.5) \qquad 0 \leqq \mathcal{C}_\delta \leqq \mathcal{B}_\delta \; (\leqq 16H)\,.$$

Pertanto $\mathcal{C}_\delta$ è il minimo numero reale non negativo tale che, ad ogni $\varepsilon > 0$, si può coordinare $\xi_0(\delta, \varepsilon)$ in guisa da avere $z_\delta^*(\xi; 2a) < \mathcal{C}_\delta + \varepsilon$ per $\xi \geqq \xi_0(\delta, \varepsilon)$ e $0 < 2a \leqq \delta\xi$.

Accanto a $\mathcal{C}_\delta$ introduciamo una funzione $C_\delta(\mu, \lambda)$ che riguarda l'intervallo (μ, λ) [analoga al coefficiente $B_\delta(\mu, \lambda)$ definito in (1.3.9)]

$$(1.4.6) \qquad \begin{cases} C_\delta(\mu, \lambda) = \limsup_{\xi\to+\infty} z_\delta^*(\xi; 2a) & (0 < \delta \leqq 1,\; 0 \leqq \mu < \lambda < +\infty)\,, \\ \text{per} \quad \mu \ln \xi < 2a \leqq \lambda \ln \xi & \text{e} \quad \xi \to +\infty\,. \end{cases}$$

È evidente che

1) se $\mu' \leqq \mu < \lambda \leqq \lambda'$ è anche $C_\delta(\mu, \lambda) \leqq C_\delta(\mu', \lambda')$;

2) se $\mu < \tau < \lambda$ è anche $C_\delta(\mu, \lambda) = \operatorname{Max}\,(C_\delta(\mu, \tau),\, C_\delta(\tau, \lambda))$;

3) $C_\delta(\mu, \lambda) \leqq B_\delta(\mu, \lambda)$;

4) esiste finito il limite

$$\lim_{\lambda \to +\infty} C_\delta(\mu, \lambda) = C_\delta(\mu, \infty) \leqq \mathcal{C}_\delta \leqq \mathcal{B}_\delta \; (\leqq 16H) . \tag{1.4.7}$$

[La 4) segue dal fatto che $C_\delta(\mu, \lambda)$ è monotona e per ξ abbastanza grande l'intervallo $\mu \ln \xi < 2a \leqq \lambda \ln \xi$ è interno all'intervallo $0 < 2a \leqq \delta\xi$.]

1.5. – I coefficienti $\mathcal{C}_\delta(\{\xi_s\})$ e $C_\delta(\{\xi_s\}; \mu, \lambda)$ calcolati lungo una successione $\{\xi_s\}$. Assegnata una successione

$$\{\xi_s\} \qquad \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_s,\ \ldots \qquad (\xi_s < \xi_{s+1},\ \xi_s \to +\infty),$$

si possono considerare le due funzioni

$$Z_\delta^*(\xi_s;\, 2a), \qquad z_\delta^*(\xi_s;\, 2a),$$

dove ξ_s varia lungo la successione $\{\xi_s\}$, e, in perfetta analogia con (1.4.4) e (1.4.6), possiamo porre, per $0 < \delta \leqq 1$,

$$\begin{cases} \mathcal{C}_\delta(\{\xi_s\}) = \limsup\limits_{s \to +\infty} z_\delta^*(\xi_s;\, 2a) \\ 0 < 2a \leqq \delta\xi_s\,, \quad s \to +\infty, \end{cases} \tag{1.5.1}$$

e, per $0 < \delta \leqq 1$, $0 \leqq \mu < \lambda < +\infty$,

$$\begin{cases} C_\delta(\{\xi_s\};\, \mu, \lambda) = \limsup\limits_{s \to +\infty} z_\delta^*(\xi_s;\, 2a) \\ \mu \ln \xi_s < 2a \leqq \lambda \ln \xi_s\,, \quad s \to +\infty\,. \end{cases} \tag{1.5.2}$$

È evidente che, per ogni successione $\{\xi_s\}$, risulta

$$\mathcal{C}_\delta(\{\xi_s\}) \leqq \mathcal{C}_\delta\,, \qquad C_\delta(\{\xi_s\};\, \mu, \lambda) \leqq C_\delta(\mu, \lambda) \tag{1.5.3}$$

e, inoltre, per ognuna di queste limitazioni esiste una successione $\{\xi_s\}$ la quale dà luogo al segno eguale.

1.6. – I tre teoremi preliminari. Incominciamo con l'enunciare alcune limitazioni che legano la funzione enumeratrice D_δ e la funzione somma S_δ con il coefficiente C_δ. Per comodità del lettore ripetiamo qui le due definizioni (vedi

n. **1.2**)

$$D_\delta(\xi;\,\mu,\lambda)=\sum_A 1\,,\qquad S_\delta(\xi;\,\mu,\lambda)=\sum_A (p_{n+1}-p_n)\,, \tag{1.6.1}$$

dove $A=A(\delta\mu\lambda)=A(\xi;\,\delta\mu\lambda)$ è il campo degli interi n pei quali

$$\begin{cases} \mu\ln p_n<p_{n+1}-p_n\leqq\lambda\ln p_n\,, \qquad (1-\delta)\xi<p_n\leqq\xi\,, \\ \qquad (0<\delta\leqq 1,\qquad 0\leqq\mu<\lambda\leqq+\infty)\,. \end{cases} \tag{1.6.2}$$

Teorema I. *Sia* $0<\delta\leqq 1$, $0\leqq\mu<\lambda<+\infty$; *allora*

$$D_\delta(\xi;\,\mu,\lambda)\leqq\frac{C_\delta(\mu,\lambda)}{2H}(\lambda-\mu)\frac{\delta\xi}{\ln\xi}+o\left(\frac{\delta\xi}{\ln\xi}\right), \tag{1.6.3}$$

quando $\xi\to+\infty$.

Teorema II. *Sia* $0<\delta\leqq 1$, $0\leqq\mu<\lambda<+\infty$; *allora*

$$S_\delta(\xi;\,\mu,\lambda)\leqq\frac{C_\delta(\mu,\lambda)}{4H}(\lambda^2-\mu^2)\delta\xi+o(\delta\xi)\,, \tag{1.6.4}$$

quando $\xi\to+\infty$.

Teorema III. *Sia* $0<\delta\leqq 1$, $0\leqq\mu<\lambda<+\infty$, $C_\delta(\mu,\lambda)>0$: *si scelga la funzione* $\lambda_1(\xi)$ *in guisa da avere*

$$D_\delta(\xi;\,\mu,\lambda)=\frac{C_\delta(\mu,\lambda)}{2H}\{\lambda_1(\xi)-\mu\}\frac{\delta\xi}{\ln\xi}\,. \tag{1.6.5}$$

Allora, per $\xi\to+\infty$ *risulta*

$$S_\delta(\xi;\,\mu,\lambda)\geqq\frac{C_\delta(\mu,\lambda)}{4H}\{\lambda_1^2(\xi)-\mu^2\}\,\delta\xi-o(\delta\xi)\,. \tag{1.6.6}$$

Osservazioni: I) *I Teoremi* I, II, III *continuano a sussistere quando la variabile* $\xi\to+\infty$ *lungo una successione* $\{\xi_s\}$ ($\xi_s\to+\infty$ *per* $s\to+\infty$) *e in luogo del coefficiente* $C_\delta(\mu,\lambda)$ *si sostituisce quello (minore o eguale ad esso)*

$$C_\delta(\{\xi_s\};\,\mu,\,\lambda)\,.$$

Questa osservazione ci consentirà di indagare più profondamente la struttura della successione $p_{n+1}-p_n$.

II) Se $C_\delta(\mu, \lambda) = 0$, i due primi teoremi ci dànno

$$D_\delta(\xi;\mu,\lambda) = o(\delta\xi/\ln\xi)\,, \qquad S_\delta(\xi;\mu,\lambda) = o(\delta\xi)\,,$$

mentre per l'ultimo teorema $\lambda_1(\xi)$ non si può definire: in questo caso la (1.6.6) è sempre valevole poichè $S_\delta(\xi;\mu,\lambda) \geqq 0$.

III) Per il Teorema I la funzione $\lambda_1(\xi)$ del Teorema III verifica la disuguaglianza $\lambda_1(\xi) \leqq \lambda + o(1)$ per $\xi \to +\infty$.

IV) Sia $\mathcal{K} \geqq C_\delta(\mu, \lambda)$, allora i Teoremi I, II, III rimangono valevoli anche quando si sostituisce $\mathcal{K}$ a $C_\delta(\mu, \lambda)$. Pei primi due l'affermazione è ovvia; per il terzo essa si stabilisce subito osservando che, se $c > 0$, $l > m \geqq 0$, $x > 0$, $y > 0$, dall'eguaglianza

$$c(l-m) = (c+x)(l-y-m)$$

segue

$$c(l^2-m^2) > (c+x)\{(l-y)^2-m^2\}\,.$$

Infatti

$$\begin{aligned}(c+x)\{(l-y)^2-m^2\} &= (c+x)(l-y-m)(l-y+m)\\ &= c(l-m)(l-y+m)\\ &= c(l^2-m^2) - yc(l-m)\\ &< c(l^2-m^2)\,.\end{aligned}$$

V) I tre teoremi sussistono se in luogo di $C_\delta(\mu, \lambda)$ si sostituisce $\mathcal{C}_\delta$ o anche $16H$: quest'ultimo valore ci dà le valutazioni espressive seguenti:

$$\begin{aligned}D_\delta(\xi;\mu,\lambda) &\leqq 8(\lambda-\mu)\,\delta\xi/\ln\xi + o(\delta\xi/\ln\xi)\,,\\ S_\delta(\xi;\mu,\lambda) &\leqq 4(\lambda^2-\mu^2)\,\delta\xi \quad + o(\delta\xi)\,.\end{aligned}$$

Da $D_\delta(\xi;\mu,\lambda) = 8\{\lambda_1(\xi)-\mu\}\delta\xi/\ln\xi$ segue

$$S_\delta(\xi;\mu,\lambda) \geqq 4\{\lambda_1^2(\xi)-\mu^2\}\,\delta\xi - o(\delta\xi)\,.$$

VI) La dimostrazione di questi tre teoremi preliminari verrà ottenuta al n. **6.4**, dopo la preparazione di un gruppo di lemmi (vedi §§ **5**, **6**).

§ 2. - Altri risultati.

Veniamo ad esporre altri risultati che si ottengono come corollari dei tre teoremi preliminari del n. **1.6.** Le proposizioni riguarderanno le successioni $\{\xi_s\}$ crescenti e divergenti a $+\infty$ ($\xi_s < \xi_{s+1}$, $\xi_s \to +\infty$), senza escludere che ξ_s possa essere anche la successione completa degli interi naturali.

Avvertiamo che, tutte le volte che si presenteranno i coefficienti $C_\delta(0, \mu)$, $C_\delta(\mu, \lambda)$, ecc., ad essi potranno sostituirsi quelli analoghi attinenti alla successione $\{\xi_s\}$, $C_\delta(\{\xi_s\}; 0, \mu)$, $C_\delta(\{\xi_s\}; \mu, \lambda)$, ecc., senza che le proposizioni cessino di valere; anzi, esse risulteranno in questo modo rinforzate.

Le relazioni di limite saranno tutte intese per $s \to +\infty$ o per $\xi \to +\infty$, come apparirà in modo ovvio. Ogni relazione asintotica $f(\xi) \sim 0 \cdot g(\xi)$ è da interpretarsi, secondo una convenzione abituale, come $f(\xi) = o(g(\xi))$, cioè $f(\xi)/g(\xi) \to 0$.

2.1. - Sul campo $A(\delta 0 \mu)$ « quasi-pieno ». Un campo $A(\delta\mu\lambda)$ si dirà *quasi-pieno* quando il numero degli interi n che gli appartengono è asintotico, per $\xi \to +\infty$, al numero degli interi primi p_n pei quali $(1-\delta)\xi < p_n \leqq \xi$; in base al « Primzahlsatz », un campo $A(\delta\mu\lambda)$ è quasi-pieno se, e soltanto se, il numero degli interi n in esso contenuti è $\sim \delta\xi/\ln \xi$.

È evidente la analoga nozione di campo $A(\delta\mu\lambda)$ *quasi-pieno lungo una successione* $\{\xi_s\}$.

Teorema IV. - *Se esistono una successione* $\{\xi_s\}$ *e un numero reale e positivo (finito)* μ *pei quali sia*

$$D_\delta(\xi_s;\, 0, \mu) \sim \delta\xi_s/\ln \xi_s\,, \tag{2.1.1}$$

allora sono soddisfatte le condizioni seguenti:

$$C_\delta(0, \mu) \geqq H \cdot \mathrm{Max}\left(\frac{2}{\mu},\, 1\right), \tag{2.1.2}$$

$$S_\delta(\xi_s;\, 0, \mu) \geqq \frac{H}{C_\delta(0, \mu)} \cdot \delta\xi_s - o(\delta\xi_s)\,. \tag{2.1.3}$$

Osservazione. Poichè $C_\delta(0, \mu) \leqq \mathcal{C}_\delta \leqq 16H$, la (2.1.2) e la (2.1.3) ci dànno

$$\mu \geqq 2H/\mathcal{C}_\delta \geqq 1/8\,, \tag{2.1.4}$$

$$S_\delta(\xi_s;\, 0, \mu) \geqq \delta\xi_s/16 - o(\delta\xi_s)\,. \tag{2.1.5}$$

Questo teorema è un immediato corollario del teorema seguente.

2.2. – Ancora sul campo $A(\delta 0 \mu)$.

Teorema V. *Se lungo* $\{\xi_s\}$ *vale*

$$D_\delta(\xi_s;\, 0,\, \mu) \sim A \cdot \delta\xi_s / \ln \xi_s \qquad (0 \leqq A \leqq 1), \tag{2.2.1}$$

allora, se $C_\delta(0, \mu) > 0$, *sono soddisfatte le condizioni seguenti:*

$$C_\delta(0, \mu) \geqq H \cdot A \cdot \mathrm{Max}\left\{\frac{2}{\mu},\ 2 - A\right\}, \tag{2.2.2}$$

$$\frac{H}{C_\delta(0, \mu)} A^2 \cdot \delta\xi_s - o(\delta\xi_s) \leqq S_\delta(\xi_s;\, 0,\, \mu) \leqq \frac{C_\delta(0, \mu)}{4H} \mu^2 \delta\xi_s + o(\delta\xi_s)\,. \tag{2.2.3}$$

Quando $0 \leqq A < 1$ *risulta anche*

$$\mu \leqq \frac{1 - A^2 \cdot H / C_\delta(0, \mu)}{1 - A} \tag{2.2.4}$$

e si verifica almeno una delle due disuguaglianze

$$C_\delta(0, \mu) \geqq H\,, \qquad A \leqq 1 - \sqrt{1 - C_\delta(0, \mu)/H}\,. \tag{2.2.5}$$

Sia $C_\delta(0, \mu) = 0$; *allora* $A = 0$ *e* $\mu \leqq 1$. *Inoltre*

$$C_\delta(0, \mu) > 0 \quad \textit{per} \quad \mu > 1\,. \tag{2.2.5$'$}$$

Osservazione. Essendo $C_\delta(0, \mu) \leqq \mathcal{C}_\delta \leqq 16H$ abbiamo a maggior ragione

$$\mu \geqq HA/8\,, \tag{2.2.6}$$

$$HA^2 \delta\xi_s/16 - o(\delta\xi_s) \leqq S_\delta \leqq 4\mu^2\, \delta\xi_s/H + o(\delta\xi_s)\,, \tag{2.2.7}$$

$$\mu \leqq (1 - A^2/16)/(1 - A)\,, \qquad (0 \leqq A < 1)\,. \tag{2.2.8}$$

Dimostrazione. Sia $C_\delta(0, \mu) > 0$.

La (1.6.3) (Teor. I), scritta per $(0, \mu)$ in luogo di (μ, λ), unita alla (2.2.1), ci dà $A \leqq \mu \cdot C_\delta(0, \mu)/(2H)$ che è la prima parte di (2.2.2).

La (1.6.4) (Teor. II) scritta per $(0, \mu)$ in luogo di (μ, λ) ci dà la parte a destra di (2.2.3).

La (1.6.5) (Teor. III), scritta per $(0, \mu)$ in luogo di (μ, λ), unita alla (2.2.1), ci dà

$$\lambda_1(\xi) = \frac{2H}{C_\delta(0, \mu)} \{A + o(1)\}$$

e la (1.6.6) prende la forma

$$S_\delta(\xi_s;\, 0,\, \mu) \geqq \frac{C_\delta(0, \mu)}{4H} \cdot \frac{4H^2}{C_\delta^2(0, \mu)} \{A + o(1)\}^2 \cdot \delta\xi_s - o(\delta\xi_s)$$

che, semplificata, coincide con la parte a sinistra di (2.2.3). D'altronde è

$$\delta\xi_s \sim S_\delta(\xi_s;\, 0,\, +\infty) = S_\delta(\xi_s;\, 0,\, \mu) + S_\delta(\xi_s;\, \mu,\, +\infty) \geqq$$

$$\geqq \frac{H}{C_\delta(0,\,\mu)} \Lambda^2 \cdot \delta\xi_s + \mu \cdot D_\delta(\xi_s;\, \mu,\, +\infty) \ln \xi_s - o(\delta\xi_s) =$$

$$= \left\{ \frac{H}{C_\delta(0,\,\mu)} \Lambda^2 + \mu(1-\Lambda) - o(1) \right\} \delta\xi_s ,$$

da cui segue

$$\frac{H}{C_\delta(0,\,\mu)} \Lambda^2 - \mu\Lambda - (1-\mu) \leqq 0 .$$

Se $\Lambda = 1$ risulta $C_\delta(0, \mu) \geqq H$ che è la seconda parte di (2.2.2).

Se $0 \leqq \Lambda < 1$ si ricava la (2.2.4); questa, unita alla $\mu \geqq 2H\Lambda/C_\delta(0, \mu)$, col confronto dei secondi membri ci dà

$$\gamma\Lambda^2 - 2\gamma\Lambda + 1 \geqq 0 \qquad [\gamma = H/C_\delta(0,\,\mu)]$$

e si ricava la seconda parte di (2.2.2).

Le (2.2.5) risultano subito da questa disequazione di 2° grado in Λ.

Sia $C_\delta(0, \mu) = 0$: allora la (1.6.3) ci dà, come sopra, $\Lambda \leqq \mu C_\delta(0, \mu)/(2H) = 0$ e il ragionamento svolto sopra ci dà anche

$$\delta\xi_s \sim S_\delta(\xi_s;\, 0,\, +\infty) \geqq S_\delta(\xi_s;\, \mu,\, +\infty) \geqq$$

$$\geqq \mu \cdot D_\delta(\xi_s;\, \mu,\, +\infty) \ln \xi_s =$$

$$= \{\mu(1-\Lambda) + o(1)\}\, \delta\xi_s = \{\mu + o(1)\}\, \delta\xi_s$$

e quindi $\mu \leqq 1$ e vale (2.2.5)'.

