Rivista Mat. Univ. Parma 5, 197-207 (1954)

MARIA ANTONIETTA BARATTA (*)

Sopra un problema di ripartizione del calore. (**)

1. - Introduzione.

In precedenti lavori ([1], [2], [3] ([1])) sono stati risolti due problemi relativi alla propagazione del calore in due mezzi omogenei e termicamente isotropi S_1 ed S_2, riempienti rispettivamente un cilindro di raggio r_1 ed un manicotto cilindrico coassiale di raggi r_1 ed r_2, nell'ipotesi che, fissato un opportuno sistema di coordinate cilindriche, la temperatura in S_1 ed S_2 dipendesse dal posto soltanto tramite la distanza r dall'asse comune ad S_1 ed S_2, essendo nulla la temperatura iniziale. In sostanza, nei due problemi in questione si trattava di determinare, in S_1 ed S_2, la ripartizione del calore generato, sulla superficie comune, ad esempio per attrito, da una distribuzione continua di sorgenti variabili col tempo.

Supposte note le costanti fisiche di S_1 ed S_2, i problemi si presentavano di diversa difficoltà secondo che della distribuzione superficiale di sorgenti si intendesse assegnata, quale funzione del tempo, la temperatura $U'(t)$ oppure il rendimento $H'(t)$, ma in entrambi i casi veniva conseguita la soluzione mediante la riduzione dei corrispondenti problemi ai limiti ad un sistema di equazioni integrali di VOLTERRA.

Mi è parso interessante riprendere tali problemi e ricercarne una generalizzazione nel caso in cui le temperature dei due corpi risultassero funzioni, oltre che di r, anche dell'anomalia θ, avendo supposto funzioni di r e θ la distribuzione iniziale di temperatura in S_1 ed S_2 e di θ e t, o la temperatura delle sorgenti (1° *problema*) o il loro rendimento (2° *problema*).

Questa Nota ha per oggetto l'esposizione dei risultati relativi al primo problema.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.
(**) Ricevuto il 15-VII-1954.
([1]) I numeri in parentesi quadra si riferiscono alla Bibliografia posta alla fine del presente lavoro.

2. – Impostazione del problema e unicità della soluzione.

Indicheremo con

$U^{(i)} = U^{(i)}(r, \theta, t)$	le temperature in S_i $(i=1, 2)$,
$U' = U'(\theta, t)$	l'assegnata temperatura dello strato di sorgenti sulla superficie comune ad S_1 ed S_2,
$f_i = f_i(r, \theta)$	la distribuzione iniziale di temperatura in S_i,
a_i^2	la diffusività termica di S_i,
λ_i, h_i, λ', h'	rispettivamente i coefficienti di conducibilità e di conducibilità mutua di S_i e dello strato di sorgenti.

In tutto il seguito supporremo le f_i $(i=1, 2)$ dotate di derivate seconde rispetto ai loro argomenti, e, per ogni r, quali funzioni di θ, periodiche di periodo 2π, e inoltre supporremo la $U'(\theta, t)$ dotata di derivate seconde limitate e, per ogni t, quale funzione di θ, periodica di periodo 2π.

Il problema ci conduce a risolvere, com'è ben noto, i seguenti sistemi:

$$\text{(I)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U^{(1)}}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial \theta^2} = \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial U^{(1)}}{\partial t}, & \text{in } S_1, \quad t \geqslant 0; \\[2ex] \dfrac{\partial U^{(1)}}{\partial r} + k_1 U^{(1)} = k_1 U', & \text{per } r = r_1, \quad t \geqslant 0; \\[2ex] U^{(1)} = f_1, & \text{in } S_1, \quad t = 0; \end{cases}$$

$$\text{(II)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U^{(2)}}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial \theta^2} = \dfrac{1}{a_2^2}\dfrac{\partial U^{(2)}}{\partial t}, & \text{in } S_2, \quad t \geqslant 0; \\[2ex] \dfrac{\partial U^{(2)}}{\partial r} - k' U^{(2)} = -k' U', & \text{per } r = r_1, \quad t \geqslant 0; \\[2ex] \dfrac{\partial U^{(2)}}{\partial r} + k_2 U^{(2)} = 0, & \text{per } r = r_2, \quad t \geqslant 0; \\[2ex] U^{(2)} = f_2, & \text{in } S_2, \quad t = 0; \end{cases}$$

ove k_1 e k_2 sono costanti positive. In tutto il seguito porremo, per semplicità, $a_1^2 = a_2^2 = 1$.

