Rivista Mat. Univ. Parma 5, 227-232 (1954)

GIORGIO SESTINI (*)

Criterio di stabilità in un problema non lineare di meccanica dei sistemi a più gradi di libertà.

1. - Premessa.

In precedenti lavori ([5], [6]) (¹) ho messo in rilievo alcuni semplici criteri di stabilità per gli integrali di una equazione differenziale non lineare del 2° ordine del tipo di quelle atte a reggere, ad esempio, il moto di un sistema materiale ad un sol grado di libertà soggetto a sollecitazione di tipo elastico, a resistenza funzione della velocità oltre che ad un campo di forza funzione del tempo.

Tali criteri, che, per le ipotesi formulate sia sul termine proveniente dalla resistenza sia su quello relativo alla forza disturbatrice funzione del tempo, non rientrano in quelli ben noti di LEVINSON [3], CACCIOPPOLI-GHIZZETTI ([1], [2]), REUTER [4], possono agevolmente, e con qualche generalizzazione, estendersi a sistemi a più gradi di libertà.

Tali estensioni formano l'oggetto di questa Nota per quanto concerne il criterio stabilito in [5] e di una Nota successiva a questa della dott. B. MANFREDI per i criteri esposti in [6].

2. - Impostazione.

Con riferimento ad un sistema cartesiano ortogonale di uno spazio S ad n dimensioni, con l'origine in un punto O, e all'intervallo $(t_0, +\infty)$ per il tempo t, siano $x_i = x_i(t)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ le coordinate al tempo t di un punto P di S.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.

(¹) I numeri in parentesi quadra si riferiscono alla Bibliografia posta al termine della Nota.

Come è ben noto le $x_i = x_i(t)$ oltre che le equazioni orarie del moto di P in S, possono caratterizzare il moto di un sistema Σ ad n gradi di libertà, non appena si interpreti S come spazio delle configurazioni per il moto di Σ.

L'equazione differenziale vettoriale, in generale non lineare,

$$\ddot{P} = \Phi(P, \dot{P}, t) \quad (^2), \tag{1}$$

con $\Phi(P, \dot{P}, t)$ vettore di S, ovvero il sistema di equazioni scalari differenziali ordinarie del 2° ordine, in generale non lineari,

$$\ddot{x}_i(t) = \Phi_i(x_1, \ldots, x_n;\ \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n;\ t), \tag{2}$$

cui la (1) dà luogo, passando alle componenti di $\ddot{P}$ e di Φ, traduce nella maggioranza dei casi, il problema della determinazione, a partire da fissate condizioni iniziali, del moto di un sistema olonomo ad n gradi di libertà, soggetto a forze funzioni della posizione dei punti di Σ, della loro velocità oltre che del tempo.

Particolare interesse presenta lo studio della (1) quando si abbia:

$$\Phi(P, \dot{P}, t) = -\boldsymbol{G}(P) - \boldsymbol{R}(P, \dot{P}) + \boldsymbol{F}(t), \tag{3}$$

con $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{F}$ simboli di vettori di S.

Noi proveremo la stabilità degli integrali di (1), quando esistano nell'intervallo $(t_0, +\infty)$, cioè la limitazione nello stesso intervallo delle funzioni $|x_i(t)|$, $|\dot{x}_i(t)|$ quando, valendo per Φ la scomposizione (3), i vettori $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{F}$ soddisfino alle seguenti ipotesi:

a) le componenti del vettore $\boldsymbol{G}$, $g_i = g_i(x_1, \ldots, x_n)$, soddisfino alle due condizioni:

$$g_i\, x_i \geqslant 0, \qquad g_i \geqslant \omega^2\, x_i, \qquad \omega \text{ costante positiva;}$$

b) le componenti del vettore $\boldsymbol{R}$, $r_i = r_i(x_1, \ldots, x_n;\ \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$ siano, per ogni sistema di valori, limitati o no delle x_i, funzioni limitate, quando lo siano le $\dot{x}_i$, e tali da soddisfare inoltre alle due ulteriori ipotesi:

$$r_i\, \dot{x}_i \geqslant 0, \qquad \lim_{|\dot{x}_i| \to +\infty} r_i = \infty\ ; \quad (^3)$$

---

(2) Il punto sovrapposto indica, come di consueto, derivazione rispetto al tempo.