Il teorema risulta così completamente dimostrato.

Come corollario della disuguaglianza (2.2.8) si ottiene il seguente

Teorema VI. *Per ogni* $\varepsilon > 0$, *risulta*

$$D_\delta(\xi;\, 0,\, \mu) > (1-\varepsilon)\, \delta\xi/\ln \xi \tag{2.2.9}$$

quando è $\mu \geqq (15 + 2\varepsilon)/(16\varepsilon)$ *e* ξ *è abbastanza grande.*

Dimostrazione. Ponendo $\Lambda = 1 - \varepsilon$ in (2.2.8) otteniamo $\mu \leqq$

$\leqq (15 + 2\varepsilon - \varepsilon^2)/(16\varepsilon)$; da cui segue l'asserto, che vale per $\xi \to +\infty$ in modo generale.

2.3. – Sul campo $A(\delta\lambda\infty)$. I due campi $A(\delta 0\lambda)$ e $A(\delta\lambda\infty)$ sono complementari e sussistono le due relazioni asintotiche evidenti

$$D_\delta(\xi;\, 0,\, \lambda) + D_\delta(\xi;\, \lambda,\, +\infty) \sim \delta\xi/\ln\xi\,,$$
$$S_\delta(\xi;\, 0,\, \lambda) + S_\delta(\xi;\, \lambda,\, +\infty) \sim \delta\xi\,.$$

In base a questa osservazione si può immediatamente enunciare la seguente proposizione che è duale del Teorema V.

Teorema VII. *Sia* $0 \leqq \lambda$ *e*

$$D_\delta(\xi_s;\, \lambda,\, +\infty) \sim \Lambda\cdot\delta\xi_s/\ln\xi_s\,; \tag{2.3.1}$$

allora sono soddisfatte le condizioni seguenti:

$$C_\delta(0,\lambda) \geqq H(1-\Lambda)\,\mathrm{Max}\left\{\frac{2}{\lambda}\,,\ 1+\Lambda\right\}, \tag{2.3.2}$$

$$S_\delta(\xi_s;\, \lambda,\, +\infty)\ \begin{cases} \geqq \left(1 - \dfrac{C_\delta(0,\lambda)}{4H}\lambda^2\right)\delta\xi_s - o(\delta\xi_s)\,, \\[2ex] \leqq \left\{1 - (1-\Lambda)^2\dfrac{H}{C_\delta(0,\lambda)}\right\}\delta\xi_s + o(\delta\xi_s)\,. \end{cases} \tag{2.3.3}$$

In ogni caso è

$$\lambda\Lambda \leqq 1 - (1-\Lambda)^2 H/C_\delta(0,\lambda) \tag{2.3.4}$$

e si verifica una almeno delle due disuguaglianze

$$C_\delta(0,\lambda) \geqq H\,, \qquad \Lambda \geqq \sqrt{1 - C_\delta(0,\lambda)/H}\,. \tag{2.3.5}$$

Osservazione. Abbiamo a maggior ragione

$$S_\delta(\xi_s;\, \lambda,\, +\infty) \leqq \{1 - (1-\Lambda)^2 H/\mathcal{C}_\delta\}\delta\xi_s + o(\delta\xi_s)\,, \tag{2.3.6}$$

$$\lambda\Lambda \leqq 1 - (1-\Lambda)^2 H/\mathcal{C}_\delta\,, \tag{2.3.7}$$

e ancora

$$S_\delta(\xi_s;\ \lambda,\ +\infty) \leqq \{1-(1-\Lambda)^2/16\}\delta\xi_s + o(\delta\xi_s)\,, \tag{2.3.8}$$

$$\lambda\Lambda \leqq 1-(1-\Lambda)^2/16\,. \tag{2.3.9}$$

Possiamo svolgere alcune osservazioni per giungere a disuguaglianze che legano i tre numeri λ, Λ e $C_\delta(0, \lambda)$.

Teorema VIII. *Se per* $\lambda > 1$ *vale* (2.3.1) *allora*

$$\Lambda < \frac{1}{\lambda}\left\{1-\gamma\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)^2\right\}, \qquad [\gamma = H/C_\delta(0, \lambda)]\,, \tag{2.3.10}$$

e quindi anche

$$\Lambda < \frac{1-\gamma}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \qquad \text{per } \lambda \to +\infty\,. \tag{2.3.11}$$

Dimostrazione. Per $\lambda > 1$ è $C_\delta(0, \lambda) > 0$ [vedi (2.2.5)']. La (2.3.4) ci dà $\Lambda < 1/\lambda < 1$ e quindi sostituendo ancora nel secondo membro otteniamo una disuguaglianza che vale a maggior ragione ed è la (2.3.10), da cui segue la (2.3.11).

Teorema IX. *Per* $1 \leqq \lambda \leqq 2$ *risulta*

$$C_\delta(0, \lambda) \geqq H\cdot\frac{4(\lambda-1)}{\lambda^2}\,. \tag{2.3.12}$$

Per $\lambda \geqq 2$ *risulta*

$$C_\delta(0, \lambda) \geqq H\,. \tag{2.3.13}$$

Dimostrazione. Per $\lambda = 1$ il secondo membro di (2.3.12) è nullo e la proposizione è vera. Sia $\lambda > 1$; allora vale (2.3.4) che si può scrivere

$$\gamma\Lambda^2 + (\lambda - 2\gamma)\Lambda + (\gamma - 1) \leqq 0$$

e, poichè $\gamma > 0$, il discriminante deve essere positivo, cioè deve essere $\lambda^2 - 4\gamma\lambda + 4\gamma \geqq 0$ da cui $\gamma \leqq \lambda^2/\{4(\lambda-1)\}$, cioè la (2.3.12).

La funzione $C_\delta(0, \lambda)$ è monotona non decrescente e poichè $C_\delta(0, 2) \geqq H$ vale la (2.3.13).

2.4. – Sul campo $A(\delta\mu\lambda)$ « quasi-pieno ».

Teorema X. *Se esiste una successione $\{\xi_s\}$ e una coppia μ, λ di numeri reali $0 \leqq \mu < \lambda < +\infty$ tali che sia*

$$D_\delta(\xi_s;\, \mu,\, \lambda) \sim \delta\xi_s/\ln \xi_s\,, \tag{2.4.1}$$

allora è $C_\delta(\mu, \lambda) > 0$ e sono soddisfatte le condizioni seguenti:

$$S_\delta(\xi_s;\, \mu,\, \lambda) \begin{cases} \geqq \left\{\mu + \dfrac{H}{C_\delta(\mu,\lambda)}\right\}\delta\xi_s - o(\delta\xi_s)\,, \\[2mm] \leqq \dfrac{C_\delta(\mu,\lambda)}{4H}(\lambda^2-\mu^2)\,\delta\xi_s + o(\delta\xi_s)\,, \end{cases} \tag{2.4.2}$$

$$\mu \leqq 1 - \frac{H}{C_\delta(\mu,\lambda)}\,, \qquad \lambda \geqq \mu + \frac{2H}{C_\delta(\mu,\lambda)}\,, \tag{2.4.3}$$

$$C_\delta(\mu, \lambda) \geqq H\,. \tag{2.4.3)'$$

Osservazioni. I) Essendo $C_\delta(\mu, \lambda) \leqq \mathcal{C}_\delta \leqq 16H$ abbiamo a maggior ragione:

$$\mu \leqq 1 - H/\mathcal{C}_\delta\,, \qquad \lambda \geqq \mu + 2H/\mathcal{C}_\delta\,, \tag{2.4.4}$$

$$\mu \leqq 15/16\,, \qquad \lambda \geqq \mu + 1/8\,. \tag{2.4.5}$$

Conviene qui ripetere l'osservazione fatta al principio del § **2**, e cioè: Nelle disuguaglianze (2.4.2), (2.4.3), (2.4.3)' in luogo di $C_\delta(\mu, \lambda)$ si può sostituire il coefficiente $C_\delta(\{\xi_s\};\, \mu,\, \lambda)$, non maggiore del precedente e che quindi potrebbe venire a rinforzarle.

Conviene anche enunciare una parte del Teorema X in una forma negativa, e cioè:

Se è verificata una almeno delle due disuguaglianze

$$1 - \frac{H}{C_\delta(\mu,\lambda)} < \mu\,, \qquad \lambda < \mu + \frac{2H}{C_\delta(\mu,\lambda)}\,, \tag{2.4.6}$$

allora non esiste alcuna successione $\{\xi_s\}$ per la quale si abbia

$$D_\delta(\xi_s;\, \mu,\, \lambda) \sim \delta\xi_s/\ln \xi_s\,,$$

cioè, allora è

$$\limsup_{\xi\to+\infty} D_\delta(\xi;\, \mu,\, \lambda)\cdot \ln \xi/(\delta\xi) < 1\,. \tag{2.4.7}$$

La proposizione sussiste a maggior ragione quando, in luogo delle (2.4.6), si considerano le disuguaglianze:

$$1 - H/\mathcal{C}_\delta < \mu\,, \qquad \lambda < \mu + 2H/\mathcal{C}_\delta\,,$$

oppure:

$$15/16 < \mu\,, \qquad \lambda < \mu + 1/8\,.$$

Come corollario abbiamo:

Teorema X bis. *Per ogni* $\varepsilon > 0$, *è*

$$\limsup_{\xi \to +\infty} D_\delta(\xi;\, 0,\, 2H/\mathcal{C}_\delta - \varepsilon)\cdot \ln \xi/(\delta\xi) < 1\,, \tag{2.4.8}$$

$$\limsup_{\xi \to +\infty} D_\delta(\xi;\, 1 - H/\mathcal{C}_\delta + \varepsilon,\, +\infty)\cdot \ln \xi/(\delta\xi) < 1\,. \tag{2.4.9}$$

II) Questo risultato ci sembra interessante: esso ci segnala, in particolare, che la costante E di P. Erdös, definita in (1.1.1), soddisfa alla disuguaglianza (5)

$$E \leqq 1 - H/\mathcal{C}_\delta \; (\leqq 1 - H/\mathcal{B}_\delta)\,,$$

e quindi anche $E \leqq 15/16$: si confronti con i risultati di R. A. Rankin (n. **1.1**). Inoltre, esso pone in relazione la costante universale che ci interessa con delle costanti classiche; infine, viene ad essere maggiorata, accanto alla E, un'altra costante universale che non è inferiore a quella: si tratta della costante indicata con A in [**12**] (pag. 199), la quale è analoga alla E ed è definita trascurando una successione di posti n avente « densità nulla ».

Questo Teor. X è un immediato corollario del seguente Teor. XI, più generale, del quale esporremo la dimostrazione.

2.5. – Ancora sul campo $A(\delta\mu\lambda)$.

Teorema XI. *Sia* $0 \leqq \mu < \lambda < +\infty$ *e*

$$D_\delta(\xi_s;\, \mu,\, \lambda) \sim A\xi_s/\ln \xi_s\,. \tag{2.5.1}$$

Allora, se $C_\delta(\mu, \lambda) = 0$ *è anche* $A = 0$, *mentre, se* $C_\delta(\mu, \lambda) > 0$, *sono soddisfatte*

(5) In G. Ricci [12] si trova annunziato il risultato (del quale non venne mai pubblicata la dimostrazione) $E \leqq 1 - H/\mathcal{B}_\delta$: Vedi la pag. 199 dove le notazioni sono diverse: là è scritto β e $\overline{B}$ in luogo di $2H$ e $\mathcal{B}_\delta$.

le condizioni seguenti:

$$(2.5.2)\qquad S_\delta(\xi;\mu,\lambda)\begin{cases}\geqq\left\{\Lambda\mu+\dfrac{H}{C_\delta(\mu,\lambda)}\Lambda^2\right\}\delta\xi_s-o(\delta\xi_s)\,,\\[2mm] \leqq\dfrac{C_\delta(\mu,\lambda)}{4H}(\lambda^2-\mu^2)\,\delta\xi_s+o(\delta\xi_s)\,,\end{cases}$$

$$(2.5.3)\qquad \mu\leqq\frac{1}{\Lambda}-\Lambda\cdot\frac{H}{C_\delta(\mu,\lambda)}\,,\qquad\qquad \lambda\geqq\mu+\Lambda\cdot\frac{2H}{C_\delta(\mu,\lambda)}\,,$$

$$(2.5.3)'\qquad C_\delta(\mu,\lambda)\geqq H\cdot\Lambda^2\,.$$

Osservazione. Abbiamo a maggior ragione:

$$(2.5.4)\qquad S_\delta(\xi_s;\mu,\lambda)\geqq(\Lambda\mu+\Lambda^2H/\mathcal{C}_\delta)\,\delta\xi_s-o(\delta\xi_s)\,,$$

$$(2.5.5)\qquad \mu\leqq\frac{1}{\Lambda}-\Lambda\frac{H}{\mathcal{C}_\delta}\,,\qquad\qquad \lambda\geqq\mu+\Lambda\cdot\frac{2H}{\mathcal{C}_\delta}\,,$$

e ancora:

$$(2.5.6)\qquad S_\delta(\xi_s;\mu,\lambda)\geqq(\Lambda\mu+\Lambda^2/16)\,\delta\xi_s-o(\delta\xi_s)\,,$$

$$(2.5.7)\qquad \mu\leqq 1/\Lambda-\Lambda/16\,,\qquad \lambda\geqq\mu+\Lambda/8\,.$$

Nel caso particolare $\Lambda=1$ questo teorema si riduce al Teor. X.

Dimostrazione. La (1.6.3) (Teorema I) in unione alla (2.5.1) ci dà $\Lambda\leqq(\lambda-\mu)C_\delta(\mu,\lambda)/(2H)$ che è la seconda delle (2.4.3): in particolare se $C_\delta(\mu,\lambda)=0$ è anche $\Lambda=0$.

La parte maggiorante in (2.5.2) è la (1.6.4) del Teor. II.

Confrontando la (1.6.5) (Teor. III) e la (2.5.1) otteniamo

$$\lambda_1(\xi)=\mu+\frac{2H}{C_\delta(\mu,\lambda)}\{\Lambda+o(1)\}$$

e quindi:

$$\begin{aligned}\lambda_1^2(\xi)-\mu^2&=\{\lambda_1(\xi)-\mu\}\{\lambda_1(\xi)+\mu\}=\\&=2\gamma\{\Lambda+o(1)\}[2\mu+2\gamma\{\Lambda+o(1)\}]=\\&=4\gamma\Lambda(\mu+\gamma\Lambda)+o(1)\,,\end{aligned}$$

dove si è posto, per semplificare la scrittura,

$$\gamma = \gamma(\mu, \lambda) = H/C_\delta(\mu, \lambda) .$$

La (1.6.6) del Teor. III, tenendo conto di questa espressione di $\lambda_1^2(\xi) - \mu^2$ conduce alla parte minorante di (2.5.2).

Rimane da dimostrare la prima delle (2.5.3): per questo, basta osservare che $S_\delta(\xi_s;\, \mu, \lambda) \leqq \delta\xi_s + o(\delta\xi_s)$ e la parte minorante di (2.5.2), confrontata con questa, conduce all'asserto.

Il teorema risulta completamente dimostrato.

2.6. – Risultati riguardanti il numero delle piccole differenze $p_{n+1} - p_n$. Poniamo la seguente questione: A quale condizione sufficiente deve soddisfare il parametro $\mu > 0$ affinchè il numero $D_\delta(\xi;\, 0, \mu)$ abbia l'ordine di grandezza $\delta\xi/\ln\xi$? oppure sia $> \varrho\, \delta\xi/\ln\xi$? Si risponde con il seguente

Teorema XII. *Sia* $0 \leqq \varrho < 1$ *e*

$$\mu > \frac{1}{1-\varrho} - (1-\varrho)\, \frac{H}{C_\delta(\mu, \infty)}, \tag{2.6.1}$$

dove $C_\delta(\mu, \infty) = \lim_{\lambda \to +\infty} C_\delta(\mu, \lambda)$ $(\leqq \mathcal{C}_\delta)$; *allora, per* ξ *abbastanza grande, risulta*

$$D_\delta(\xi;\, 0, \mu) > \varrho\, \delta\xi/\ln\xi . \tag{2.6.2}$$

La (2.6.2) *vale a maggiore ragione se, in luogo della* (2.6.1), *il parametro* μ *soddisfa alla condizione*

$$\mu > \frac{1}{1-\varrho} - (1-\varrho)\, \frac{H}{\mathcal{C}_\delta}, \tag{2.6.3}$$

oppure a quella non meno restrittiva

$$\mu > \frac{1}{1-\varrho} - \frac{1-\varrho}{16} . \tag{2.6.4}$$

Osservazione. Poichè per $\varrho \to 0+$ il secondo membro di (2.6.3) tende a $1 - H/\mathcal{C}_\delta$, se ne deduce come corollario [in accordo col Teor. XI, vedi la la prima delle (2.5.5)] il seguente

Teorema XIII. *Per* $\mu > 1 - H/\mathcal{C}_\delta$ *è*

$$\liminf_{\xi \to +\infty} D_\delta(\xi;\, 0, \mu) \ln\xi/(\delta\xi) > 0 . \tag{2.6.5}$$

Per $\varrho \to 1-$ la stessa espressione diverge a $+\infty$ e pertanto essa non ci dice se, per qualche $\mu > 0$ (finito), è $D_\delta(\xi;\, 0, \mu) \sim \delta\xi/\ln\xi$.

La (2.6.4) si può scrivere nella forma

$$\varrho^2 - 2(8\mu + 1)\varrho + 16\mu - 15 > 0$$

e, ricordando che $0 \leqslant \varrho < 1$, essa è soddisfatta se e soltanto se $\varrho < 8\mu + 1 - 4\sqrt{4\mu^2 + 1}$; si conclude col seguente

Teorema XIV. *Per ogni $\varepsilon > 0$ e ξ abbastanza grande risulta*

$$D_\delta(\xi;\, 0, \mu) > (8\mu + 1 - 4\sqrt{4\mu^2 + 1} - \varepsilon)\,\delta\xi/\ln\xi\,. \tag{2.6.6}$$

Osservazione. Questa proposizione è significativa soltanto per quei valori di μ che rendono positiva l'espressione al secondo membro e quindi soltanto per $\mu > 15/16$.