L'unicità della soluzione dei sistemi (I) e (II), per le ipotesi fatte sulle funzioni U' ed f_i $(i=1, 2)$, resta stabilita, nei campi considerati per r e θ, e per ogni t, da generali e ben noti teoremi ([**4**], pp. 694-710), ai quali senz'altro ci riferiamo.

Per provare l'esistenza della soluzione dei sistemi (I) e (II) ci gioveremo ripetutamente di alcuni metodi classici molto vantaggiosi per la soluzione di problemi ai limiti della Fisica matematica.

3. – Esistenza della soluzione del sistema (I).

Posto

$$U^{(1)}(r, \theta, t) = V^{(1)}(r, \theta, t) + W^{(1)}(r, \theta, t)\,, \tag{1}$$

si soddisferà al sistema (I), quando $V^{(1)} = V^{(1)}(r, \theta, t)$ e $W^{(1)} = W^{(1)}(r, \theta, t)$ siano soluzioni rispettivamente dei seguenti sistemi:

$$(\mathscr{A})\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V^{(1)}}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V^{(1)}}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 V^{(1)}}{\partial \theta^2} = \dfrac{\partial V^{(1)}}{\partial t}, & \text{in } S_1, \quad t \geqslant 0; \\[2mm] \dfrac{\partial V^{(1)}}{\partial r} + k' V^{(1)} = 0, & \text{per } r = r_1, \quad t \geqslant 0; \\[2mm] V^{(1)} = f_1, & \text{in } S_1, \quad t = 0, \end{cases}$$

$$(\mathscr{B})\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 W^{(1)}}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial W^{(1)}}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 W^{(1)}}{\partial \theta^2} = \dfrac{\partial W^{(1)}}{\partial t} & \text{in } S_1, \quad t \geqslant 0. \\[2mm] \dfrac{\partial W^{(1)}}{\partial r} + k_1 W_1^{(1)} = k_1 U', & \text{per } r = r_1, \quad t \geqslant 0; \\[2mm] W^{(1)} = 0\,, & \text{in } S_1\,, \quad t = 0. \end{cases}$$

Nelle ipotesi formulate, è soluzione del sistema $(\mathscr{A})$ la funzione ([5], pag. 184)

$$V^{(1)}(r, \theta, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (A_{n,s} \cos n\theta + B_{n,s} \operatorname{sen} n\theta) J_n(\alpha_s r)\, e^{-\alpha_s^2 t}, \tag{2}$$

dove:

$$A_{0,s} = \frac{\alpha_s^2}{\pi r_1^2(\alpha_s^2 + k_1^2)\{J_0(\alpha_s r_1)\}^2} \int_0^{r_1}\int_{-\pi}^{\pi} r f_1(r, \theta) J_0(\alpha_s r)\, dr\, d\theta,$$

$$A_{n,s} = \frac{2\alpha_s^2}{\pi r_1^2(\alpha_s^2 + k_1^2 - n^2/r_1^2)\{J_n(\alpha_s r_1)\}^2} \int_0^{r_1}\int_{-\pi}^{\pi} r f_1(r, \theta) \cos n\theta \cdot J_n(\alpha_s r)\, dr\, d\theta\,,$$

$$B_{n,s} = \frac{2\alpha_s^2}{\pi r_1^2(\alpha_s^2 + k_1^2 - n^2/r_1^2)\{J_n(\alpha_s r_1)\}^2} \int_0^{r_1}\int_{-\pi}^{\pi} r f_1(r, \theta) \operatorname{sen} n\theta \cdot J_n(\alpha_s r)\, dr\, d\theta\,,$$

essendo gli α_s zeri di

$$\alpha J_n'(\alpha r_1) + k_1 J_n(\alpha r_1) = 0 .$$

Per il sistema $(\mathcal{B})$ seguiremo il noto procedimento di DUHAMEL ([**5**], pp. 18-20) per il quale la soluzione può esprimersi con

$$W^{(1)}(r, \theta, t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} W^*(r, \theta, \lambda, t-\lambda)\, d\lambda , \tag{3}$$

dove la funzione $W^*(r, \theta, \lambda, t)$ soddisfa al seguente sistema:

$$(\mathcal{B}^*) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 W^*}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial W^*}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 W^*}{\partial \theta^2} = \dfrac{\partial W^*}{\partial t}, & \text{in } S_1, \quad t \geqslant 0; \\ \dfrac{\partial W^*}{\partial r} + k_1 W^* = k_1 U'(\theta, \lambda), & \text{per } r = r_1, \ t \geqslant 0; \\ W^* = 0 , & \text{in } S_1, \quad t = 0; \end{cases}$$

essendo λ una costante positiva.