(3) Giova osservare che tali ipotesi risultano soddisfatte quando al vettore $\boldsymbol{R}$ si dia l'usuale espressione della resistenza di un mezzo, anche non omogeneo, $\boldsymbol{R} = -\mu(P, v)\dot{P}$, con $v = \operatorname{mod} \dot{P}$ e $\mu > 0$ funzione limitata del posto e continua di v.

c) le componenti del vettore $\boldsymbol{F}$, $f_i = f_i(t)$, siano funzioni a variazione limitata nell'intervallo $(t_0, +\infty)$.

3. - Osservazioni sugli integrali di (2).

Il sistema (2) ammetta integrali $x_i(t)$ definiti nell'intervallo $(t_0, +\infty)$. Con considerazioni del tutto analoghe a quelle di [5], si vede facilmente che le funzioni x_i, qualora non siano limitate, non possono, nelle ipotesi sopra dichiarate, diventare definitivamente monotone.

Infatti dalle (2), scritte nelle nostre ipotesi,

$$\ddot{x}_i = -g_i - r_i + f_i\,, \tag{4}$$

avendosi per x_i illimitata monotona, ad esempio crescente o non decrescente, $\dot{x}_i \geqslant 0$, con che $r_i \geqslant 0$, tenuto conto della limitazione delle f_i, si ha

$$\lim_{t\to+\infty} \ddot{x}_i = -\infty\,,$$

con che $\lim\limits_{t\to+\infty} \dot{x}_i = -\infty$, contrariamente alla ipotesi $\dot{x}_i \geqslant 0$.

Analogamente si prova che la x_i non può diventare definitivamente decrescente o non crescente.

Ancor qui, come in [5], vale poi il notevole teorema che, ove risultino limitate nell'intervallo $(t_0, +\infty)$ le $\dot{x}_i$, pure limitate devono risultare, nello stesso intervallo, le x_i.

La limitatezza delle $\dot{x}_i$ porta infatti alla limitatezza delle r_i [ipotesi b)]. Qualora non risultassero limitate le x_i, per l'ipotesi a), dato che le f_i sono limitate per qualunque $t \geqslant t_0$, non risulterebbero limitate le $\ddot{x}_i$.

Ciò porterebbe come conseguenza la non limitazione, per ogni $t \geqslant t_0$, delle $\dot{x}_i$, contrariamente alla ipotesi.

Da quanto precede discende una osservazione assai importante per il seguito. Se le $\dot{x}_i$ non sono limitate, a partire da un conveniente istante $\bar{t} \geqslant t_0$, devono cambiare infinite volte di segno e quindi, per la supposta continuità, annullarsi infinite volte.

4. - Teorema.

Se le (4), *nelle ipotesi* a), b) *e* c), *posseggono integrali oscillanti, definiti nell'intervallo* $(t_0, +\infty)$, *essi sono limitati.*

Proveremo, come in [5], la limitatezza di ogni integrale oscillante di (4), con le ipotesi dichiarate, mostrando che restano limitati per ogni t i suoi massimi positivi e gli eventuali suoi minimi negativi, risultando conseguenza della limitazione dei massimi quella degli eventuali minimi positivi.

Consideriamo l'intervallo (t_0, t_1) (4) facendo coincidere t_0 con l'istante cui corrisponde un massimo positivo di x_i, essendo t_1 quello cui corrisponde il minimo negativo immediatamente successivo.

Dalla (4), moltiplicata per $2\dot{x}_i$ e integrata rispetto a t in (t_0, t_1), essendo $\dot{x}_i(t_0) = \dot{x}_i(t_1) = 0$, si ha

$$\int_{t_0}^{t_1} g_i\, \dot{x}_i\, dt + \int_{t_0}^{t_1} r_i\, \dot{x}_i\, dt - \int_{t_0}^{t_1} f_i\, \dot{x}_i\, dt = 0\,.$$

Da questa, trascurando il secondo termine, positivo per l'ipotesi b), ed applicando il teorema della media all'ultimo termine del primo membro, si ottiene:

$$\int_{t_0}^{t_1} g_i\, \dot{x}_i\, dt < -\bar{f}_{i,1}[x_i(t_0) - x_i(t_1)]\,, \tag{5}$$

ove con $\bar{f}_{i,1}$ si è indicato il valor medio di f_i in (t_0, t_1).