Dalla (2.6.6) ricaviamo

$$D_\delta(\xi;\, 0, 1) > 0.055 \cdot \delta\xi/\ln\xi \tag{2.6.7}$$

e cioè:

Teorema XV. *Fissato $0 < \delta \leqq 1$, quando ξ è abbastanza grande, almeno il 55 per mille delle differenze $p_{n+1} - p_n$, con $(1 - \delta)\xi < p_n \leqq \xi$, verifica la disuguaglianza $p_{n+1} - p_n < \ln p_n$.*

Dimostrazione del Teor. XII. Dopo avere dedotti i Teor. XIII, XIV e XV immediatamente dal Teor. XII, ci rimane da dimostrare questo teorema. Esso è conseguenza dei Teoremi VIII e XI e si dimostrerà per assurdo. Supponiamo che, contro la (2.6.2), esista una successione $\{\xi_s\}$ tale che lungo di essa si abbia

$$D_\delta(\xi_s;\, 0, \mu) \sim A_1\, \delta\xi_s/\ln\xi_s\,, \qquad A_1 \leqq \varrho. \tag{2.6.5}$$

Il secondo membro di (2.6.1) è funzione continua crescente al crescere di ϱ e si può scegliere un numero $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo in guisa da avere ancora

$$\mu > \frac{1}{1 - \varrho - \varepsilon} - (1 - \varrho - \varepsilon)\,\frac{H}{C_\delta(\mu, \infty)}\,. \tag{2.6.6}$$

Scegliendo $\lambda > 1/\varepsilon$, pel Teor. VIII [vedi la (2.3.10)] risulta, per s abbastanza grande,

$$D_\delta(\xi;\ \lambda,\ +\infty) < \varepsilon \cdot \xi_s/\ln \xi_s$$

e si può estrarre da $\{\xi_s\}$ una successione parziale (che possiamo continuare a chiamare $\{\xi_s\}$) in guisa da avere

$$D_\delta(\xi_s;\ \lambda,\ +\infty) \sim \Lambda_3 \cdot \delta\xi_s/\ln \xi_s\,, \qquad \Lambda_3 \leqq \varepsilon. \tag{2.6.7}$$

Le (2.6.5) e (2.6.7) ci dànno

$$\begin{aligned} D_\delta(\xi_s;\ \mu,\ \lambda) &\sim \delta\xi_s/\ln \xi_s - D_\delta(\xi_s;\ 0,\ \mu) - D_\delta(\xi_s;\ \lambda, +\infty) \\ &\sim (1 - \Lambda_1 - \Lambda_3) \cdot \delta\xi_s/\ln \xi_s\,. \end{aligned}$$

Siamo nelle ipotesi del Teor. XI con $\Lambda = 1 - \Lambda_1 - \Lambda_3$ e quindi vale la (2.5.3) e tenendo presente la (2.6.6):

$$\mu \leqq \frac{1}{1 - \Lambda_1 - \Lambda_3} - (1 - \Lambda_1 - \Lambda_3)\,\frac{H}{C_\delta(\mu,\ \lambda)} \leqq \frac{1}{1 - \varrho - \varepsilon} - (1 - \varrho - \varepsilon)\,\frac{H}{C_\delta(\mu,\ \infty)} < \mu\,,$$

che è assurdo. Il teorema risulta dimostrato.

§ 3. – Indagine metrica sulla irregolarità della funzione enumeratrice D_δ e della funzione somma S_δ.

3.1. – Il lim inf **e il** lim sup **delle funzioni D_δ e S_δ normalizzate.** Si considerino le funzioni D_δ e S_δ « normalizzate » e cioè (vedi n. **1.2**) i rapporti

$$D_\delta(\xi;\ \mu,\ \lambda) : (\delta\xi/\ln \xi)\,, \qquad S_\delta(\xi;\ \mu,\ \lambda) : (\delta\xi)\ ;$$

conviene fissare l'attenzione sui seguenti minimi e massimi limiti:

Sia $0 < \delta \leqq 1$, $0 \leqq \mu < \lambda \leqq +\infty$; poniamo:

$$\left.\begin{matrix} \liminf\limits_{\xi \to +\infty} \\ \limsup\limits_{\xi \to +\infty} \end{matrix}\right\} D_\delta(\xi;\ \mu,\ \lambda) \cdot \ln \xi/(\delta\xi) = \left\{\begin{matrix} {}^*\Lambda_\delta(\mu,\ \lambda) \\ \Lambda_\delta^*(\mu,\ \lambda)\,, \end{matrix}\right. \tag{3.1.1}$$

$$\left.\begin{matrix} \liminf\limits_{\xi \to +\infty} \\ \limsup\limits_{\xi \to +\infty} \end{matrix}\right\} S_\delta(\xi;\ \mu,\ \lambda)/(\delta\xi) = \left\{\begin{matrix} {}^*\sigma_\delta(\mu,\ \lambda) \\ \sigma_\delta^*(\mu,\ \lambda)\,. \end{matrix}\right. \tag{3.1.2}$$

Le quattro funzioni di intervallo ${}^*\Lambda_\delta$, Λ_δ^*, ${}^*\sigma_\delta$, σ_δ^* possiedono evidentemente le seguenti proprietà:

1. In conseguenza del « Primzahlsatz » è:

$$\left\{\begin{aligned} &0 \leqq {}^*\Lambda_\delta(\mu, \lambda) \leqq \Lambda_\delta^*(\mu, \lambda) \leqq 1\,, \\ &0 \leqq {}^*\sigma_\delta(\mu, \lambda) \leqq \sigma_\delta^*(\mu, \lambda) \leqq 1\,. \end{aligned}\right. \tag{3.1.3}$$

2. Esse sono monotone non decrescenti al dilatarsi dell'intervallo, cioè per $\mu' \leqq \mu < \lambda \leqq \lambda'$ è

$$ {}^*\Lambda_\delta(\mu, \lambda) \leqq {}^*\Lambda_\delta(\mu', \lambda')\,, \quad \ldots, \quad \sigma_\delta^*(\mu, \lambda) \leqq \sigma_\delta^*(\mu', \lambda')\,. \tag{3.1.4}$$

3. Poichè $D_\delta(\xi; \mu, \lambda)$ e $S_\delta(\xi; \mu, \lambda)$ sono additive, le due funzioni ${}^*\Lambda_\delta(\mu, \lambda)$ e ${}^*\sigma_\delta(\mu, \lambda)$ sono *sopra-additive* mentre le due funzioni $\Lambda_\delta^*(\mu, \lambda)$ e $\sigma_\delta^*(\mu, \lambda)$ sono *sub-additive*. Cioè:

Per $\mu < \tau < \lambda$ *è*

$$\left\{\begin{aligned} &{}^*\Lambda_\delta(\mu, \lambda) \geqq {}^*\Lambda_\delta(\mu, \tau) + {}^*\Lambda_\delta(\tau, \lambda) \\ &\Lambda_\delta^*(\mu, \lambda) \leqq \Lambda_\delta^*(\mu, \tau) + \Lambda_\delta^*(\tau, \lambda)\,, \end{aligned}\right. \tag{3.1.5}$$

$$\left\{\begin{aligned} &{}^*\sigma_\delta(\mu, \lambda) \geqq {}^*\sigma_\delta(\mu, \tau) + {}^*\sigma_\delta(\tau, \lambda) \\ &\sigma_\delta^*(\mu, \lambda) \leqq \sigma_\delta^*(\mu, \tau) + \sigma_\delta^*(\tau, \lambda)\,. \end{aligned}\right. \tag{3.1.6}$$

4. Che cosa accade di queste funzioni al variare di δ? È evidente che per $0 < \delta < \delta' < 1$ si ha

$$\begin{matrix} D_\delta \\ S_\delta \end{matrix}(\xi; \mu, \lambda) \leqq \begin{matrix} D_{\delta'} \\ S_{\delta'} \end{matrix}(\xi; \mu, \lambda) \leqq \begin{matrix} D_1 \\ S_1 \end{matrix}(\xi; \mu, \lambda)\,.$$

Consideriamo i due rapporti

$$D_\delta(\xi; \mu, \lambda)/(\delta\xi)\,, \qquad D_{\delta'}(\xi; \mu, \lambda)/(\delta'\xi):$$

poichè per ogni ξ è $(1 - \delta')\xi < (1 - \delta)\xi < \xi$, l'intervallo dell'asse ξ al quale si riferisce il primo rapporto è parte di quello a cui si riferisce il secondo e, pertanto, fissato ξ si possono scegliere ξ' e ξ'' in guisa che risulti

$$(1 - \delta')\xi \leqq (1 - \delta)\xi' < \xi' \leqq \xi\,, \qquad (1 - \delta')\xi \leqq (1 - \delta)\xi'' < \xi'' \leqq \xi$$

e gli intervalli $((1 - \delta)\xi', \xi')$ e $((1 - \delta)\xi'', \xi'')$ siano rispettivamente quelli nei quali l'insieme degli interi n enumerati in D_δ risulti il meno denso e il più denso, cioè si abbia

$$D_\delta(\xi';\mu,\lambda)/(\delta\xi') \leqq D_{\delta'}(\xi;\mu,\lambda)/(\delta'\xi) \leqq D_\delta(\xi'';\mu,\lambda)/(\delta\xi'') .$$

D'altronde è

$$\log\xi' \sim \log\xi\,, \qquad \log\xi'' \sim \log\xi\,, \qquad (\text{per } \xi\to+\infty),$$

e si conclude: quando $0<\delta<\delta'<1$ abbiamo

$$(3.1.7) \qquad {}^*\!\varLambda_\delta(\mu,\lambda) \leqq {}^*\!\varLambda_{\delta'}(\mu,\lambda) \leqq \varLambda^*_{\delta'}(\mu,\lambda) \leqq \varLambda^*_\delta(\mu,\lambda) .$$

La considerazione perfettamente analoga vale per la somma S_δ e quindi è anche

$$(3.1.8) \qquad {}^*\sigma_\delta(\mu,\lambda) \leqq {}^*\sigma_{\delta'}(\mu,\lambda) \leqq \sigma^*_{\delta'}(\mu,\lambda) \leqq \sigma^*_\delta(\mu,\lambda) .$$

5. Conviene anche maggiorare lo scarto fra le funzioni attinenti a δ e quelle omonime attinenti a δ': a questo scopo osserviamo che, per il « Primzahlsatz », è

$$(3.1.9) \qquad \begin{cases} D_{\delta'} - \{\delta'-\delta+o(1)\}\xi/\ln\xi \leqq D_\delta \leqq D_{\delta'} \leqq D_\delta + \{\delta'-\delta+o(1)\}\xi/\ln\xi \\ S_{\delta'} - \{\delta'-\delta+o(1)\}\lambda\xi \quad \leqq S_\delta \leqq S_{\delta'} \leqq S_\delta + \{\delta'-\delta+o(1)\}\lambda\xi\,, \end{cases}$$

[dove le funzioni sono calcolate tutte per la terna $(\xi;\mu,\lambda)$]. Dividendo la prima disuguaglianza della catena delle (3.1.9) per $\delta'\xi/\ln\xi$ otteniamo

$$D_{\delta'}\ln\xi/(\delta'\xi) - (1-\delta/\delta') - o(1) \leqq D_\delta \ln\xi/(\delta\xi)\cdot\delta/\delta'$$

e, tenendo conto delle definizioni (3.1.1) e del fatto che $D_\delta \leqq D_{\delta'}$, si perviene alla catena

$$(3.1.10) \qquad \frac{\delta'}{\delta}\,{}^*\!\varLambda_{\delta'}(\mu,\lambda) - \left(\frac{\delta'}{\delta}-1\right) \leqq {}^*\!\varLambda_\delta(\mu,\lambda) \leqq \varLambda^*_\delta(\mu,\lambda) \leqq \frac{\delta'}{\delta}\,\varLambda^*_{\delta'}(\mu,\lambda) .$$

In modo analogo dalla seconda catena delle (3.1.9) otteniamo:

$$(3.1.11) \qquad \frac{\delta'}{\delta}\,{}^*\sigma_{\delta'}(\mu,\lambda) - \left(\frac{\delta'}{\delta}-1\right) \leqq {}^*\sigma_\delta(\mu,\lambda) \leqq \sigma^*_\delta(\mu,\lambda) \leqq \frac{\delta'}{\delta}\,\sigma^*_{\delta'}(\mu,\lambda) .$$

Le due catene (3.1.10) e (3.1.11) sono da associarsi alle due altre (3.1.7) e (3.1.8); ma mentre le (3.1.10) e (3.1.11) sono ottenute con $\xi\to+\infty$ procedendo insieme per δ e per δ', le altre si ottengono con $\xi \to +\infty$ indipendentemente per δ e per δ'. Su questa osservazione ci richiameremo al n. **3.3.**

Le catene (3.1.7), (3.1.8), (3.1.10), (3.1.11) ci dicono anche che per $\delta' \to \delta+$, oppure $\delta' \to \delta$, in modo generale risulta

$$^*\Lambda_{\delta'}(\mu, \lambda) \to {}^*\Lambda_\delta(\mu, \lambda), \quad \ldots, \quad \sigma^*_{\delta'}(\mu, \lambda) \to \sigma^*_\delta(\mu, \lambda),$$

cioè le quattro funzioni considerate sono, per μ e λ fissi, *funzioni continue dell'indice* δ.

3.2. – Le due coppie di intervalli $({}^*A_\delta, {}^*\Omega_\delta)$, $(A^*_\delta, \Omega^*_\delta)$ **e** $({}^*\alpha_\delta, {}^*\omega_\delta)$, $(\alpha^*_\delta, \omega^*_\delta)$ **che interessano le funzioni** D_δ **e** S_δ. Lo studio delle quattro funzioni ${}^*\Lambda_\delta$, Λ^*_δ, ${}^*\sigma_\delta$, σ^*_δ conduce molto naturalmente a definire, per ciascuna di esse, un intervallo che ne costituisce una prima grossolana descrizione. A questo scopo poniamo

$$A^*_\delta = \operatorname*{Inf}_\lambda\,(\Lambda^*_\delta(0, \lambda) > 0), \qquad \Omega^*_\delta = \operatorname*{Sup}_\lambda\,(\Lambda^*_\delta(0, \lambda) < 1),$$

$${}^*A_\delta = \operatorname*{Inf}_\lambda\,({}^*\Lambda_\delta(0, \lambda) > 0), \qquad {}^*\Omega_\delta = \operatorname*{Sup}_\lambda\,({}^*\Lambda_\delta(0, \lambda) < 1),$$

$$\alpha^*_\delta = \operatorname*{Inf}_\lambda\,(\sigma^*_\delta(0, \lambda) > 0), \qquad \omega^*_\delta = \operatorname*{Sup}_\lambda\,(\sigma^*_\delta(0, \lambda) < 1),$$

$${}^*\alpha_\delta = \operatorname*{Inf}_\lambda\,({}^*\sigma_\delta(0, \lambda) > 0), \qquad {}^*\omega_\delta = \operatorname*{Sup}_\lambda\,({}^*\sigma_\delta(0, \lambda) < 1).$$

È evidente che A^*_δ, ${}^*A_\delta$, Ω^*_δ, ${}^*\Omega_\delta$ sono i minimi numeri reali (non negativi, Ω^*_δ e ${}^*\Omega_\delta$ eventualmente $+\infty$) pei quali sussistono rispettivamente le seguenti proprietà, che li caratterizzano: *Per ogni* $\varepsilon > 0$,

1º) esiste $\gamma > 0$ e una successione $\{\xi_s\}$, $\xi_s \to +\infty$, tali che per s abbastanza grande risulti:

$$D_\delta(\xi_s;\, 0,\, A^*_\delta + \varepsilon) > \gamma \xi_s / \ln \xi_s\,;$$

2º) esiste $\gamma > 0$ tale che per ξ abbastanza grande sia:

$$D_\delta(\xi;\, 0,\, {}^*A_\delta + \varepsilon) > \gamma\xi/\ln\xi\,;$$

3º) esiste una successione $\{\xi_s\}$, $\xi_s \to +\infty$, tale che, per $s \to +\infty$,

$$D_\delta(\xi_s;\, 0,\, \Omega^*_\delta + \varepsilon) = \xi_s/\ln\xi_s + o(\xi_s/\ln\xi_s)\,;$$

4º) $$D_\delta(\xi;\, 0,\, {}^*\Omega_\delta + \varepsilon) = \xi/\ln\xi + o(\xi/\ln\xi), \quad \text{per } \xi \to +\infty \ (^6).$$

(6) È evidente come si devono modificare 3º) e 4º) nei casi in cui rispettivamente sia $\Omega^*_\delta = +\infty$, ${}^*\Omega_\delta = +\infty$.

Le quattro proprietà perfettamente analoghe caratterizzano α_δ^*, $^*\alpha_\delta$, $^*\omega_\delta$, ω_δ^*. Dalla definizione segue evidentemente

$$(3.2.1)\qquad \begin{cases} 0\leqq A_\delta^* \leqq \Omega_\delta^* \leqq +\infty, & 0\leqq {}^*A_\delta \leqq {}^*\Omega_\delta \leqq +\infty \\ 0\leqq \alpha_\delta^* \leqq \omega_\delta^* \leqq +\infty, & 0\leqq {}^*\alpha_\delta \leqq {}^*\omega_\delta \leqq +\infty, \end{cases}$$

e anche

$$(3.2.2)\qquad \begin{cases} 0\leqq A_\delta^* \leqq {}^*A_\delta \leqq {}^*\Omega_\delta, & A_\delta^* \leqq \Omega_\delta^* \leqq {}^*\Omega_\delta \leqq +\infty \\ 0\leqq \alpha_\delta^* \leqq {}^*\alpha_\delta \leqq {}^*\omega_\delta, & \alpha_\delta^* \leqq \omega_\delta^* \leqq {}^*\omega_\delta \leqq +\infty. \end{cases}$$

Le relazioni (3.1.7) e (3.1.8) scritte per $\mu=0$ ci dicono che per diversi valori di δ e precisamente per $0<\delta<\delta'<1$ risultano verificate le catene

$$(3.2.3)\qquad \begin{cases} A_\delta^* \leqq A_{\delta'}^* \leqq A_1^* \leqq {}^*A_1 \leqq {}^*A_{\delta'} \leqq {}^*A_\delta \\ \Omega_\delta^* \leqq \Omega_{\delta'}^* \leqq \Omega_1^* \leqq {}^*\Omega_1 \leqq {}^*\Omega_{\delta'} \leqq {}^*\Omega_\delta. \end{cases}$$

Sussistono le catene analoghe alle (3.2.3) per gli estremi α^*, $^*\alpha$, ω^*, $^*\omega$ che non stiamo a scrivere.

In base alle definizioni poste, quando l'intervallo (μ, λ) non ha punti in comune con l'intervallo $(A_\delta^*, {}^*\Omega_\delta)$ risulta $A_\delta^*(\mu, \lambda)=0$ e $^*A_\delta(\mu, \lambda)=0$; di tali intervalli non ne esisterebbero se fosse $A_\delta^*=0$, $^*\Omega_\delta=+\infty$. Infatti $D_\delta(\xi; 0, \lambda)=D_\delta(\xi; 0, \mu)+D_\delta(\xi; \mu, \lambda)$ e, nell'ipotesi fatta su (μ, λ), esistono i limiti delle espressioni $D_\delta(\xi; 0, \lambda)\ln\xi/(\delta\xi)$ e $D_\delta(\xi; 0, \mu)\ln\xi/(\delta\xi)$ e sono ambedue 0 o ambedue 1.