Per soddisfare al sistema $(\mathcal{B}^*)$ poniamo ancora:

$$W(r, \theta, \lambda, t) = Z(r, \theta, \lambda) + Y(r, \theta, \lambda, t) ,$$

con $Z = Z(r, \theta, \lambda)$ e $Y = Y(r, \theta, \lambda, t)$ soluzioni rispettivamente dei seguenti sistemi:

$$(\mathcal{B}_1^*) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial Z}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 Z}{\partial \theta^2} = 0 , & \text{in } S_1; \\ \dfrac{\partial Z}{\partial r} + k_1 Z = k_1 U' , & \text{per } r = r_1; \end{cases}$$

$$(\mathcal{B}_2^*) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 Y}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial Y}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} = \dfrac{\partial Y}{\partial t}, & \text{in } S_1, \quad t \geqslant 0; \\ \dfrac{\partial Y}{\partial r} + k_1 Y = 0 , & \text{per } r = r_1, \quad t \geqslant 0; \\ Y = -Z , & \text{in } S_1, \quad t = 0 . \end{cases}$$

Seguiremo per la soluzione del sistema $(\mathcal{B}_1)$ il noto metodo delle soluzioni elementari, ponendo:

$$Z(r, \theta, \lambda) = \mu(r)\ \eta(\theta, \lambda) .$$

Con ciò, indicato con γ una costante, dovrà aversi:

$$(4) \qquad r^2\frac{d^2\mu}{dr^2}+r\frac{d\mu}{dr}-\gamma\mu=0\,, \qquad\qquad (5) \qquad \frac{d^2\eta}{d\theta^2}+\gamma\eta=0\,.$$

La (4) ammette ([**6**], pag. 440) come integrale generale

$$\mu(r)=C_1r^{\nu/2}+C_2r^{-\nu/2}, \qquad \text{con } \nu=\sqrt{4\gamma}\,,$$

e quindi, per la realità della μ, dovremo supporre $\gamma>0$.

Posto $\gamma=n^2$ l'equazione (5) dà, subito, come integrale:

$$\eta(\theta,\lambda)=c_n(\lambda)\cos n\theta+d_n(\lambda)\,\text{sen}\, n\theta.$$

La regolarità di $Z(r,\theta,\lambda)$ in S_1 richiede $C_2=0$.

La soluzione della prima equazione di $(\mathcal{B}_1^*)$ è quindi data da

$$\sum_{n=0}^{\infty}r^n\{c_n(\lambda)\cos n\theta+d_n(\lambda)\,\text{sen}\, n\theta\}\,,$$

ove sia possibile la determinazione dei coefficienti $c_n(\lambda)$, $d_n(\lambda)$.

Le ipotesi formulate su $U'(\theta,t)$ ci assicurano la sua sviluppabilità in serie di Fourier, non solo, ma, possedendo la $U'(\theta,t)$ derivate seconde limitate, è possibile determinare una costante assoluta L tale da aversi, per i coefficienti della sua serie di Fourier,

$$|C_n(\lambda)|<\frac{L}{n^2}\,, \qquad |D_n(\lambda)|<\frac{L}{n^2}\,.$$

Per soddisfare alla condizione per $r=r_1$ dovrà aversi:

$$k_1U'(\theta,\lambda)=k_1\sum_{n=0}^{\infty}\{C_n(\lambda)\cos n\theta+D_n(\lambda)\,\text{sen}\, n\theta\}=\sum_{n=0}^{\infty}r_1^n\left(\frac{n}{r_1}+k_1\right)\cdot$$
$$\cdot\{c_n(\lambda)\cos n\theta+d_n(\lambda)\,\text{sen}\, n\theta\},$$

il che richiede:

$$c_n(\lambda)=\frac{k_1C_n(\lambda)}{r_1^n\{(n/r_1)+k_1\}}\,, \qquad d_n(\lambda)=\frac{k_1D_n(\lambda)}{r_1^n\{(n/r_1)+k_1\}}\,.$$

La serie

$$(6) \qquad Z(r,\theta,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}k_1\left(\frac{r}{r_1}\right)^n\left\{\frac{C_n(\lambda)}{(n/r_1)+k_1}\cos n\theta+\frac{D_n(\lambda)}{(n/r_1)+k_1}\,\text{sen}\, n\theta\right\},$$

per il modo con cui è stata costruita, soddisfa quindi al sistema ($\mathcal{B}_1^*$) e, com'è facile dimostrare ([7], pp. 375-401), risulta una funzione continua, dotata di derivata seconda rispetto ai suoi argomenti e, per ogni r, periodica, rispetto a θ, di periodo 2π ([7], pag. 126).

Pertanto la $Z(r, \theta, \lambda)$ soddisfa a tutte le condizioni richieste per la soluzione del sistema ($\mathcal{B}_2^*$) e, con metodo del tutto analogo a quello usato per il sistema ($\mathcal{A}$), si ha, per la soluzione del sistema ($\mathcal{B}_2^*$),

$$Y(r, \theta, \lambda, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \{E_{n,s}(\lambda) \cos n\theta + F_{n,s}(\lambda) \operatorname{sen} n\theta\} J_n(\alpha_s r) e^{-\alpha_s^2 t},$$

dove gli $E_{n,s}(\lambda)$ e $F_{n,s}(\lambda)$ sono espressi mediante formule analoghe a quelle per gli $A_{n,s}$ e $B_{n,s}$, in cui si ponga al posto di f_1 la funzione $-Z(r, \theta, \lambda)$.

Si ha quindi per la soluzione del sistema ($\mathcal{B}^*$) l'espressione:

$$W(r, \theta, \lambda, t) = \sum_{n=0}^{\infty} k_1 \left(\frac{r}{r_1}\right)^n \left\{ \frac{C_n(\lambda)}{(n/r_1) + k_1} \cos n\theta + \frac{D_n(\lambda)}{(n/r_1) + k_1} \operatorname{sen} n\theta \right\} + \tag{7}$$
$$+ \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \{E_{n,s}(\lambda) \cos n\theta + F_{n,s}(\lambda) \operatorname{sen} n\theta\} J_n(\alpha_s r)\, e^{-\alpha_s^2 t}.$$

Per la (3), sostituendovi la (7), ricordando la (2) e la posizione (1), si ha, a conti fatti, per la soluzione del sistema (I) l'espressione:

$$U^{(1)}(r, \theta, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \{A_{n,s} \cos n\theta + B_{n,s} \operatorname{sen} n\theta\} J_n(\alpha_s r)\, e^{-\alpha_s^2 t} + \tag{8}$$
$$+ \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \{E_{n,s}(\lambda) \cos n\theta + F_{n,s}(\lambda) \operatorname{sen} n\theta\} J_n(\alpha_s r) e^{-\alpha_s^2 (t-\lambda)} d\lambda\,.$$

4. – Esistenza della soluzione del sistema (II).

a) *Il sistema delle funzioni* $U_n(\alpha_s, r)$.

Prima di passare alla soluzione del sistema (II), converrà premettere qualche considerazione sul sistema di funzioni:

$$U_n = U_n(\alpha, r) = J_n(\alpha r)\{\alpha Y_n'(\alpha r_2) + k_2 Y_n(\alpha r_2)\} - Y_n(\alpha r)\{\alpha J_n'(\alpha r_2) + k_2 J_n(\alpha r_2)\},$$

con α, k_2, r_2 costanti, $J_n(\alpha r)$ e $Y_n(\alpha r)$ simboli delle funzioni di BESSEL di prima e seconda specie.

Ogni U_n, come combinazione lineare a coefficienti costanti, non contemporaneamente nulli ([2]), delle due soluzioni dell'equazione di BESSEL, soddisfa a detta equazione, e quindi ammette infiniti zeri reali, semplici, ordinabili. Da ciò discende ([9], pp. 481-596), che anche l'equazione

$$\alpha U_n'(\alpha, r_1) - k' U_n(\alpha, r_1) = 0 \tag{9}$$

ammette infinite soluzioni reali, semplici, ordinabili.