Un'osservazione analoga sussiste per l'annullarsi delle due funzioni $\sigma_\delta^*(\mu, \lambda)$ e $^*\sigma_\delta(\mu, \lambda)$ e (μ, λ) senza punti comuni con l'intervallo $(\alpha_\delta^*, {}^*\omega_\delta)$.

Osserviamo che le differenze $^*A_\delta - A_\delta^*$, $^*\Omega_\delta - \Omega_\delta^*$ le quali, in un certo senso, rispecchiano un aspetto della irregolarità dell'andamento di $p_{n+1}-p_n$, rimangono inalterate o diminuiscono all'aumentare di δ, in accordo con la immediata intuizione.

La nostra indagine è rivolta a procurare informazioni sul collocamento degli intervalli $({}^*A_\delta, {}^*\Omega_\delta)$, ecc., e sull'andamento in questi stessi intervalli delle funzioni $^*A_\delta(\mu, \lambda)$, ecc..

3.3. – Le funzioni A_δ e σ_δ e gli intervalli $(A_\delta, \Omega_\delta)$, $(\alpha_\delta, \omega_\delta)$ attinenti a una successione $\{\xi_s\}$. Sia $\{\xi_s\}$ una successione crescente e $\xi_s \to +\infty$ per $s\to+\infty$: si possono considerare i due rapporti

$$D_\delta(\xi_s; \mu, \lambda) : (\delta\xi_s/\ln\xi_s), \qquad S_\delta(\xi_s; \mu, \lambda) : (\delta\xi_s)$$

e, per $0 < \delta \leqq 1$, $0 \leqq \mu < \lambda \leqq +\infty$, le funzioni

$$\liminf_{s\to+\infty} D_\delta(\xi_s;\mu,\lambda)\ln \xi_s/(\delta\xi_s) = {}^*\Lambda_\delta(\{\xi_s\};\mu,\lambda)\,, \tag{3.3.1}$$

ecc.. Siamo così condotti, con le definizioni analoghe alle (3.1.1) e (3.1.2), alle quattro funzioni

$$ {}^*\Lambda_\delta(\{\xi_s\};\mu,\lambda)\,,\quad \Lambda_\delta^*(\{\xi_s\};\mu,\lambda)\,,\quad {}^*\sigma_\delta(\{\xi_s\};\mu,\lambda)\,,\quad \sigma_\delta^*(\{\xi_s\};\mu,\lambda)\,, \tag{3.3.2}$$

e agli otto numeri (vedi n. **3.2**)

$$ A_\delta^*(\{\xi_s\})\,,\quad \Omega_\delta^*(\{\xi_s\})\,;\qquad {}^*A_\delta(\{\xi_s\})\,,\quad {}^*\Omega_\delta(\{\xi_s\})\,, \tag{3.3.3}$$

$$ \alpha_\delta^*(\{\xi_s\})\,,\quad \omega_\delta^*(\{\xi_s\})\,;\qquad {}^*\alpha_\delta(\{\xi_s\})\,,\quad {}^*\omega_\delta(\{\xi_s\})\,, \tag{3.3.4}$$

i quali tutti dipenderanno, in generale, dalla successione $\{\xi_s\}$.

Fissata la successione $\{\xi_s\}$, le funzioni (3.3.1) possiedono evidentemente le proprietà espresse al n. **3.1** da (3.1.3), (3.1.4), (3.1.5), (3.1.6), (3.1.10), (3.1.11), poichè gli evidenti ragionamenti là svolti per ξ variabile liberamente, sussistono ancora per ξ variabile lungo $\{\xi_s\}$. Mentre non risultano dimostrate le proprietà espresse da (3.1.7) e (3.1.8) poichè non si può ripetere in generale per ogni $\{\xi_s\}$ il ragionamento del punto 4 del n. **3.1**.

Sia $\{\xi_{s_l}\}$ contenuta in $\{\xi_s\}$; allora evidentemente abbiamo

$$\left\{\begin{array}{l} {}^*\Lambda_\delta(\mu,\lambda) \leqq {}^*\Lambda_\delta(\{\xi_s\};\mu,\lambda) \leqq {}^*\Lambda_\delta(\{\xi_{s_l}\};\mu,\lambda) \\ \Lambda_\delta^*(\mu,\lambda) \geqq \Lambda_\delta^*(\{\xi_s\};\mu,\lambda) \geqq \Lambda_\delta^*(\{\xi_{s_l}\};\mu,\lambda)\,, \end{array}\right. \tag{3.3.5}$$

e anche le analoghe catene per ${}^*\sigma_\delta$ e σ_δ^*.

Fissata $\{\xi_s\}$ i numeri A_δ, Ω_δ, α_δ e ω_δ [definiti in (3.3.3) e (3.3.4)] possiedono evidentemente le proprietà espresse dalle catene (3.2.1) e (3.2.2): non sono più garantite le (3.2.3). In conseguenza delle (3.3.5) abbiamo:

$$\left\{\begin{array}{l} A_\delta^* \leqq A_\delta^*(\{\xi_s\}) \leqq A_\delta^*(\{\xi_{s_l}\}) \leqq {}^*A_\delta(\{\xi_{s_l}\}) \leqq {}^*A_\delta(\{\xi_s\}) \leqq {}^*A_\delta\,, \\ \Omega_\delta^* \leqq \Omega_\delta^*(\{\xi_s\}) \leqq \Omega_\delta^*(\{\xi_{s_l}\}) \leqq {}^*\Omega_\delta(\{\xi_{s_l}\}) \leqq {}^*\Omega_\delta(\{\xi_s\}) \leqq {}^*\Omega_\delta\,; \end{array}\right. \tag{3.3.6}$$

cioè, *nel «diradare» la successione percorsa dalla variabile ξ, i numeri A^* e Ω^* restano inalterati o aumentano, mentre i numeri ${}^*A$ e ${}^*\Omega$ restano inalterati o diminuiscono*: pertanto l'intervallo (A^*, Ω^*) resta inalterato o si sposta verso destra e l'intervallo $({}^*A, {}^*\Omega)$ resta inalterato o si sposta verso sinistra.

3.4. – I rapporti incrementali delle funzioni Λ_δ e σ_δ definite nel n. 3.1. Veniamo ad esprimere le proprietà stabilite nel § **2** per le funzioni D_δ e S_δ mediante proprietà attinenti alle funzioni Λ_δ e σ_δ che descrivono la irregolarità di quelle.

Teorema (A). *Sia* $0 < \delta \leqq 1$, $0 \leqq \mu < \lambda < +\infty$: *allora sussistono le seguenti disuguaglianze:*

(3.4.1) $$0 \leqq {}^*\Lambda_\delta(\mu, \lambda) \leqq \Lambda_\delta^*(\mu, \lambda) \leqq (\lambda - \mu)\cdot C_\delta(\mu, \lambda)/(2H)\,,$$

(3.4.2) $$0 \leqq {}^*\sigma_\delta\,(\mu, \lambda) \leqq \sigma_\delta^*\,(\mu, \lambda) \leqq (\lambda - \mu)\cdot(\lambda + \mu)\cdot C_\delta(\mu, \lambda)/(4H)\,,$$

(3.4.3) $$\begin{cases} \mu\,{}^*\Lambda_\delta(\mu, \lambda) + {}^*\Lambda_\delta^2(\mu, \lambda)\cdot H/C_\delta(\mu, \lambda) \leqq {}^*\sigma_\delta(\mu, \lambda) \\ \mu\Lambda_\delta^*\,(\mu, \lambda) + \Lambda_\delta^{*2}\,(\mu, \lambda)\cdot H/C_\delta(\mu, \lambda) \leqq \sigma_\delta^*\,(\mu, \lambda). \end{cases}$$

In particolare, per $\mu = 0$ *abbiamo:*

(3.4.1)′ $$0 \leqq {}^*\Lambda_\delta(0, \lambda) \leqq \Lambda_\delta^*(0, \lambda) \leqq \lambda\,\cdot C_\delta(0, \lambda)/(2H)\,,$$

(3.4.2)′ $$0 \leqq {}^*\sigma_\delta\,(0, \lambda) \leqq \sigma_\delta^*\,(0, \lambda) \leqq \lambda^2\cdot C_\delta(0, \lambda)/(4H)\,,$$

(3.4.3)′ $$\begin{cases} {}^*\Lambda_\delta^2(0, \lambda)\cdot H/C_\delta(0, \lambda) \leqq {}^*\sigma_\delta(0, \lambda) \\ \Lambda_\delta^{*2}(0, \lambda)\cdot H/C_\delta(0, \lambda) \leqq \sigma_\delta^*\,(0, \lambda)\,. \end{cases}$$

In (3.4.3) *sono da considerare i primi membri nulli nel caso* $C_\delta(\mu, \lambda) = 0$: *l'analoga osservazione vale per le* (3.4.3)′.

Le (3.4.1), (3.4.2) e (3.4.3) sono una immediata conseguenza delle definizioni poste al n. **3.1** e, rispettivamente, dei Teoremi I, II e III (preliminari) enunciati nel n. **1.6.**

Le relazioni (3.1.5), (3.1.6) e quelle analoghe del tipo seguente

$$ {}^*\Lambda_\delta(\mu, \lambda) \leqq {}^*\Lambda_\delta(\mu, \tau) + \Lambda_\delta^*(\tau, \lambda)$$

(che sono immediate quando si tenga conto del significato di lim inf e di lim sup), unite al precedente Teorema (A), conducono al seguente

Teorema (B). *Le quattro funzioni* ${}^*\Lambda_\delta(\mu, \lambda)$, $\Lambda_\delta^*(\mu, \lambda)$, ${}^*\sigma_\delta(\mu, \lambda)$, $\sigma_\delta^*(\mu, \lambda)$ *sono funzioni dell'intervallo* (μ, λ), *definite per ogni* $0 < \delta \leqq 1$ *e* $0 < \mu \leqq \lambda \leqq +\infty$,

1) *col valore compreso fra* 0 *e* 1 (*estremi inclusi*),
2) *monotone non decrescenti,*

3) *continue per* $0 \leqq \mu < \lambda < +\infty$,

4) *a rapporti incrementali limitati, cioè per* $0 \leqq \mu' \leqq \mu < \lambda \leqq \lambda' < +\infty$ *valgono le disuguaglianze*

$$\left.\begin{aligned} &{}^*\!A_\delta(\mu, \lambda') - {}^*\!A_\delta(\mu, \lambda) \\ &A_\delta^*(\mu, \lambda') - A_\delta^*(\mu, \lambda) \end{aligned}\right\} \leqq (\lambda' - \lambda)\cdot C_\delta(\mu, \lambda)/(2H)\,, \tag{3.4.4}$$
$$\left.\begin{aligned} &{}^*\!A_\delta(\mu, \lambda) - {}^*\!A_\delta(\mu', \lambda) \\ &A_\delta^*(\mu, \lambda) - A_\delta^*(\mu', \lambda) \end{aligned}\right\} \geqq -(\mu - \mu')\cdot C_\delta(\mu, \lambda)/(2H)\,,$$

e quelle analoghe ottenute sostituendo rispettivamente

$$\sigma\,, \qquad (\lambda' - \lambda)\cdot(\lambda' + \lambda)/2\,, \qquad (\mu - \mu')\cdot(\mu' + \mu)/2$$

in luogo di

$$A\,, \qquad \lambda' - \lambda\,, \qquad \mu - \mu'\,.$$

Osservazione. Ricordiamo che $C_\delta(\mu, \lambda) \leqq \mathcal{C}_\delta \leqq 16H$ e pertanto i rapporti incrementali sono *limitati uniformemente* per le funzioni A, mentre sono limitati in dipendenza molto semplice dal posto per le funzioni σ.

3.5. – Gli intervalli $(A_\delta, \Omega_\delta)$ **e** $(\alpha_\delta, \omega_\delta)$. Veniamo a dimostrare alcuni risultati riguardanti gli intervalli $(A_\delta, \Omega_\delta)$ e $(\alpha_\delta, \omega_\delta)$ definiti al n. **3.2**: cioè gli intervalli caratterizzati (a causa della continuità, della monotonia e dell'« inclinazione » limitata delle funzioni A_δ e σ_δ) dalle relazioni

$$\left\{\begin{aligned} &0 \leqq \mu \leqq A_\delta^* < \tau < \Omega_\delta^* \leqq \lambda \leqq +\infty \\ &A_\delta^*(0, \mu) = 0 < A_\delta^*(0, \tau) < 1 = A_\delta^*(0, \lambda)\,, \end{aligned}\right. \tag{3.5.1}$$

$$\left\{\begin{aligned} &0 \leqq \mu \leqq {}^*\!A_\delta < \tau < {}^*\Omega_\delta \leqq \lambda \leqq +\infty \\ &{}^*\!A_\delta(0, \mu) = 0 < {}^*\!A_\delta(0, \tau) < 1 = {}^*\!A_\delta(0, \lambda), \end{aligned}\right. \tag{3.5.2}$$

$$\left\{\begin{aligned} &0 \leqq \mu \leqq \alpha_\delta^* < \tau < \omega_\delta^* \leqq \lambda \leqq +\infty \\ &\sigma_\delta^*(0, \mu) = 0 < \sigma_\delta^*(0, \tau) < 1 = \sigma_\delta^*(0, \lambda)\,, \end{aligned}\right. \tag{3.5.3}$$

$$\left\{\begin{aligned} &0 \leqq \mu \leqq {}^*\alpha_\delta < \tau < {}^*\omega_\delta \leqq \lambda \leqq +\infty \\ &{}^*\sigma_\delta(0, \mu) = 0 < {}^*\sigma_\delta(0, \tau) < 1 = {}^*\sigma_\delta(0, \lambda)\,. \end{aligned}\right. \tag{3.5.4}$$

Può avvenire che l'intervallo descritto da μ si riduca a un punto e allora la funzione corrispondente « si stacca » immediatamente dallo zero; può avvenire che sia $\Omega_\delta^* = +\infty$ e allora viene a mancare l'intervallo descritto da λ per $\Lambda_\delta^*(0, \lambda) = 1$, ecc..

Teorema (C). *Sussistono le relazioni seguenti:*

$$0 \leqq \alpha_\delta^* = A_\delta^* \leqq {}^*A_\delta = {}^*\alpha_\delta \leqq 1\,, \tag{3.5.5}$$

$$1 \leqq \omega_\delta^* \leqq {}^*\omega_\delta\,, \tag{3.5.6}$$

e, secondochè ω_δ^* e ${}^*\omega_\delta$ sono finiti o infiniti, sussiste anche necessariamente una delle tre relazioni seguenti

$$\left\{\begin{array}{l} \Omega_\delta^* \leqq {}^*\Omega_\delta = \omega_\delta^* = {}^*\omega_\delta < +\infty \\ \Omega_\delta^* \leqq {}^*\Omega_\delta = \omega_\delta^* < {}^*\omega_\delta = +\infty \\ \Omega_\delta^* \leqq {}^*\Omega_\delta \leqq \omega_\delta^* = {}^*\omega_\delta = +\infty\,. \end{array}\right. \tag{3.5.7}$$

Osservazione. Rimane aperto il problema di decidere quale delle tre relazioni (3.5.7) si presenta effettivamente e anche quello di confrontare col numero 1 l'estremo Ω_δ^* e anche l'estremo ${}^*\Omega_\delta$: quest'ultimo soltanto nel caso in cui sia $\omega_\delta^* = +\infty$.

Dimostrazione. 1) Cominciamo col dimostrare che $\alpha_\delta^* = A_\delta^*$ e ${}^*\alpha_\delta = {}^*A_\delta$. Per la (3.4.3)$'$ e pel fatto che $\lambda \cdot D_\delta(\xi;\, 0, \lambda) \ln \xi \geqq S_\delta(\xi;\, 0, \lambda)$ abbiamo

$$\Lambda_\delta^{*\,2}(0, \lambda)\cdot H/C_\delta(0, \lambda) \leqq \sigma_\delta^*(0, \lambda) \leqq \lambda \cdot \Lambda_\delta^*(0, \lambda)\,;$$

queste disuguaglianze ci mostrano che $\Lambda_\delta^*(0, \lambda) = 0$ implica $\sigma_\delta^*(0, \lambda) = 0$ e viceversa e pertanto $\alpha_\delta^* = A_\delta^*$. Il ragionamento analogo vale per ${}^*\alpha_\delta = {}^*A_\delta$.

2) La disuguaglianza ${}^*A_\delta \leqq 1$ è una conseguenza immediata del « Primzahlsatz ». Se fosse ${}^*A_\delta = 1 + 2\gamma > 1$ esisterebbe una successione $\{\xi_s\}$ per la quale

$$D_\delta(\xi_s;\, 0, 1+\gamma) = o(\delta\xi_s/\ln \xi_s)\,, \qquad D_\delta(\xi_s;\, 1+\gamma, +\infty) \sim \delta\xi_s/\ln \xi_s$$

e quindi

$$\delta\xi_s \sim S_\delta(\xi_s;\, 0, +\infty) \geqq S_\delta(\xi_s;\, 1+\gamma, +\infty) \geqq$$
$$\geqq (1+\gamma) D_\delta(\xi_s;\, 1+\gamma, +\infty) \ln \xi_s \sim (1+\gamma)\,\delta\xi_s\,,$$

assurdo per $\gamma > 0$. La catena (3.5.5) risulta dimostrata.

3) Dimostriamo che $\omega_\delta^* \geqq 1$. Infatti, se fosse $\omega_\delta^* = 1 - 2\gamma < 1$ avremmo $1 - \gamma > \omega_\delta^*$ e $\limsup S_\delta(\xi;\, 0,\, 1-\gamma)/(\delta\xi) = 1$, ed essendo $S_\delta(\xi;\, 0,\, 1-\gamma) \leqq$ $\leqq (1-\gamma) D_\delta(\xi;\, 0,\, 1-\gamma) \ln \xi$ si avrebbe anche

$$\limsup\, (1-\gamma) D_\delta(\xi;\, 0,\, 1-\gamma) \ln \xi/(\delta\xi) \geqq 1 \,,$$

$$\limsup\, D_\delta(\xi;\, 0,\, 1-\gamma) \ln \xi/(\delta\xi) \geqq 1/(1-\gamma) > 1 \,;$$

assurdo, perchè contro il « Primzahlsatz ». Risulta dimostrata la (3.5.6).