Con procedimento analogo a quello usato per le $J_n(\alpha r)$ ([5], pp. 172-173) si può provare che anche le $U_n(\alpha, r)$ risultano ortogonali in un intervallo finito, ottenendo:

$$\int_{r_1}^{r_2} r U_n^2(\alpha, r)\, dr = \frac{1}{2\alpha^2}\left\{\left[r_2^2 k_2^2 + (\alpha^2 r_2^2 - n^2)\right] U_n^2(\alpha, r_2) - \left[r_1^2 k'^2 + (\alpha^2 r_1^2 - n^2)\right] U_n^2(\alpha, r_1)\right\},$$

dove α è uno zero della (9), mentre la condizione

$$\alpha U_n'(\alpha, r_2) + k_2 U_n(\alpha, r_2) = 0$$

è identicamente soddisfatta.

b) *Costruzione della soluzione del sistema* (II).

Anche in questo caso procediamo per gradi, ponendo dapprima:

$$U^{(2)}(r, \theta, t) = V^{(2)}(r, \theta, t) + W^{(2)}(r, \theta, t)\,, \tag{10}$$

con $V^{(2)} = V^{(2)}(r, \theta, t)$ e $W^{(2)} = W^{(2)}(r, \theta, t)$ soddisfacenti rispettivamente ai seguenti sistemi:

$$(\mathcal{G}) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{\partial V^{(2)}}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V^{(2)}}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 V^{(2)}}{\partial \theta^2} = \dfrac{\partial V^{(2)}}{\partial t}\,, & \text{in} \quad S_2, & t \geqslant 0; \\ \dfrac{\partial V^{(2)}}{\partial r} - k' V^{(2)} = - k' U'\,, & \text{per} \quad r = r_1, & t \geqslant 0; \\ \dfrac{\partial V^{(2)}}{\partial r} + k_2 V^{(2)} = 0\,, & \text{per} \quad r = r_2, & t \geqslant 0; \\ V^{(2)} = 0\,, & \text{in} \quad S_2, & t = 0; \end{array} \right.$$

([2]) Infatti, se fosse

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha Y_n'(\alpha r_2) + k_2 Y_n(\alpha r_2) = 0\,, \\ \alpha J_n'(\alpha r_2) + k_2 J_n(\alpha r_2) = 0\,, \end{array} \right.$$

si avrebbe

$$J_n(\alpha r_2)\, Y_n'(\alpha r_2) - Y_n(\alpha r_2) J_n'(\alpha r_2) = 0\,,$$

il che è assurdo ([8], pag. 50).

$$(\mathscr{H})\quad\begin{cases}\dfrac{\partial W^{(2)}}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial W^{(2)}}{\partial r}-\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 W^{(2)}}{\partial \theta^2}=\dfrac{\partial W^{(2)}}{\partial t}, & \text{in}\quad S_2, \quad t\geqslant 0;\\[2mm] \dfrac{\partial W^{(2)}}{\partial r}-k' W^{(2)}=0, & \text{per}\quad r=r_1,\quad t\geqslant 0;\\[2mm] \dfrac{\partial W^{(2)}}{\partial r}+k_2 W^{(2)}=0, & \text{per}\quad r=r_2,\quad t\geqslant 0;\\[2mm] W^2=f_2, & \text{in}\quad S_2,\quad t=0.\end{cases}$$

Con metodo del tutto analogo a quello usato per il sistema (I), posto

$$W^{(2)}(r,\theta,t)=R(r)\,\zeta(\theta)\,T(t)\,,$$

si ottiene per il sistema ($\mathscr{H}$), come soluzione elementare,

$$W_n^{(2)}=e^{-\alpha_s^2 t}(G_n\cos n\theta+H_n\operatorname{sen} n\theta)\,U_n(\alpha_s,r)\,,$$

dove gli α_s sono le soluzioni dell'equazione (9).