4) Dimostriamo che quando ${}^*\omega_\delta$ è finito è ${}^*\omega_\delta = {}^*\Omega_\delta$. Sia ${}^*\omega_\delta < {}^*\Omega_\delta \leqq +\infty$; sussistono le due uguaglianze evidenti:

$$D_\delta(\xi;\, 0,\, {}^*\Omega_\delta) = D_\delta(\xi;\, 0,\, {}^*\omega_\delta) + D_\delta(\xi;\, {}^*\omega_\delta,\, {}^*\Omega_\delta) \,,$$

$$S_\delta(\xi;\, 0,\, {}^*\Omega_\delta) = S_\delta(\xi;\, 0,\, {}^*\omega_\delta) + S_\delta(\xi;\, {}^*\omega_\delta,\, {}^*\Omega_\delta) \,.$$

Dividiamo la prima di queste due uguaglianze per $\delta\xi/\ln \xi$ e la seconda per $\delta\xi$ e poi passiamo al limite per $\xi \to +\infty$, tenendo conto delle definizioni di ${}^*\Omega_\delta$ e ${}^*\omega_\delta$: un componente della prima e due componenti della seconda ammettono limite 1 (determinato) e si ottiene

$$1 = \liminf D_\delta(\xi;\, 0,\, {}^*\omega_\delta) \ln \xi/(\delta\xi) + \limsup D_\delta(\xi;\, {}^*\omega_\delta,\, {}^*\Omega_\delta) \ln \xi/(\delta\xi) \,,$$

$$1 = 1 + \lim S_\delta(\xi;\, {}^*\omega_\delta,\, {}^*\Omega_\delta)/(\delta\xi) \,.$$

Il primo termine al secondo membro della prima è minore di 1 (poichè per ipotesi ${}^*\omega_\delta < {}^*\Omega_\delta$) e quindi

$$\limsup D_\delta(\xi;\, {}^*\omega_\delta,\, {}^*\Omega_\delta) \ln \xi/(\delta\xi) > 0 \,, \qquad S_\delta(\xi;\, {}^*\omega_\delta,\, {}^*\Omega_\delta) = o(\delta\xi) \,.$$

Queste due relazioni, valevoli simultaneamente, conducono all'assurdo poichè ${}^*\omega_\delta > 0$ e

$$o(\delta\xi) = S_\delta(\xi;\, {}^*\omega_\delta,\, {}^*\Omega_\delta) \geqq {}^*\omega_\delta D_\delta(\xi;\, {}^*\omega_\delta,\, {}^*\Omega_\delta) \ln \xi \neq o(\delta\xi) \,.$$

Si conclude intanto ${}^*\Omega_\delta \leqq {}^*\omega_\delta$. Sia ${}^*\Omega_\delta < {}^*\omega_\delta$: sussistono le due uguaglianze

$$D_\delta(\xi;\, 0,\, {}^*\omega_\delta) = D_\delta(\xi;\, 0,\, {}^*\Omega_\delta) + D_\delta(\xi;\, {}^*\Omega_\delta,\, {}^*\omega_\delta) \,,$$

$$S_\delta(\xi;\, 0,\, {}^*\omega_\delta) = S_\delta(\xi;\, 0,\, {}^*\Omega_\delta) + S_\delta(\xi;\, {}^*\Omega_\delta,\, {}^*\omega_\delta) \,.$$

Procediamo come sopra, dividendole rispettivamente per $\delta\xi/\ln \xi$ e per $\delta\xi$ e passando al limite per $\xi \to +\infty$; otteniamo rispettivamente

$$1 = 1 + \lim D_\delta(\xi;\, {}^*\Omega_\delta,\, {}^*\omega_\delta) \ln \xi/(\delta\xi)\,,$$

$$1 = \liminf S_\delta(\xi;\, 0,\, {}^*\Omega_\delta)/(\delta\xi) + \limsup S_\delta(\xi;\, {}^*\Omega_\delta,\, {}^*\omega_\delta)/(\delta\xi)\,.$$

Essendo ${}^*\Omega_\delta < {}^*\omega_\delta$, il primo termine al secondo membro di quest'ultima è minore di 1 e quindi

$$D_\delta(\xi;\, {}^*\Omega_\delta,\, {}^*\omega_\delta) = o(\delta\xi/\ln\xi)\,, \qquad \limsup S_\delta(\xi;\, {}^*\Omega_\delta,\, {}^*\omega_\delta)/(\delta\xi) > 0\,.$$

Se ${}^*\omega_\delta$ è finito, queste due conducono all'assurdo poichè

$$o(\delta\xi) = {}^*\omega_\delta D_\delta(\xi;\, {}^*\Omega_\delta,\, {}^*\omega_\delta) \ln \xi \geqq S_\delta(\xi;\, {}^*\Omega_\delta,\, {}^*\omega_\delta) \neq o(\delta\xi)\,.$$

Dunque se ${}^*\omega_\delta$ è finito abbiamo ${}^*\Omega_\delta = {}^*\omega_\delta$, mentre se ${}^*\omega_\delta = +\infty$ abbiamo dimostrato soltanto che ${}^*\Omega_\delta \leqq {}^*\omega_\delta = +\infty$.

5) Dimostriamo che è ${}^*\Omega_\delta = \omega_\delta^*$ a meno che non sia $\omega_\delta^* = +\infty$, ché allora è ${}^*\Omega_\delta \leqq \omega_\delta^* = +\infty$.

Sia ${}^*\Omega_\delta < \omega_\delta^*$; allora si considerino le uguaglianze

$$D_\delta(\xi;\, 0,\, \omega_\delta^*) = D_\delta(\xi;\, 0,\, {}^*\Omega_\delta) + D_\delta(\xi;\, {}^*\Omega_\delta,\, \omega_\delta^*)\,,$$

$$S_\delta(\xi;\, 0,\, \omega_\delta^*) = S_\delta(\xi;\, 0,\, {}^*\Omega_\delta) + S_\delta(\xi;\, {}^*\Omega_\delta,\, \omega_\delta^*)\,,$$

e, divisa la prima per $\delta\xi/\ln\xi$ e la seconda per $\delta\xi$, si scelga la successione $\{\xi_s\}$ ($\xi_s < \xi_{s+1}$, $\xi_s \to +\infty$) in guisa da avere $S_\delta(\xi_s;\, 0,\, \omega_\delta^*) \sim \delta\xi_s$; dalla seconda risulta, per $s \to +\infty$,

$$1 = \limsup S_\delta(\xi_s;\, 0,\, {}^*\Omega_\delta)/(\delta\xi_s) + \liminf S_\delta(\xi_s;\, {}^*\Omega_\delta,\, \omega_\delta^*)$$

ed essendo ${}^*\Omega_\delta < \omega_\delta^*$, per la definizione di ω_δ^*, il primo termine del secondo membro è minore di 1 e quindi

$$\liminf S_\delta(\xi_s;\, {}^*\Omega_\delta,\, \omega_\delta^*)/(\delta\xi_s) > 0\,.$$

Per la definizione di ${}^*\Omega_\delta$, lungo $\{\xi_s\}$ abbiamo dalla prima uguaglianza: $1 = 1 + o(1)$ e cioè

$$D_\delta(\xi_s;\, {}^*\Omega_\delta,\, \omega_\delta^*) = o(\delta\xi_s/\ln\xi_s)\,.$$

Si giunge all'assurdo quando ω_δ^* è finito, poichè

$$o(\delta\xi_s) = \omega_\delta^* \cdot D_\delta(\xi_s;\, {}^*\Omega_\delta,\, \omega_\delta^*) \ln \xi_s > S_\delta(\xi_s;\, {}^*\Omega_\delta,\, \omega_\delta^*) \neq o(\delta\xi_s)\,.$$

Sia $\omega_\delta^* < {}^*\Omega_\delta$; allora si considerino le uguaglianze

$$D_\delta(\xi;\,0,\,{}^*\Omega_\delta) = D_\delta(\xi;\,0,\,\omega_\delta^*) + D_\delta(\xi;\,\omega_\delta^*,\,{}^*\Omega_\delta)\,,$$

$$S_\delta(\xi;\,0,\,{}^*\Omega_\delta) = S_\delta(\xi;\,0,\,\omega_\delta^*) + S_\delta(\xi;\,\omega_\delta^*,\,{}^*\Omega_\delta)\,,$$

e, divisele come sopra, si scelga $\{\xi_s\}$ in guisa da avere $S_\delta(\xi_s;\,0,\,\omega_\delta^*) \sim \delta\xi_s$: lungo $\{\xi_s\}$, per $s \to +\infty$, la seconda fornisce $1 = 1 + o(1)$ e cioè

$$S_\delta(\xi_s;\,\omega_\delta^*,\,{}^*\Omega_\delta) = o(\delta\xi_s)\,.$$

Per la definizione di ${}^*\Omega_\delta$, la prima delle uguaglianze fornisce

$$1 = \liminf D_\delta(\xi_s;\,0,\,\omega_\delta^*)\ln \xi_s/(\delta\xi_s) + \limsup D_\delta(\xi_s;\,\omega_\delta^*,\,{}^*\Omega_\delta)\ln \xi_s/(\delta\xi_s)\,.$$

Il primo termine del secondo membro è minore di 1 (poichè per ipotesi $\omega_\delta^* < {}^*\Omega_\delta$) e quindi

$$\limsup D_\delta(\xi_s;\,\omega_\delta^*,\,{}^*\Omega_\delta)\ln \xi_s/(\delta\xi_s) > 0\,.$$

Si giunge all'assurdo poichè

$$o(\delta\xi_s) = S_\delta(\xi_s;\,\omega_\delta^*,\,{}^*\Omega_\delta) \geqq \omega_\delta^* D_\delta(\xi_s;\,\omega_\delta^*,\,{}^*\Omega_\delta)\ln\xi_s \neq o(\delta\xi_s)\,.$$

Coi punti 4) e 5) risulta dimostrato che necessariamente vale una delle (3.5.7).

Teorema (D). *Sussistono le disuguaglianze*

$$(3.5.8)\qquad \begin{cases} 0 \leqq A_\delta^* \leqq {}^*A_\delta \leqq 1 - H/\mathcal{C}_\delta \\ \Omega_\delta^* - A_\delta^* \geqq 2H/\mathcal{C}_\delta \\ {}^*\Omega_\delta - {}^*A_\delta \geqq 2H/\mathcal{C}_\delta\,, \end{cases}$$

e quindi anche

$$(3.5.8)'\qquad \begin{cases} 0 \leqq A_\delta^* \leqq {}^*A_\delta \leqq 15/16 \\ \Omega_\delta^* - A_\delta^* \geqq 1/8 \\ {}^*\Omega_\delta - {}^*A_\delta \geqq 1/8\,. \end{cases}$$

Inoltre, le funzioni $\Lambda_\delta^*(0,\,\lambda)$ e ${}^*\Lambda_\delta(0,\,\lambda)$ sono continue rispettivamente in Ω_δ^* e ${}^*\Omega_\delta$ anche se questi estremi sono $+\infty$, cioè

$$\Lambda_\delta^*(0,\,\lambda) \to 1- \quad \textit{per} \quad \lambda \to \Omega_\delta^*-\,,$$

$${}^*\Lambda_\delta(0,\,\lambda) \to 1- \quad \textit{per} \quad \lambda \to {}^*\Omega_\delta-\,.$$

Osservazione. Le (3.5.8) ci dicono che, sull'asse reale portante gli intervalli (μ, λ), i numeri A_δ^* e ${}^*A_\delta$ sono (ambedue) alla sinistra del punto 1 e staccati alquanto da questo, e che ambedue gli intervalli $(A_\delta^*, \Omega_\delta^*)$, $({}^*A_\delta, {}^*\Omega_\delta)$ hanno un'ampiezza che risulta valutata al disotto.

Dimostrazione. Poichè [vedi (3.2.2)] $0 \leqq A_\delta^* \leqq {}^*A_\delta$, la prima delle (3.5.5) è dimostrata non appena avremo provato che ${}^*A_\delta \leqq 1 - H/\mathcal{C}_\delta$. Per la continuità di ${}^*\Lambda_\delta(0, \lambda)$ è

$$
{}^*\Lambda_\delta(0, {}^*A_\delta) = 0\,, \qquad {}^*\Lambda_\delta(0, {}^*\Omega_\delta) = 1\,.
$$

Poichè ${}^*\Lambda_\delta(0, \lambda) = \liminf D_\delta(\xi; 0, \lambda) \ln\xi/(\delta\xi)$ e ${}^*\Lambda_\delta(0, \lambda) \leqq 1$, queste due uguaglianze ci dicono rispettivamente

$$
\liminf D_\delta(\xi; 0, {}^*A_\delta) \frac{\ln \xi}{\delta\xi} = 0\,, \qquad \lim D_\delta(\xi; 0, {}^*\Omega_\delta) \frac{\ln \xi}{\delta\xi} = 1\,,
$$

e sia $\{\xi_s\}$ una successione per la quale

$$
D_\delta(\xi_s; 0, {}^*A_\delta) = o(\delta\xi/\ln\xi)\,, \qquad D_\delta(\xi_s; 0, {}^*\Omega_\delta) \sim \delta\xi_s/\ln\xi_s\,.
$$

Per la proprietà additiva di D_δ risulta

$$
D_\delta(\xi_s; {}^*A_\delta, {}^*\Omega_\delta) \sim \delta\xi_s/\ln\xi_s
$$

e quindi il campo $\boldsymbol{A}(\delta {}^*A_\delta {}^*\Omega_\delta)$ è « quasi - pieno » (vedi n. **2.4**) e per il Teor. X vale la prima delle (3.5.8) espressa dalla prima delle (2.4.4) e, quando sia ${}^*\Omega_\delta$ finito (e quindi anche per ${}^*\Omega_\delta = +\infty$), vale la terza delle (3.5.8) espressa dalla seconda delle (2.4.4).

Per la seconda delle (3.5.8) si ragiona in modo analogo considerando l'intervallo $(A_\delta^*, \Omega_\delta^*)$ e il campo $\boldsymbol{A}(\delta A_\delta^* \Omega_\delta^*)$ « quasi - pieno ».

La continuità di $\Lambda_\delta^*(0, \lambda)$ e ${}^*\Lambda_\delta(0, \lambda)$ in Ω_δ^* e ${}^*\Omega_\delta$ rispettivamente, anche quando questi estremi sono infiniti, è conseguenza del Teorema VI (vedi n. **2.2**).

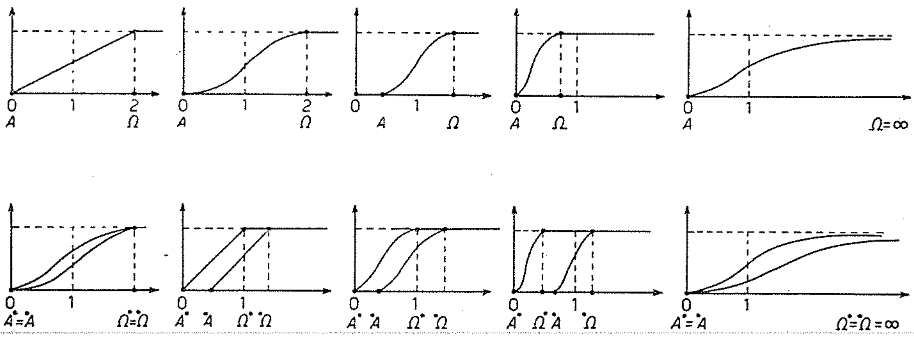
Nota. Le informazioni fornite dai Teoremi (A), (B), (C) e (D) sull'andamento delle due funzioni $\Lambda^*(0, \mu)$ e ${}^*\Lambda(0, \mu)$, pur essendo interessanti, sono ben lontane dal precisare tale andamento: esse ci dànno un confine superiore $C_\delta(0, \mu)/(2H) \leqq \mathcal{C}_\delta/(2H)$ dell'inclinazione del diagramma, un confine superiore $1 - H/\mathcal{C}_\delta$ dell'ascissa del punto A^* (oppure ${}^*A$) ove il diagramma si stacca dall'asse delle μ e, infine, un confine inferiore $2H/\mathcal{C}_\delta^2$ dell'ampiezza del tratto in cui si svolge l'ascensione del diagramma. Purtroppo anche $\mathcal{C}_\delta$ è noto soltanto entro un grande intervallo di indeterminazione.

Nelle figure schematiche seguenti sono segnati alcuni tipi di configurazioni possibili: i primi cinque di essi corrispondono all'ipotesi in cui ${}^*\Lambda(0, \mu)$ e $\Lambda^*(0, \mu)$ coincidano lungo tutto l'asse delle μ.

Non è escluso che, per qualche δ, possa essere $\Omega_\delta^* < {}^*A_\delta$ (vedi il nono schema) e questa circostanza segnalerebbe una notevole irregolarità della distribuzione di $p_{n+1} - p_n$.

Non è escluso che possa essere $^*\Omega_\delta = \infty$ e anche $\Omega_\delta^* = \infty$; e queste circostanze segnalerebbero una notevole quantità di differenze $p_{n+1} - p_n$ molto grandi in confronto a $\ln p_n$.

L'andamento di questi diagrammi (dipendenti da δ) e la deformazione di essi al variare di δ, per $0 < \delta \leqq 1$, descriverebbero le proprietà più riposte della successione $p_{n+1} - p_n$: essi costituiscono un problema aperto per ciò che riguarda lo studio di questa successione.



Osservazioni e figure schematiche analoghe potrebbero ripetersi qualora si considerassero tutte e quattro le funzioni $\Lambda_\delta^*(0, \mu)$, $^*\Lambda_\delta(0, \mu)$, $\sigma_\delta^*(0, \mu)$, $^*\sigma_\delta(0, \mu)$ e i loro rispettivi diagrammi: in questo caso occorrerebbe tenere presenti i vincoli imposti ai diagrammi di σ^* e $^*\sigma$ dai Teoremi (A) e (B) e le mutue connessioni imposte ai quattro diagrammi dal Teorema (C).

§ 4. – Una ipotesi analoga a quella di Hardy e Littlewood e sue conseguenze.

4.1. – L'ipotesi HL_0 di Hardy e Littlewood. Questi due autori (vedi [**6**]) hanno avanzata la seguente ipotesi, che denoteremo con HL_0: « Per ogni intero pari $2a \geqq 2$, il numero delle coppie (p_n, p_m) di interi primi tali che

$$p_m - p_n = 2a\,, \qquad 0 < p_n \leqq \xi$$

è asintotico a

$$2H \cdot \prod_{3 \leqq p | a} \frac{p-1}{p-2} \cdot \frac{\xi}{\ln^2 \xi}$$

[$H = 0.6601...$ costante di SHAH e WILSON, vedi (1.3.8)]. »

Cioè, richiamandoci alle notazioni introdotte e alle definizioni di $\Phi(2a)$, $Z_\delta(\xi; 2a)$, $z_\delta(\xi; 2a)$ (vedi n. **1.3**), l'ipotesi HL_0 si può enunciare al modo seguente:

$$\text{« } z_1(\xi; 2a) \to 2H \quad \textit{per } a \textit{ fisso e } \quad \xi \to +\infty \text{ ».}$$

Si riconosce facilmente che questo enunciato equivale al seguente (che è soltanto apparentemente più generale)

$$\text{« } z_\delta(\xi; 2a) \to 2H \quad \textit{per} \quad 0 < \delta \leqq 1 \ \textit{e a ambedue fissi, e} \ \xi \to +\infty \text{ »}.$$

4.2. – Una ipotesi HL(μ, λ) analoga a HL$_0$ e un'altra congettura. Alcuni dei nostri risultati assumono una forma particolarmente semplice ed espressiva quando si ammetta la seguente ipotesi analoga alla precedente.

Ipotesi HL(μ, λ): « *Sia* $0 < \delta \leqq 1$, $0 \leqq \mu < \lambda$; *allora è*

$$z_\delta(\xi; 2a) \to 2H \tag{4.2.1}$$

per $\xi \to +\infty$ *e uniformemente rispetto ad a nel campo* $\mu \ln \xi < 2a \leqq \lambda \ln \xi$. » (7)

Questo significa che, fissati δ, μ, λ, ad ogni $\varepsilon > 0$ si può coordinare un $\xi_0 = \xi_0(\varepsilon)$ tale che per $\xi \geqq \xi_0$ e $\mu \ln \xi < 2a \leqq \lambda \ln \xi$ si abbia

$$2H - \varepsilon < z_\delta(\xi; 2a) < 2H + \varepsilon .$$

Poichè $z_\delta^*(\xi; 2a)$ [vedi (1.4.3)] non supera $z_\delta(\xi; 2a)$, la definizione (1.4.6) di $C_\delta(\mu, \lambda)$ conduce, *nell'ipotesi* HL(μ, λ) *alla disuguaglianza*

$$C_\delta(\mu, \lambda) \leqq 2H , \tag{4.2.2}$$

e anche [vedi (1.5.3)] $C_\delta(\{\xi_s\}; \mu, \lambda) \leqq 2H$.

Abbiamo già dimostrato che per $\mu \geqq 2$ è $C_\delta(0, \mu) \geqq H$ (vedi Teor. IX, n. **2.3**); pertanto:

Se $\mu \geqq 2$ *e vale* HL(0, μ) *risulta*

$$H \leqq C_\delta(0, \mu) \leqq 2H , \qquad (\mu \geqq 2). \tag{4.2.3}$$

Adesso osserviamo che $Z_\delta^*(\xi; 2a) \leqq Z_\delta(\xi; 2a)$ e che Z_δ^* enumera le coppie $p_{n+1} - p_n = 2a$, mentre Z_δ enumera le coppie $p_m - p_n = 2a$: c'è da presumere che $z_\delta^*(\xi; 2a)$ risulti notevolmente minore di $z_\delta(\xi; 2a)$. I teoremi dimostrati e i risultati conseguiti, nel loro insieme, ci inducono a ritenere (*è soltanto una congettura!*)

$$C_\delta(0, \mu) = H , \quad \textit{per ogni} \ \mu > 0 , \tag{4.2.4}$$

(7) Ad una affermazione HL$_0$ riguardante ogni orizzontale (la cui quota diciamo $2a$) del piano (ξ; $2a$) si sostituisce un'affermazione che riguarda il campo limitato da due curve logaritmiche (o, eventualmente, dall'asse delle ξ e da una curva logaritmica).

e anche

(4.2.5) $$C_\delta(\mu, \lambda) = H\,, \quad \textit{per ogni} \;\; 0 \leqq \mu < \lambda < +\infty\,.$$

4.3. – La forma dei risultati nell'ipotesi HL(μ, λ).

Veniamo a segnalare quale forma assumono i risultati nell'ipotesi HL(μ, λ): contrassegneremo con un asterisco le proposizioni corrispondenti a quelle già dimostrate (vedi §§ **1**, **2**, **3**).

Se vale HL(μ, λ), *allora è*:

I*) $$D_\delta(\xi;\, \mu, \lambda) \leqq (\lambda - \mu)\, \delta\xi/\ln \xi + o(\delta\xi/\ln \xi)\,,$$

II*) $$S_\delta(\xi;\, \mu, \lambda) \leqq (\lambda^2 - \mu^2)\, \delta\xi/2 + o(\delta\xi)\,.$$

III*) *L'uguaglianza* $D_\delta(\xi;\, \mu, \lambda) = \{\lambda_1(\xi) - \mu\}\, \delta\xi/\ln \xi$ *implica*

$$S_\delta(\xi;\, \mu, \lambda) \geqq \{\lambda_1^2(\xi) - \mu^2\}\, \delta\xi/2 - o(\delta\xi)\,.$$

IV*) *Se vale* HL$(0, \mu)$ *e se* $D_\delta(\xi_s;\, 0, \mu) \sim \delta\xi_s/\ln \xi_s$ *è anche*

$$S_\delta(\xi;\, 0, \mu) \geqq \delta\xi_s/2 - o(\delta\xi_s)\,.$$

V*) *Se vale* HL$(0, \mu)$ *e se* $D_\delta(\xi_s;\, 0, \mu) \sim A\cdot\delta\xi_s/\ln \xi_s$ *è anche*

$$(1/2)A^2\cdot\delta\xi_s - o(\delta\xi_s) \leqq S_\delta(\xi_s;\, 0, \mu) \leqq (1/2)\mu^2\cdot\delta\xi_s + o(\delta\xi_s)\,,$$
$$\mu \leqq (1 - A^2/2)/(1 - A)\,.$$

VI*) *Se vale* HL$(0, \mu)$ *per ogni* $\mu > 0$, *allora risulta*

$$D_\delta(\xi;\, 0, \mu) > (1 - \varepsilon)\, \delta\xi/\ln \xi$$

per ogni $\mu \geqq 1 + 1/(2\varepsilon)$.

VII*) *Se vale* HL$(0, \lambda)$, *allora da*

$$D_\delta(\xi_s;\, \lambda, +\infty) \sim A\cdot\delta\xi_s/\ln \xi_s$$

segue

$$S_\delta(\xi_s;\, \lambda, +\infty) \begin{cases} \geqq (1 - \lambda^2/2)\delta\xi_s - o(\delta\xi_s) \\ \leqq \{1 - (1 - A)^2/2\}\, \delta\xi_s + o(\delta\xi_s), \end{cases}$$

$$\lambda A \leqq 1 - (1 - A)^2/2\,.$$

X*) *Se vale* HL(μ, λ), *allora da*

$$D_\delta(\xi_s;\, \mu, \lambda) \sim \delta\xi_s/\ln\xi_s$$

segue

$$S_\delta(\xi_s;\, \mu, \lambda) \begin{cases} \geqq (\mu + 1/2)\delta\xi_s - o(\delta\xi_s) \\ \leqq (1/2)(\lambda^2 - \mu^2)\delta\xi_s + o(\delta\xi_s)\,, \end{cases}$$

$$\mu \leqq 1/2\,, \qquad \lambda \geqq \mu + 1\,.$$

Richiamiamo l'attenzione su questa proposizione X*) che ci sembra interessante per le limitazioni di μ e λ.

XI*) *Se vale* HL(μ, λ), *allora da*

$$D_\delta(\xi_s;\, \mu, \lambda) \sim \Lambda\cdot\xi_s/\ln\xi_s$$

segue

$$S_\delta(\xi_s;\, \mu, \lambda) \begin{cases} \geqq \{\Lambda\mu + \Lambda^2/2\}\delta\xi_s - o(\delta\xi_s) \\ \leqq (1/2)(\lambda^2 - \mu^2)\delta\xi_s + o(\delta\xi_s), \end{cases}$$

$$\mu \leqq 1/\Lambda - \Lambda/2\,, \qquad \lambda \geqq \mu + \Lambda/2\,.$$

XII*) *Se vale* HL(μ, λ) *per ogni* $\lambda > \mu$, *allora se*

$$0 \leqq \varrho < 1\,, \qquad \mu > 1/(1-\varrho) - (1-\varrho)/2\,,$$

risulta, per ξ *abbastanza grande,*

$$D_\delta(\xi;\, 0, \mu) > \varrho\cdot\delta\xi/\ln\xi\,.$$

XIII*) *Sia* $\mu > 1/2$; *se vale* HL(μ, λ) *per ogni* $\lambda > \mu$, *allora è*

$$\liminf_{\xi\to+\infty} D_\delta(\xi;\, 0, \mu)\,\ln\xi/(\delta\xi) > 0\,.$$

La condizione per μ in XII*) si può scrivere nella forma $\varrho^2 - 2(1+\mu)\varrho + {}$ $+ 2\mu - 1 > 0$, e si ricava:

XIV*) *Se vale* HL(μ, λ) *per ogni* $\lambda > \mu$, *allora per ogni* $\varepsilon > 0$ *e* ξ *abbastanza grande risulta*:

$$D_\delta(\xi;\, 0, \mu) > (\mu + 1 - \sqrt{\mu^2 + 2} - \varepsilon)\delta\xi/\ln\xi\,.$$

In particolare:

$$D_\delta(\xi;\, 0, 1) > 0.26\cdot\delta\xi/\ln\xi\,.$$

XV*) *Fissato* $0 < \delta \leqq 1$, *se vale* HL$(1, \lambda)$ *per ogni* $\lambda > 1$, *allora, per* ξ *abbastanza grande, almeno il* 26 *per cento delle differenze* $p_{n+1} - p_n$, *con* $(1-\delta)\xi < p_n \leqq \xi$, *verifica la disuguaglianza* $p_{n+1} - p_n < \ln p_n$.

Veniamo alle proposizioni riguardanti le funzioni Λ_δ e σ_δ, e gli estremi Λ, Ω, α, ω.

Se vale HL(μ, λ) *risulta:*

A*)
$$0 \leqq {}^*\Lambda_\delta(\mu, \lambda) \leqq \Lambda_\delta^*(\mu, \lambda) \leqq \lambda - \mu\,,$$
$$0 \leqq {}^*\sigma_\delta\,(\mu, \lambda) \leqq \sigma_\delta^*\,(\mu, \lambda) \leqq (\lambda^2 - \mu^2)/2\,,$$
$$\mu\;{}^*\Lambda_\delta(\mu, \lambda) + {}^*\Lambda_\delta^2(\mu, \lambda)/2 \leqq {}^*\sigma_\delta(\mu, \lambda)\,,$$
$$\mu\;\Lambda_\delta^*(\mu, \lambda) + \Lambda_\delta^{*2}(\mu, \lambda)/2 \leqq \sigma_\delta^*\,(\mu, \lambda)\,,$$
$${}^*\Lambda_\delta^2(0, \lambda) \leqq 2\;{}^*\sigma_\delta(0, \lambda)\,, \qquad \Lambda_\delta^{*2}(0, \lambda) \leqq 2\;\sigma_\delta^*(0, \lambda)\,.$$

B*) *Le due funzioni* ${}^*\Lambda_\delta(\mu, \lambda)$, $\Lambda_\delta^*(\mu, \lambda)$ *hanno il rapporto incrementale in* λ *non superiore a* 1 *e quello in* μ *non inferiore a* -1.

D) Se vale* HL$(0, \mu)$ *per ogni* $\mu > 0$, *allora:*

$$0 \leqq \Lambda_\delta^* \leqq {}^*\Lambda_\delta \leqq 1/2\,,$$
$$\Omega_\delta^* - \Lambda_\delta^* \geqq 1\,, \qquad {}^*\Omega_\delta - {}^*\Lambda_\delta \geqq 1\,.$$

Questa proposizione D*) non si ottiene direttamente dall'enunciato del Teor. (D) (vedi n. **3.5**), ma dalla sua dimostrazione, con l'opportuna inserzione dell'ipotesi HL$(0, \mu)$.

§ 5. – Sulla funzione $\Phi(2a)$.

5.1. – Maggiorazione di $\Phi(2a)$. Sussiste, come subito si verifica, il seguente

Lemma 1. *Per* $a \to +\infty$ *risulta*

$$\Phi(2a) = \prod_{3 \leqq p | a} \frac{p-1}{p-2} \leqq \frac{e^C}{2H} \ln\ln a\cdot\{1 + o(1)\} \tag{5.1.1}$$

($C = 0.577...$ *costante di* *Euler-Mascheroni*).

Dimostrazione. Se $s-1$ è il numero dei divisori primi dispari distinti di a, risulta

$$\Phi(2a) \leqq \prod_{3\leqq p\leqq p_s} \frac{p-1}{p-2} = \prod_{3\leqq p\leqq p_s} \left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} \cdot \left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)^{-1} =$$

$$= \prod_{p\leqq p_s} \left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \prod_{3\leqq p\leqq p_s} \left\{1-\frac{1}{(p-1)^2}\right\}^{-1}$$

$$\sim e^c \ln p_s/(2H)\,, \qquad \text{per } s\to+\infty. \tag{5.1.2}$$

D'altronde $2a \geqq \prod_{p\leq p_s} p = \exp[p_s\{1+o(1)\}]$ e quindi abbiamo

$$\ln p_s \leqq \ln\ln 2a\cdot\{1+o(1)\} = \ln\ln a\cdot\{1+o(1)\}\,.$$

Questa maggiorazione, insieme alla (5.1.2), conduce all'asserto. In particolare esiste un k tale che per $a>2\exp(e)$ risulta

$$\Phi(2a) < k\cdot\ln\ln a\,. \tag{5.1.3}$$

5.2. – Sulla somma di $\Phi(2a)$.

Lemma 2. *Per la somma della funzione aritmetica $\Phi(2a)$ sussiste la seguente rappresentazione asintotica*

$$\Psi(\tau,\eta) = \sum_{\tau<2a\leqq\eta} \Phi(2a) = \frac{1}{2H}(\eta-\tau) + R(\tau,\eta)\,, \tag{5.2.1}$$

dove

$$R(\tau,\eta) = O\left((\eta-\tau)/\ln\frac{\eta-\tau}{\ln\eta}\right). \tag{5.2.2}$$

Osservazione. Sia $\tau=\mu\ln\xi$, $\eta=\lambda\ln\xi$; allora è, per μ e λ fissi e $\xi\to+\infty$,

$$\frac{\eta-\tau}{\ln\eta} = (\lambda-\mu)\frac{\ln\xi}{\ln(\lambda\ln\xi)} \sim (\lambda-\mu)\frac{\ln\xi}{\ln\ln\xi} \to +\infty$$

e quindi

$$\sum_{\mu\ln\xi<2a\leqq\lambda\ln\xi} \Phi(2a) \sim \frac{1}{2H}(\lambda-\mu)\cdot\ln\xi\,. \tag{5.2.1$'$}$$

Questo lemma è dimostrato in G. RICCI [**13**], p. 145; ivi figura, per il termine complementare $R(\tau, \eta)$, la maggiorazione (8)

$$|R(\tau, \eta)| < c_1 \frac{\eta - \tau}{p_h} + c_2 P_h \ln \frac{\eta}{p_h} + c_3 P_h ,$$

dove $P_h = p_1 p_2 \dots p_h$ e c_1, c_2, c_3 sono costanti assolute. Poniamo $\zeta = (\eta - \tau)/\ln \eta$ e scegliamo h in guisa da avere

$$P_h \leqq \zeta / \ln \zeta < P_{h+1} ;$$

allora sussistono le seguenti relazioni

$$p_h = \ln (\zeta/\ln \zeta)\{1 + o(1)\} = \ln \zeta \cdot \{1 + o(1)\} ,$$

$$\frac{\eta - \tau}{p_h} = \frac{\eta - \tau}{\ln \zeta}\{1 + o(1)\} ,$$

$$P_h \ln \eta \leqq \zeta \ln \eta / \ln \zeta = (\eta - \tau)/\ln \zeta ,$$

$$P_h = o[(\eta - \tau)/\ln \zeta] .$$

Tenendo conto di queste nell'espressione di $R(\tau, \eta)$ otteniamo

$$|R(\tau, \eta)| < c_1 \frac{\eta - \tau}{\ln \zeta}\{1 + o(1)\} + c_2(\eta - \tau)/\ln \zeta + o[(\eta - \tau)/\ln \zeta]$$

e ne segue l'asserto.

Lemma 3. *Per la somma della funzione aritmetica $2a \cdot \Phi(2a)$ sussiste la seguente rappresentazione asintotica*

$$\sum_{\tau < 2a \leqq \eta} 2a \cdot \Phi(2a) \sim \frac{1}{4H}(\eta^2 - \tau^2) \tag{5.2.3}$$

quando $(\eta - \tau)/\ln \eta \to +\infty$.

Osservazione. Sia $\tau = \mu \ln \xi$, $\eta = \lambda \ln \xi$; allora, per μ e λ fissi e $\xi \to +\infty$,

---

(8) Occorre tenere presente che in [13] il lemma è enunciato per la somma estesa al campo $\tau < a \leqq \eta$, mentre qui è $\tau < 2a \leqq \eta$; pertanto nel termine principale deve figurare il denominatore 2.

risulta $(\eta-\tau)/\ln\eta \to +\infty$ (vedi Osservazione dopo il Lemma 2) e quindi

$$(5.2.3)' \qquad \sum_{\mu \ln\xi < 2a \leqq \lambda \ln\xi} 2a\cdot\Phi(2a) \sim \frac{1}{4H}(\lambda^2-\mu^2)\ln^2\xi .$$

Dimostrazione. Sia $0 \leqq \tau < \eta$ e dividiamo l'intervallo (τ, η) in m intervalli parziali uguali

$$(5.2.4) \qquad \tau = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_m = \eta , \qquad \tau_k - \tau_{k-1} = (\eta-\tau)/m \qquad (k = 1, \ldots, m).$$

Allora

$$(5.2.5) \qquad \Psi_1(\tau, \eta) = \sum_{\tau<2a\leqq\eta} 2a\cdot\Phi(2a) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\tau_{k-1}<2a\leqq\tau_k} 2a\cdot\Phi(2a) = \sum_{k=1}^{m} S_k .$$

Tenendo conto di $\Psi(\tau, \eta)$ definita in (5.2.1) abbiamo

$$(5.2.6) \qquad \tau_{k-1}\Psi(\tau_{k-1}, \tau_k) \leqq S_k \leqq \tau_k\Psi(\tau_{k-1}, \tau_k) ;$$

per il Lemma 2 è (per $1 \leqq k \leqq m$)

$$\Psi(\tau_{k-1}, \tau_k) = \frac{\tau_k - \tau_{k-1}}{2H} + c_k(\tau_k - \tau_{k-1})/\ln \frac{\tau_k - \tau_{k-1}}{\ln \tau_k}$$

(c_k uniformemente limitati) e inoltre vale evidentemente:

$$\tau_k - \tau_{k-1} = (\eta-\tau)/m , \qquad \ln\tau_k \leqq \ln\eta , \qquad \ln\frac{\tau_k - \tau_{k-1}}{\ln\tau_k} \geqq \ln\frac{\eta-\tau}{m\ln\eta} .$$

Fissato m, quando $(\eta-\tau)/(m\ln\eta) \to +\infty$ anche $(\tau_k-\tau_{k-1})/\ln\tau_k \to +\infty$; risulta quindi:

$$(5.2.7) \qquad \Psi(\tau_{k-1}, \tau_k) = \frac{\tau_k - \tau_{k-1}}{2H}\left\{1 + c_k'(m)/\ln\frac{\eta-\tau}{m\ln\eta}\right\} ,$$

dove i $c_k'(m)$ si mantengono limitati uniformemente per $(\eta-\tau)/(m\ln\eta) \to +\infty$.