Date le ipotesi fatte sulla $f_2(r,\theta)$, è soluzione del sistema ($\mathscr{H}$) la funzione:

$$W^{(2)}=\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\{G_{n,s}\cos n\theta+H_{n,s}\operatorname{sen} n\theta\}\,U_n(\alpha_s,r)\,e^{-\alpha_s^2 t}\,, \tag{11}$$

con

$$G_{0,s}=\frac{\alpha_s^2}{\pi\{[r_2^2k_2^2+\alpha_s^2r_2^2]\,U_0^2(\alpha_s,r_2)-[r_1^2k'^2+\alpha_s^2r_1^2]\,U_0^2(\alpha_s,r_1)\}}\int_{r_1}^{r_2}\int_{-\pi}^{\pi}rf_2(r,\theta)\,U_0(\alpha_s,r)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,,$$

$$G_{n,s}=\frac{2\alpha_s^2}{\pi\{[r_2^2k_2^2+(\alpha_s^2r_2^2-n^2)]\,U_n^2(\alpha_s,r_2)-[r_1^2k'^2+(\alpha_s^2r_1^2-n^2)]\,U_n^2(\alpha_s,r_1)\}}\int_{r_1}^{r_2}\int_{-\pi}^{\pi}rf_2(r,\theta)\cos n\theta\cdot U_n(\alpha_s,r)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta,$$

$$H_{n,s}=\frac{2\alpha_s^2}{\pi\{[r_2^2k_2^2+(\alpha_s^2r_2^2-n^2)]\,U_n^2(\alpha_s,r_2)-[r_1^2k'^2+(\alpha_s^2r_1^2-n^2)]\,U_n^2(\alpha_s,r_1)\}}\int_{r_1}^{r_2}\int_{-\pi}^{\pi}rf_2(r,\theta)\operatorname{sen} n\theta\cdot U_n(\alpha_s,r)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

Per la soluzione del sistema ($\mathscr{G}$) seguiamo ancor qui il procedimento di DUHAMEL. Soddisferà al sistema ($\mathscr{G}$) la funzione

$$V^{(2)}(r,\theta,t)=\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}V^*(r,\theta,\lambda,t-\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\,, \tag{12}$$

quando la $V^* = V^*(r, \theta, \lambda, t)$ soddisfi al sistema:

$$(\mathcal{G}^*) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V^*}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V^*}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 V^*}{\partial \theta^2} = \dfrac{\partial V^*}{\partial t}, & \text{in} \quad S_2, \quad t \geqslant 0; \\ \dfrac{\partial V^*}{\partial r} - k' V^* = -k' U', & \text{per} \quad r = r_1, \quad t \geqslant 0; \\ \dfrac{\partial V^*}{\partial r} + k_2 V^* = 0, & \text{per} \quad r = r_2, \quad t \geqslant 0; \\ V^* = 0, & \text{in} \quad S_2, \quad t = 0. \end{cases}$$

Porremo ancora

$$V^*(r, \theta, \lambda, t) = S(r, \theta, \lambda) + X(r, \theta, \lambda, t), \tag{13}$$

con $S = S(r, \theta, \lambda)$, $X = X(r, \theta, \lambda, t)$ soluzioni rispettivamente dei seguenti sistemi:

$$(\mathcal{G}_1^*) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 S}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial S}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} = 0, & \text{in} \quad S_2; \\ \dfrac{\partial S}{\partial r} - k' S = -k' U', & \text{per} \quad r = r_1; \\ \dfrac{\partial S}{\partial r} + k_2 S = 0, & \text{per} \quad r = r_2; \end{cases}$$

$$(\mathcal{G}_2^*) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 X}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial X}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 X}{\partial \theta^2} = \dfrac{\partial X}{\partial t} & \text{in} \quad S_2, \quad t \geqslant 0; \\ \dfrac{\partial X}{\partial r} - k' X = 0, & \text{per} \quad r = r_1, \quad t \geqslant 0; \\ \dfrac{\partial X}{\partial r} + k_2 X = 0, & \text{per} \quad r = r_2, \quad t \geqslant 0; \\ X = -S, & \text{in} \quad S_2, \quad t = 0. \end{cases}$$

Procedendo come per il sistema $(\mathcal{B}_1^*)$, si vede facilmente che, per le ipotesi fatte sulla U', soddisfa al sistema $(\mathcal{G}_1^*)$ la funzione:

$$S(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} k' \left\{ \left(\frac{r}{r_2}\right)^n \left(\frac{n}{r_2} - k_2\right) + \left(\frac{r_2}{r}\right)^n \left(\frac{n}{r_2} + k_2\right) \right\} \cdot \\ \cdot \frac{C_n(\lambda) \cos n\theta + D_n(\lambda) \operatorname{sen} n\theta}{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n \left(\frac{n}{r_2} + k_2\right)\left(\frac{n}{r_1} + k'\right) - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n \left(\frac{n}{r_2} - k_2\right)\left(\frac{n}{r_1} - k'\right)}. \tag{14}$$

Si può provare ([7], pag. 401), con opportuni calcoli, che la (14) è una funzione continua di r e θ, per ogni r, periodica rispetto a θ, di periodo 2π ([7], pag. 126), e dotata di derivate seconde.