Sia $|c_k'(m)| < c_0$ e introduciamo la (5.2.7) nella (5.2.6); in questo modo otteniamo la limitazione

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2H}\tau_{k-1}(\tau_k - \tau_{k-1})(1 - c_0/y) \leqq S_k \leqq \frac{1}{2H}\tau_k(\tau_k - \tau_{k-1})(1 + c_0/y) \\ &\qquad\qquad y = \ln\frac{\eta-\tau}{m\ln\eta} \end{aligned}\right.$$

e per la (5.2.5) quest'altra:

$$\frac{1-c_0/y}{2H}\sum_{k=1}^{m}\tau_{k-1}(\tau_k-\tau_{k-1})\leqq \Psi_1(\tau,\eta)\leqq \frac{1+c_0/y}{2H}\sum_{k=1}^{m}\tau_k(\tau_k-\tau_{k-1})\,. \tag{5.2.8}$$

D'altronde è

$$\sum_{k=1}^{m}\tau_{k-1}(\tau_k-\tau_{k-1})<\int_{\tau}^{\eta}u\,du=\frac{1}{2}(\eta^2-\tau^2)<\sum_{k=1}^{m}\tau_k(\tau_k-\tau_{k-1})\,,$$

e la differenza fra le somme estreme risulta

$$\sum_{k=1}^{m}(\tau_k-\tau_{k-1})^2=m\cdot\left(\frac{\eta-\tau}{m}\right)^2=\frac{(\eta-\tau)^2}{m}=$$

$$=\frac{2(\eta-\tau)}{m(\eta+\tau)}\cdot\frac{1}{2}(\eta^2-\tau^2)\leqq\frac{2}{m}\cdot\frac{1}{2}(\eta^2-\tau^2)\,;$$

pertanto è

$$\frac{1}{4H}(\eta^2-\tau^2)\left(1-\frac{2}{m}\right)\left(1-\frac{c_0}{y}\right)\leqq\Psi_1(\tau,\eta)\leqq\frac{1}{4H}(\eta^2-\tau^2)\left(1+\frac{2}{m}\right)\left(1+\frac{c_0}{y}\right).$$

Fissato ε, con $0<\varepsilon<1$, si scelga m abbastanza grande da avere $2/m<\varepsilon/3$, e quindi $(\eta-\tau)/(m\ln\eta)$ abbastanza grande da avere $c_0/y<\varepsilon/3$; in queste condizioni abbiamo

$$\frac{1}{4H}(\eta^2-\tau^2)(1-\varepsilon)\leqq\Psi_1(\tau,\eta)\leqq\frac{1}{4H}(\eta^2-\tau^2)(1+\varepsilon)\,,$$

e ne segue la (5.2.3).

§ 6. – Confronto di somme estese a campi analoghi A e B e lemmi relativi alle somme estese ai campi B.

6.1. – I campi $A(\delta\mu\lambda)$ e $B(\delta\mu\lambda)$. Sia $0<\delta\leqq 1$ e $0\leqq\mu<\lambda\leqq+\infty$; si considerino i due campi descritti dall'intero n (⁹):

$$\boldsymbol{A}(\delta\mu\lambda)\qquad \mu\ln p_n<p_{n+1}-p_n\leqq\lambda\ln p_n,\qquad (1-\delta)\xi<p_n\leqq\xi\,, \tag{6.1.1}$$

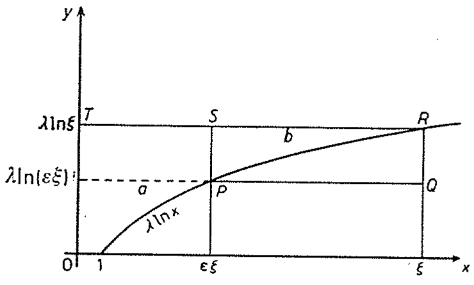
$$\boldsymbol{B}(\delta\mu\lambda)\qquad \mu\ln\xi<p_{n+1}-p_n\leqq\lambda\ln\xi\,,\qquad (1-\delta)\xi<p_n\leqq\xi \tag{6.1.2}$$

[il campo $A(\delta\mu\lambda)$ venne già introdotto in (1.6.2)].

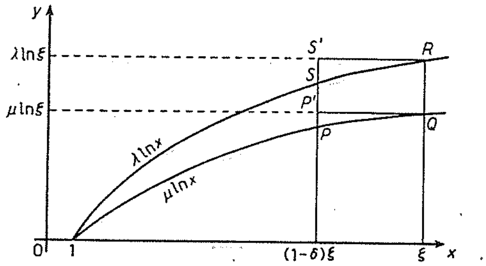
---

(9) È evidente l'interpretazione $\mu\ln p_n<p_{n+1}-p_n$ o, rispettivamente, $\mu\ln\xi<p_{n+1}-p_n$ nel caso $\lambda=+\infty$.

Riportando su un piano riferito ad un sistema cartesiano ortogonale $O(x, y)$, i punti di coordinate $(p_n, p_{n+1} - p_n)$ sono quelli contenuti nei due campi $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ segnati schematicamente nelle seguenti figure.



$A \equiv 1\xi R$, $B \equiv 0\xi RT$, $b' \equiv PQRS$



$A \equiv PQRS$ $B \equiv P'QRS'$

Accanto alle somme

$$D_\delta(\xi; \mu, \lambda) = \sum_{A} 1 , \qquad S_\delta(\xi; \mu, \lambda) = \sum_{A} (p_{n+1} - p_n) , \tag{6.1.3}$$

con $\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{A}(\delta\mu\lambda)$, che vennero introdotte nel n. **1.2**, si considerino le somme analoghe

$$\sum_{B(\delta\mu\lambda)} 1 , \qquad \sum_{B(\delta\mu\lambda)} (p_{n+1} - p_n) , \tag{6.1.4}$$

che dal punto di vista analitico sono meglio trattabili; istituiamo il confronto col seguente

Lemma 4. *Sia* $0 < \delta \leqq 1$, $0 \leqq \mu < \lambda \leqq +\infty$; *allora, per* $\xi \to +\infty$, *risulta*

$$\left\{ \begin{aligned} D_\delta(\xi; \mu, \lambda) &= \sum_{B(\delta\mu\lambda)} 1 && + o(\delta\xi/\ln \xi) , \\ S_\delta(\xi; \mu, \lambda) &= \sum_{B(\delta\mu\lambda)} (p_{n+1} - p_n) && + o(\delta\xi) . \end{aligned} \right. \tag{6.1.5}$$

Dimostrazione. Analizziamo i diversi casi:

1) *Caso* $\mu = 0$.

1.1) $\mu = 0$, $\lambda = +\infty$. I due campi $\boldsymbol{A}(\delta 0 \infty)$, $\boldsymbol{B}(\delta 0 \infty)$ coincidono e le (6.1.5) sono vere.

1.2) $\mu = 0$, λ finito, $\delta = 1$. Fissiamo $0 < \varepsilon < 1$: il campo $B(\delta 0 \lambda)$ si ottiene da $A(\delta 0 \lambda)$ aggiungendovi i due campi:

$$\text{(a)} \qquad \lambda \ln p_n < p_{n+1} - p_n \leqq \lambda \ln \xi\,, \qquad 0 < p_n \leqq \varepsilon\xi\,,$$

$$\text{(b)} \qquad \text{»} \qquad , \qquad \varepsilon\xi < p_n \leqq \xi\,,$$

e pertanto

$$D_\delta(\xi;\, 0,\, \lambda) = \sum_{B(\delta 0 \lambda)} 1 \quad - \sum_{(a)} 1 \quad - \sum_{(b)} 1\,, \tag{6.1.6}$$

$$S_\delta(\xi;\, 0,\, \lambda) = \sum_{B(\delta 0 \lambda)} (p_{n+1} - p_n) - \sum_{(a)} (p_{n+1} - p_n) - \sum_{(b)} (p_{n+1} - p_n)\,. \tag{6.1.7}$$

Riguardo al campo (a) osserviamo

$$\sum_{(a)} 1 = \varepsilon\, O(\xi/\ln \xi)\,, \qquad \sum_{(a)} (p_{n+1} - p_n) \leqq (\varepsilon + o(1))\xi\,, \tag{6.1.8}$$

mentre il campo (b) può essere ampliato nel nuovo campo (rettangolare)

$$\text{(b')} \qquad \lambda \ln(\varepsilon\xi) < p_{n+1} - p_n \leqq \lambda \ln \xi\,, \qquad \varepsilon\xi < p_n \leqq \xi\,,$$

nel quale la differenza $p_{n+1} - p_n$ assume un numero di valori che, fissato ε, è limitato al crescere di ξ, poichè

$$\lambda \ln \xi - \lambda \ln(\varepsilon\xi) = \lambda \ln(1/\varepsilon)\,.$$

Ci troviamo nelle condizioni di applicare il teorema di V. Brun (vedi n. **1.3**)

$$\sum_{(b)} 1 \leqq \sum_{(b')} 1 \leqq \sum_{a} Z_1(\xi;\, 2a) \qquad [\lambda \ln(\varepsilon\xi) < 2a \leqq \lambda \ln \xi]\,,$$

$$\leqq c \sum \Phi(2a) \cdot \xi/\ln^2 \xi$$

[applichiamo il Lemma 1; vedi la (5.1.3)]

$$\leqq c\lambda \ln(1/\varepsilon) \cdot k \ln\ln(\lambda \ln \xi) \cdot \xi/\ln^2 \xi$$

$$< \lambda \ln(1/\varepsilon) \cdot c_1 \xi \ln\ln\ln \xi/\ln^2 \xi\,. \tag{6.1.9}$$

La prima delle (6.1.8) e questa (6.1.9) inserite nella (6.1.6) ci dànno

$$D_\delta(\xi;\, 0,\, \lambda) = \sum_{B(\delta 0 \lambda)} 1 - \varepsilon \cdot O(\xi/\ln \xi) - \lambda \ln(1/\varepsilon) \cdot O(\xi \ln\ln\ln \xi/\ln^2 \xi)\,.$$

Essendo λ fisso e $\varepsilon > 0$ arbitrariamente piccolo, segue la prima delle (6.1.5) nel caso $\mu = 0$, λ finito, $\delta = 1$.

Veniamo a dimostrare la seconda delle (6.1.5); a questo scopo teniamo conto della (6.1.9) e del confine $p_{n+1} - p_n \leqq \lambda \ln \xi$; allora otteniamo

$$\sum_{(\mathrm{b})} (p_{n+1} - p_n) \leqq \sum_{(\mathrm{b}')} (p_{n+1} - p_n) \leqq \sum_{(\mathrm{b}')} 1 \cdot \lambda \ln \xi$$

$$\leqq \lambda^2 \ln (1/\varepsilon) \cdot c_1 \xi \ln \ln \ln \xi / \ln \xi \,. \tag{6.1.10}$$

Tenendo conto della seconda delle (6.1.8) e di questa (6.1.10) nella (6.1.7), otteniamo:

$$S_\delta(\xi;\, 0, \lambda) = \sum_{B(\delta 0 \lambda)} (p_{n+1} - p_n) - O(\varepsilon \xi) - \lambda^2 \ln (1/\varepsilon) \cdot O(\xi \ln \ln \ln \xi / \ln \xi)\,.$$

Essendo λ fisso ed $\varepsilon > 0$ arbitrariamente piccolo, segue la seconda delle (6.1.5) nel caso $\mu = 0$, λ finito, $\delta = 1$.

1.3) $\mu = 0$, λ finito, $0 < \delta < 1$. Si può ripetere lo stesso ragionamento con l'assumere $\varepsilon = 1 - \delta$; in queste condizioni il campo (**a**) risulta vuoto e la differenza fra le somme confrontate, estese ai campi $\boldsymbol{A}(\delta 0 \lambda)$ e $\boldsymbol{B}(\delta 0 \lambda)$, si riduce alla somma $\sum_{\mathrm{b}}$ la quale, anche in questo caso, risulta, rispettivamente nelle due uguaglianze (6.1.6) e (6.1.7), maggiorata nella forma

$$o(\delta \xi / \ln \xi)\,, \qquad o(\delta \xi)$$

in conseguenza, rispettivamente, della (6.1.9) e della (6.1.10).

2) *Caso* $\mu > 0$. Sia $0 < \mu < \lambda \leqq +\infty$; ambedue le (6.1.5) seguono subito per differenza da quelle dimostrate nel caso $\mu = 0$; infatti le intersezioni di campi

$$\boldsymbol{A}(\delta 0 \mu) \cap \boldsymbol{A}(\delta \mu \lambda)\,, \qquad \boldsymbol{B}(\delta 0 \mu) \cap \boldsymbol{B}(\delta \mu \lambda)$$

sono vuote e le riunioni dànno

$$\boldsymbol{A}(\delta 0 \mu) \cup \boldsymbol{A}(\delta \mu \lambda) \equiv \boldsymbol{A}(\delta 0 \lambda)\,, \qquad \boldsymbol{B}(\delta 0 \mu) \cup \boldsymbol{B}(\delta \mu \lambda) \equiv \boldsymbol{B}(\delta 0 \lambda)\,.$$

Osservazione. Il Lemma 4 or ora dimostrato ci consente di pervenire ai risultati col sostituire le somme $\sum 1$ e $\sum (p_{n+1} - p_n)$ estese ai campi $\boldsymbol{B}(\delta \mu \lambda)$ in luogo della funzione enumeratrice $D_\delta(\xi;\, \mu, \lambda)$ e della funzione somma $S_\delta(\xi;\, \mu, \lambda)$. Anche le definizioni delle funzioni $\Lambda_\delta(\mu, \lambda)$ e $\sigma_\delta(\mu, \lambda)$ introdotte al n. **3.1** [vedi (3.1.1) e (3.1.2)] restano invariate con la sostituzione qui segnalata: infatti, i due termini complementari $o(\delta\xi/\ln\xi)$ e $o(\xi)$ che figurano ai secondi membri delle (6.1.5) non alterano il lim inf e il lim sup per $\xi \to +\infty$ dei rapporti considerati in quelle definizioni.

6.2. – Maggiorazione delle somme $\sum_B 1$ e $\sum_B (p_{n+1} - p_n)$.

Lemma 5. *Sia* $0 < \delta \leqq 1$, $0 \leqq \mu < \lambda$ *e* $\boldsymbol{B}(\delta\mu\lambda)$ *il campo definito in* (6.1.2); *allora, per* $\xi \to +\infty$,

$$\sum_{B(\delta\mu\lambda)} 1 \leqq \frac{C_\delta(\mu, \lambda)}{2H} (\lambda - \mu) \frac{\delta\xi}{\ln \xi} + o\left(\frac{\delta\xi}{\ln \xi}\right), \tag{6.2.1}$$

$$\sum_{B(\delta\mu\lambda)} (p_{n+1} - p_n) \leqq \frac{C_\delta(\mu, \lambda)}{4H} (\lambda^2 - \mu^2)\delta\xi + o(\delta\xi). \tag{6.2.2}$$

Queste maggiorazioni sussistono anche quando $\xi \to +\infty$ *lungo una successione* $\{\xi_s\}$ *(crescente e divergente a* $+\infty$*) e in luogo di* $C_\delta(\mu, \lambda)$ *si sostituisce* $C_\delta(\{\xi_s\}; \mu, \lambda)$.

Dimostrazione. Le somme $\sum$, senza alcuna indicazione, sono estese al campo

$$\mu \ln \xi < 2a \leqq \lambda \ln \xi .$$

$$\begin{aligned}
\sum_B 1 &= \sum Z_\delta^*(\xi; 2a) && \text{[vedi (1.4.2) e (1.4.3)]}\\
&= \sum z_\delta^*(\xi; 2a) \cdot \Phi(2a) \cdot \delta\xi/\ln^2 \xi && \text{[vedi (1.4.6)]}\\
&\leqq \sum \{C_\delta(\mu, \lambda) + \varepsilon(\xi)\}\Phi(2a) \cdot \delta\xi/\ln^2 \xi && [\varepsilon(\xi) \to 0]\\
&= \{C_\delta(\mu, \lambda) + \varepsilon(\xi)\} \sum \Phi(2a) \cdot \delta\xi/\ln^2 \xi && \text{[vedi (5.2.1)']}\\
&= \frac{C_\delta(\mu, \lambda) + \varepsilon(\xi)}{2H} (\lambda - \mu) \frac{\delta\xi}{\ln \xi} \{1 + o(1)\},
\end{aligned}$$

e quindi la (6.2.1).

$$\begin{aligned}
\sum_B (p_{n+1} - p_n) &= \sum 2aZ_\delta^*(\xi; 2a) && \text{[vedi (1.4.2) e (1.4.3)]}\\
&= \sum z_\delta^*(\xi; 2a) \cdot 2a\Phi(2a) \cdot \delta\xi/\ln^2 \xi && \text{[vedi (1.4.6)]}\\
&\leqq \sum \{C_\delta(\mu, \lambda) + \varepsilon(\xi)\} \cdot 2a\Phi(2a) \cdot \delta\xi/\ln^2 \xi && [\varepsilon(\xi) \to 0]\\
&= \{C_\delta(\mu, \lambda) + \varepsilon(\xi)\} \cdot \sum 2a\Phi(2a) \cdot \delta\xi/\ln^2 \xi && \text{[vedi (5.2.3)']}\\
&= \frac{C_\delta(\mu, \lambda) + \varepsilon(\xi)}{4H} (\lambda^2 - \mu^2)\{1 + o(1)\} \delta\xi,
\end{aligned}$$

da cui la (6.2.2).

Il Lemma 5 risulta completamente dimostrato.

6.3. – Valutazione al disotto della somma $\sum_{B} (p_{n+1} - p_n)$.

Lemma 6. *Sia $0 < \delta \leqq 1$, $0 \leqq \mu < \lambda$ e $\lambda_1(\xi)$ definito nel modo seguente:*

$$\sum_{B(\delta\mu\lambda)} 1 = \frac{1}{2H} C_\delta(\mu, \lambda)\{\lambda_1(\xi) - \mu\} \cdot \delta\xi/\ln \xi \, . \tag{6.3.1}$$

Allora, fissato $\varepsilon > 0$, per ξ abbastanza grande risulta

$$\sum_{B(\delta\mu\lambda)} (p_{n+1} - p_n) \geqq \left[\frac{1}{4H} C_\delta(\mu, \lambda)\{\lambda_1^2(\xi) - \mu^2\} - \varepsilon\right] \delta\xi \, . \tag{6.3.2}$$

Osservazioni: I) Quando è $C_\delta(\mu, \lambda) = 0$ può non esistere $\lambda_1(\xi)$ ma, tuttavia, la (6.3.2) vale con qualunque $\lambda_1(\xi)$. Pertanto supporremo $C_\delta(\mu, \lambda) > 0$.