Pertanto la $S(r, \theta, \lambda)$ soddisfa a tutte quelle condizioni che permettono di risolvere il sistema $(\mathcal{G}_2^*)$ con metodo del tutto analogo a quello usato per il sistema $(\mathcal{H})$ e di trovare, come sua soluzione, l'espressione

$$(15) \qquad X(r, \theta, \lambda) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \{P_{n,s}(\lambda) \cos n\theta + Q_{n,s}(\lambda) \operatorname{sen} n\theta\} U_n(\alpha_s, r)\, e^{-\alpha_s^2 t},$$

dove i $P_{n,s}(\lambda)$ e $Q_{n,s}(\lambda)$ sono assegnati da formule analoghe a quelle trovate per i $G_{n,s}$ e $H_{n,s}$, ove si sostituisca alla $f_2(r, \theta)$ la funzione $-S(r, \theta, \lambda)$.

Per la posizione (13), ricordando la (12), la (14) e la (15), si ha per la soluzione del sistema $(\mathcal{G}^*)$:

$$(16) \qquad V^*(r, \theta, \lambda, t) = \sum_{n=0}^{\infty} k' \left\{\left(\frac{r}{r_2}\right)^n \left(\frac{n}{r_2} - k_2\right) + \left(\frac{r_2}{r}\right)^n \left(\frac{n}{r_2} + k_2\right)\right\} \cdot$$
$$\cdot \frac{C_n(\lambda) \cos n\theta + D_n(\lambda) \operatorname{sen} n\theta}{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n \left(\frac{n}{r_2} + k_2\right)\left(\frac{n}{r_1} + k'\right) - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n \left(\frac{n}{r_2} - k_2\right)\left(\frac{n}{r_1} - k'\right)} +$$
$$+ \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \{P_{n,s}(\lambda) \cos n\theta + Q_{n,s}(\lambda) \operatorname{sen} n\theta\} U_n(\alpha_s, r)\, e^{-\alpha_s^2 t}.$$

Sostituendo la (16) alla (12), ricordando la (11) e la posizione (10), si ha infine, a conti fatti, quale soluzione del sistema (II),

$$(17) \qquad U^{(2)} = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \{G_{n,s} \cos n\theta + H_{n,s} \operatorname{sen} n\theta\} U_n(\alpha_s, r)\, e^{-\alpha_s^2 t} +$$
$$+ \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \{P_{n,s}(\lambda) \cos n\theta + Q_{n,s}(\lambda) \operatorname{sen} n\theta\} U_n(\alpha_s, r)\, e^{-\alpha_s^2 (t-\lambda)}\, d\lambda.$$

La (8) e la (17) costituiscono insieme la soluzione del problema considerato.

Bibliografia.

[1] G. Sestini, *Sopra un problema di propagazione del calore*, Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend. Cl. Sci. Mat. Nat. **75**, 47-65 (1941).

[2] G. Sestini, *Sopra un problema ai limiti in un caso non stazionario di propagazione del calore*, Univ. Roma, Ist. Naz. Alta Mat., Rend. Mat. e Appl. (5) **6**, 464-477 (1947).

[3] G. Sestini, *Sopra due problemi di propagazione del calore in un solido eterogeneo dotato di simmetria cilindrica*, Rivista Mat. Univ. Parma **1**, 405-417 (1950).

[4] M. Picone, *Appunti di Analisi superiore*, Rondinella, Napoli 1940.

[5] H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of heat in solids*, Clarendon Press, Oxford 1948.

[6] E. Kamke, *Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen*. Bd. II: *Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung für eine gesuchte Function*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1950.

[7] L. Tonelli, *Serie trigonometriche*, Zanichelli, Bologna 1928.

[8] F. E. Relton, *Applied Bessel functions*, Blackie and Son, London 1946.

[9] G. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions*, University Press, Cambridge 1952.