II) Per la (6.2.1) risulta evidentemente

$$\lambda_1(\xi) \leqq \lambda + o(1) \, , \qquad \text{per } \xi \to +\infty. \tag{6.3.3}$$

III) Sia $\mathcal{K} \geqq C_\delta(\mu, \lambda)$, allora sussiste una osservazione analoga all'Osserv. IV) del n. **1.6** e cioè: *Dall'uguaglianza*

$$\sum_{B(\delta\mu\lambda)} 1 = \frac{1}{2H} \mathcal{K} [\lambda_2(\xi) - \mu] \cdot \delta\xi/\ln \xi \tag{6.3.1'}$$

segue, per ogni $\varepsilon > 0$ e per ξ abbastanza grande,

$$\sum_{B(\delta\mu\lambda)} (p_{n+1} - p_n) \geqq \left\{\frac{1}{4H} \mathcal{K}[\lambda_2^2(\xi) - \mu^2] - \varepsilon\right\} \delta\xi \tag{6.3.2'}$$

[essendo qui $\lambda_2(\xi) \leqq \lambda + o(1)$ calcolato in dipendenza di $\mathcal{K}$].

Dimostrazione. Poniamo

$$\lambda_0(\xi) = \operatorname{Min} \{\lambda_1(\xi), \lambda\} \tag{6.3.4}$$

e quindi è $\lambda_0(\xi) \leqq \lambda_1(\xi) \leqq \lambda_0(\xi) + o(1)$; essendo $C_\delta(\mu, \lambda)$ ($\leqq \mathcal{C}_\delta \leqq 16H$) limitato, cambiando eventualmente ε in $\varepsilon/2$, possiamo limitarci a dimostrare, anzichè la (6.3.2), quella analoga

$$\sum_{B(\delta\mu\lambda)} (p_{n+1} - p_n) \geqq \left[\frac{1}{4H} C_\delta(\mu, \lambda)\{\lambda_0^2(\xi) - \mu^2\} - \varepsilon\right] \delta\xi \tag{6.3.5}$$

ottenuta sostituendo $\lambda_0(\xi)$ in luogo di $\lambda_1(\xi)$: questo ci consentirà di semplificare lievemente il discorso.

Sia m intero > 0; dividiamo l'intervallo (μ, λ) in m intervalli parziali uguali e poniamo

$$\mu = \mu_0 < \mu_1 < \ldots < \mu_m = \lambda\,, \qquad \mu_k - \mu_{k-1} = (\lambda - \mu)/m = \eta(m) = \eta\,, \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Poniamo anche provvisoriamente

$$(6.3.6) \qquad s_k = \sum_{B(\delta\mu_{k-1}\mu_k)} 1\,, \qquad S_k = \sum_{B(\delta\mu_{k-1}\mu_k)} (p_{n+1} - p_n)$$

e quindi

$$(6.3.7) \qquad \sum_{B(\delta\mu\lambda)} 1 = \sum_{k=1}^{m} s_k\,, \qquad \sum_{B(\delta\mu\lambda)} (p_{n+1} - p_n) = \sum_{k=1}^{m} S_k\,.$$

Sia $m_0 = m_0(\xi)$ l'intero scelto in guisa da avere

$$(6.3.8) \qquad \lambda_0(\xi) - \eta < \mu_{m_0} \leqq \lambda_0(\xi) < \mu_{m_0+1} \leqq \lambda_0(\xi) + \eta\;;$$

allora $\mu_{m_0} = \mu + m_0\eta$ e si verificano le seguenti limitazioni:

$$0 \leqq m_0(\xi) \leqq m\,,$$
$$(6.3.9) \qquad \lambda_0(\xi) - \mu - \eta < m_0\eta \leqq \lambda_0(\xi) - \mu < (m_0+1)\eta\,;$$

tenendo conto della definizione di m_0 nella (6.3.1.) e della prima delle (6.3.7), otteniamo:

$$(6.3.10) \qquad \frac{1}{2H}\,C_\delta(\mu, \lambda) m_0 \eta\,\frac{\delta\xi}{\ln\xi} \leqq \sum_{k=1}^{m} s_k \leqq \frac{1}{2H}\,C_\delta(\mu, \lambda)(m_0 + 1)\eta\,\frac{\delta\xi}{\ln\xi}\,.$$

Poniamo ancora

$$(6.3.11) \qquad \begin{cases} \gamma_k(\xi) = \dfrac{1}{2H}\,C_\delta(\mu, \lambda)\eta\,\dfrac{\delta\xi}{\ln\xi}\,, & \text{per } 1 \leqq k \leqq m_0\,, \\[2ex] \gamma_k(\xi) = 0\,, & \text{per } m_0 + 1 \leqq k \leqq m\,, \end{cases}$$

e così la (6.3.10) si può scrivere

$$(6.3.12) \qquad \sum_{k=1}^{m} \gamma_k(\xi) \leqq \sum_{k=1}^{m} s_k < \sum_{k=1}^{m} \gamma_k(\xi) + \frac{1}{2H}\,C_\delta(\mu, \lambda)\eta\,\frac{\delta\xi}{\ln\xi}\,.$$

Teniamo conto adesso che, evidentemente, è $S_k \geqq \mu_{k-1} s_k \cdot \ln \xi$ e quindi la seconda delle (6.3.7) ci dà:

$$\begin{aligned} \sum_{B(\delta\mu\lambda)} (p_{n+1} - p_n) &\geqq \sum_{k=1}^{m} \mu_{k-1} s_k \cdot \ln \xi \\ &= \sum_{k=1}^{m} \mu_{k-1} \gamma_k(\xi) \ln \xi + \sum_{k=1}^{m} \mu_{k-1} \{s_k - \gamma_k(\xi)\} \ln \xi \\ &= \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 , \end{aligned} \tag{6.3.13}$$

e siamo condotti a trattare le due somme $\sum_1$ e $\sum_2$.

$$\begin{aligned} \sum\nolimits_1 &= \sum_{k=1}^{m} \mu_{k-1} \gamma_k(\xi) \ln \xi \qquad \text{[vedi (6.3.11)]} \\ &= \sum_{k=1}^{m_0} \mu_{k-1} \gamma_k(\xi) \ln \xi \\ &= \frac{\delta \xi}{2H} C_\delta(\mu, \lambda) \eta \cdot \sum_{k=1}^{m_0} \mu_{k-1} \\ &= \frac{\delta \xi}{2H} C_\delta(\mu, \lambda) \eta \cdot \frac{m_0}{2} (\mu + \mu_{m_0 - 1}) . \end{aligned}$$

Per le (6.3.9) abbiamo:

$$\begin{aligned} \eta m_0 \cdot (\mu + \mu_{m_0-1}) &> \{\lambda_0(\xi) - \mu - \eta\} \cdot \{\mu + \lambda_0(\xi) - 2\eta\} \\ &= \lambda_0^2(\xi) - \mu^2 - \eta\{3\lambda_0(\xi) - \mu - 2\eta\} \\ &> \lambda_0^2(\xi) - \mu^2 - \eta\{3\lambda_0(\xi) - \mu\} , \end{aligned}$$

e otteniamo per la somma $\sum_1$ la valutazione al disotto

$$\sum\nolimits_1 > \frac{\delta \xi}{4H} C_\delta(\mu, \lambda) [\lambda_0^2(\xi) - \mu^2 - \eta\{3\lambda_0(\xi) - \mu\}] . \tag{6.3.14}$$

Veniamo a considerare $\sum_2$; ci proponiamo di dimostrare che $\liminf_{\xi \to +\infty} \sum_2 > -\eta^*$ essendo η^* un numero positivo piccolo quanto si vuole, pur di prendere m abbastanza grande.

Per il Lemma 5 [vedi (6.2.1)] abbiamo:

$$s_k = \frac{1}{2H} \{C_\delta(\mu_{k-1}, \mu_k) + E_k(\xi)\} (\mu_k - \mu_{k-1}) \frac{\delta \xi}{\ln \xi} ,$$

dove $\limsup E_k(\xi) \leqq 0$ e $\mu_k - \mu_{k-1} = \eta$. Essendo $C_\delta(\mu_{k-1}, \mu_k) \leqq C_\delta(\mu, \lambda)$, possiamo scrivere

$$s_k \ln \xi = \frac{\delta\xi}{2H}\eta\{C_\delta(\mu, \lambda) + \overline{E}_k(\xi)\} \tag{6.3.15}$$

dove $\overline{E}_k(\xi) \leqq E_k(\xi)$ e quindi

$$\limsup_{\xi \to +\infty} \overline{E}_k(\xi) \leqq 0 \,. \tag{6.3.16}$$

Tenendo conto della (6.3.15) e della definizione (6.3.11) di $\gamma_k(\xi)$, abbiamo, per i singoli termini di $\sum_2$,

$$\begin{cases} \{s_k - \gamma_k(\xi)\} \ln \xi = \dfrac{\delta\xi}{2H}\eta \cdot \overline{E}_k(\xi)\,, & \text{per } 1 \leqq k \leqq m_0, \\[2ex] \{s_k - \gamma_k(\xi)\} \ln \xi = s_k \ln \xi\,, & \text{per } m_0 + 1 \leqq k \leqq m\,. \end{cases} \tag{6.3.17}$$

Poniamo

$$R_l = \sum_{k=1}^{l} \{s_k - \gamma_k(\xi)\} \ln \xi \qquad \text{per } 1 \leqq l \leqq m,$$

e allora, per la prima delle (6.3.17), otteniamo

$$\begin{cases} R_l = \dfrac{\delta\xi}{2H}\eta \cdot \sum\limits_{k=1}^{l} \overline{E}_k(\xi) = \dfrac{\delta\xi}{2H}\eta \cdot E_l^*(\xi)\,, & 1 \leqq l \leqq m_0, \\[2ex] \limsup\limits_{\xi \to +\infty} E_l^*(\xi) \leqq 0\,, & \end{cases} \tag{6.3.18}$$

e per la seconda delle (6.3.17) otteniamo

$$R_{m_0} \leqq R_{m_0+1} \leqq \ldots \leqq R_m\,. \tag{6.3.19}$$

Veniamo a valutare R_m:

$$\begin{aligned} R_m &= \sum_{k=1}^{m} \{s_k - \gamma_k(\xi)\} \ln \xi \\ &= \sum_{k=1}^{m} s_k \ln \xi - \sum_{k=1}^{m_0} \gamma_k(\xi) \ln \xi && \text{[vedi (6.3.7, 1, 11)]} \\ &= \frac{\delta\xi}{2H} C_\delta(\mu, \lambda)\{\lambda_1(\xi) - \mu\} - \frac{\delta\xi}{2H} C_\delta(\mu, \lambda) m_0 \eta && \text{[vedi (6.3.4)]} \\ &= \frac{\delta\xi}{2H} C_\delta(\mu, \lambda)\{\lambda_0(\xi) - \mu - m_0\eta + o(1)\}\,, \end{aligned}$$

e poichè per la (6.3.9) è

$$0 \leqq \lambda_0(\xi) - \mu - m_0\eta < \eta\,,$$

risulta

$$0 \leqq R_m < \frac{\delta\xi}{2H}\, C_\delta(\mu,\lambda)\cdot\{\eta + o(1)\}\,. \tag{6.3.20}$$

Adesso, costruite le espressioni di R_l, operiamo su $\sum_2$ la trasformazione di BRUNACCI-ABEL:

$$\begin{aligned}
\sum\nolimits_2 &= \sum_{k=1}^{m} \mu_{k-1}\{s_k - \gamma_k(\xi)\} \ln \xi \\
&= \sum_{k=1}^{m} \mu_{k-1}(R_k - R_{k-1}) && (R_0 = 0) \\
&= -\sum_{k=1}^{m-1} (\mu_k - \mu_{k-1})R_k + \mu_{m-1}R_m && [\text{vedi } (6.3.20)] \\
&\geqq -\sum_{k=1}^{m-1} (\mu_k - \mu_{k-1})R_k \\
&= -\eta\sum_{k=1}^{m_0} R_k - \eta\sum_{k=m_0+1}^{m-1} R_k && [\text{vedi } (6.3.18,\ 19)] \\
&\geqq -\eta\,\frac{\delta\xi}{2H}\sum_{k=1}^{m_0} E_k^*(\xi) - \eta(m - m_0 - 1)R_m && [\text{vedi } (6.3.20)] \\
&\geqq -\eta\,\frac{\delta\xi}{2H}\left[\sum_{k=1}^{m_0} E_k^*(\xi) + \{\eta + o(1)\}(m - m_0 - 1)C_\delta(\mu,\lambda)\right] && [\text{vedi } (6.3.9)]
\end{aligned}$$

$$\geqq -\eta\,\frac{\delta\xi}{2H}\left[\sum_{k=1}^{m_0} E_k^*(\xi) + \{\lambda - \lambda_0(\xi) + (m - m_0)o(1)\}C_\delta(\mu,\lambda)\right]. \tag{6.3.21}$$

Siamo in grado di valutare al disotto la somma $\sum_B (p_{n+1} - p_n)$ servendoci di (6.3.13, 14, 21); queste ci dànno:

$$\sum_{B(\delta\mu\lambda)} (p_{n+1} - p_n) \geqq \frac{\delta\xi}{4H}\, C_\delta(\mu,\lambda)\{\lambda_0^2(\xi) - \mu^2\} - \omega(\xi)\cdot\delta\xi, \tag{6.3.22}$$

dove

$$\omega(\xi) = \frac{\eta}{4H}\left[2\eta\sum_{k=1}^{m_0} E_k^*(\xi) + C_\delta(\mu,\lambda)\{2\lambda + \lambda_0(\xi) - \mu + (m - m_0)o(1)\}\right].$$

Adesso si tratta di dimostrare che, fissato $\varepsilon > 0$, è possibile scegliere l'intero m abbastanza grande e ξ_0 abbastanza grande in guisa che per $\xi \geqq \xi_0$ risulti $\omega(\xi) < \varepsilon$. Incominciamo con lo scegliere m abbastanza grande in guisa da avere $4(3\lambda - \mu)\cdot(\lambda - \mu)/m < \varepsilon/3$; allora, essendo $\lambda_0(\xi) \leqq \lambda$, $C_\delta(\mu, \lambda) \leqq \mathcal{C}_\delta \leqq 16H$, $\eta = (\lambda - \mu)/m$, risulta

$$\eta \cdot \frac{1}{4H}\{\lambda + 2\lambda_0(\xi) - \mu\}\cdot C_\delta(\mu, \lambda) < \varepsilon/3 .$$

Fissato m in questo modo, si determini ξ_1 abbastanza grande in guisa che per $\xi \geqq \xi_1$ si abbia $4(\lambda - \mu)\{\lambda_1(\xi) - \lambda\} < \varepsilon/3$; allora anche il termine in $o(1)$ è sistemato:

$$\eta \cdot \frac{1}{4H} C_\delta(\mu, \lambda)(m - m_0)o(1) \leqq 4(\lambda - \mu)\left(1 - \frac{m_0}{m}\right) o(1) < \varepsilon/3 .$$

Si determini infine ξ_2 abbastanza grande in guisa che per $\xi \geqq \xi_2$ si abbia

$$\frac{\eta^2}{2H}\sum_{k=1}^{l} E_k^*(\xi) = \frac{(\lambda - \mu)^2}{2m^2 H}\sum_{k=1}^{l} E_k^*(\xi) < \varepsilon/3 \qquad (l = 1, 2, \dots, m) \qquad \text{per } \xi \geqq \xi_2,$$

e questo è possibile in forza delle (6.3.18).

Si scelga $\xi_0 = \text{Max}(\xi_1, \xi_2)$; allora, per quel valore di m e per $\xi \geqq \xi_0$ risulta

$$\omega(\xi) < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon .$$

Il primo membro di (6.3.22) non dipende da m e, pertanto, quando $\xi \geqq \xi_0$ risulta soddisfatta la (6.3.5) e il Lemma 6 risulta dimostrato.

6.4. – Dimostrazione dei tre Teoremi preliminari. I tre Teoremi preliminari I, II e III enunciati al n. **1.6** e colà accompagnati da qualche osservazione, ci hanno consentito di ricavare tutte le proposizioni della presente Memoria. La loro dimostrazione si ottiene, ormai semplicemente, sostituendo nei primi membri delle (6.2.1), (6.2.2), (6.3.1) e (6.3.2) dei Lemmi 5 e 6, le somme $\sum_A$ alle somme $\sum_B$ che ivi si trovano: questa sostituzione è consentita dal Lemma 4 che ci informa sullo scarto fra queste somme: ogni scarto rientra nel termine complementare che figura al secondo membro della corrispondente disuguaglianza (1.6.3), (1.6.4), (1.6.6), e pertanto è assicurata la validità dei tre Teoremi preliminari.

Bibliografia.

1. VIGGO BRUN, *Le crible d'Eratosthène et le théorème de Goldbach*, C. R. Acad. Sci. Paris **168**, 544-546 (1919_1); Videnskap Skrifter, I. Mat. Nat. Klasse n. 3, Kristiania (1920).
2. VIGGO BRUN, *La série* $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{29}+\frac{1}{31}+\ldots$ *est convergente ou finie*, Bull. Sci. Math. **43**, 100-104, 124-128 (1919).
3. A. BUCHSTAB, *Neue Verbesserung in der Methode des Eratostenischen Siebes*, Recueil Mathém. (N.S.) **4** (**46**), 375-387 (1938).
4. I. V. ČULANOVSKIĬ, *Alcune valutazioni connesse con un nuovo metodo di Selberg nella teoria dei numeri elementari* (in lingua russa), Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) **63**, 491-494 (1948). [Vedasi il rapporto in « Math. Reviews **10**, 355-356 (1949) (P. T. BATEMAN) ».]
5. P. ERDÖS, *The difference of consecutive Primes*, Duke Math. J. **6**, 438-441 (1940).
6. G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD, *Note on Messrs Shah and Wilson's paper entitled: « On an empirical formula connected with Goldbach's theorem. »*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **19**, 245-254 (1919).
7. G. H. HARDY and E. M. WRIGHT, *An introduction to the theory of numbers*, Clarendon Press, Oxford 1938.
8. R. A. RANKIN, *The difference between consecutive prime numbers*, II, Proc. Cambridge Philos. Soc. **36**, 255-266 (1940).
9. R. A. RANKIN, Idem, III, J. London Math. Soc. **22**, 226-230 (1947).
10. R. A. RANKIN, Idem, IV, Proc. Amer. Math. Soc. **1**, 143-150 (1950).
11. G. RICCI, *Su la congettura di Goldbach e la costante di Schnirelmann*, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) **6**, 71-116 (1937).
12. G. RICCI, *La differenza di nume i primi consecutivi*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politecn. Torino **11**, 149-200 (1952). Vedi *Errata-Corrige*, Ibidem **12**, p. 315 (1953).
13. G. RICCI, *Sul coefficiente di Viggo Brun*, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (3) **7**, 133-151 (1953).
14. N. M. SHAH and B. M. WILSON, *On an empirical formula connected with Goldbach's theorem*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **19**, 238-244 (1919).
15. H. N. SHAPIRO and J. WARGA, *On the representation of large integers as sums of primes*, I, Communications Pure Appl. Math. **3**, 153-176 (1950).