Tenendo conto della ipotesi a), avendosi

$$\omega^2\,[x_i^2(t_1) - x_i^2(t_0)] = 2\int_{t_0}^{t_1} \omega^2 x_i\, \dot{x}_i\, dt \leqslant 2\int_{t_0}^{t_1} g_i\, \dot{x}_i\, dt\,,$$

si ha anche, per confronto con la (5),

$$\omega^2\,[x_i^2(t_1) - x_i^2(t_0)] \leqslant -(1/2)\bar{f}_{i,1}[x_i(t_0) - x_i(t_1)]\,.$$

Questa, che è formalmente identica alla disuguaglianza che in [5] viene dedotta dalla uguaglianza (6), ci permette di ripetere per ogni x_i oscillante le considerazioni fatte in [5] e giungere così alla limitazione dei massimi positivi di x_i, corrispondenti alla successione di istanti $\{t_{2n}\}$,

$$x_i(t_{2n}) < x_i(t_0) + \frac{2}{\omega^2}\, V_i\,, \tag{6}$$

dove con V_i si è indicata la variazione totale di f_i nell'intervallo $(t_0, +\infty)$.

---

(4) Per semplicità di notazione si è tralasciato un indice i ad indicare che ci si riferisce alla x_i.

Analogamente alla (10) di [5], si ha poi per i minimi negativi di x_i, corrispondenti a istanti della successione $\{t_{2n+1}\}$,

$$|x_i(t_{2n+1})| < x_i(t_0) + \frac{2}{\omega^2}[V_i + L_i], \tag{7}$$

essendo L_i l'estremo superiore dei valori di f_i in $(t_0, +\infty)$.

Le limitazioni (6) e (7) che, per essere le x_i e le f_i in numero finito, possono, con convenienti maggiorazioni, rendersi indipendenti anche dall'indice i, dimostrano il Teorema enunciato.

5. - Criterio di stabilità per gli integrali di (4).

Se il sistema (4), *valendo le ipotesi* a), b), c), *possiede integrali definiti nell'intervallo* $(t_0, +\infty)$ *essi sono stabili.*

Tale criterio è immediata conseguenza delle considerazioni svolte ai nn. **3** e **4**. Infatti, nelle ipotesi dichiarate, gli integrali di (4) non limitati devono essere oscillanti, ma, per il Teorema sopra dimostrato, gli integrali di (4) oscillanti sono limitati e da ciò la validità del criterio, non appena resti provato che la limitazione delle x_i porta come conseguenza quella delle $\dot{x}_i$.

Per provare questa ultima asserzione ci appoggeremo ancora alla (4), moltiplicata per $2\dot{x}_i$ e integrata termine a termine in un intervallo (t^*, t) [ad esempio interno a quello di due zeri consecutivi di $\dot{x}_i$] nel quale $\dot{x}_i$ mantiene segno costante. Supposto per semplicità $\dot{x}_i(t^*) = 0$, si ha:

$$\dot{x}_i^2(t) + 2\int_{t^*}^{t} g_i\,\dot{x}_i\,dt + 2\int_{t^*}^{t} r_i\,\dot{x}_i\,dt = 2\int_{t^*}^{t} f_i\,\dot{x}_i\,dt\,.$$

Da questa, tenuto conto delle ipotesi e con evidenti maggiorazioni, si ottiene, con le consuete notazioni,

$$\dot{x}_i^2 < \omega^2 x_i^2(t^*) + 2\bar{f}_i[x_i(t) - x_i(t^*)]\,.$$

Essendo le funzioni x_i e f_i limitate in $(t_0, +\infty)$, indicato con N_i il più grande degli estremi superiori di $|x_i|$ e $|f_i|$ nello stesso intervallo, segue subito, qualunque sia t,

$$\dot{x}_i^2 < (\omega^2 + 4)N_i^2\,,$$

da cui

$$|\dot{x}_i| < (\omega + 2)N_i\,,$$

come volevamo provare.

Resta così provato l'enunciato criterio di stabilità degli integrali di (1), valendo la (3) e le ipotesi dichiarate in a), b) e c).

6. – Bibliografia.

[1] R. Caccioppoli e A. Ghizzetti: *Ricerche asintotiche per una particolare equazione differenziale non lineare*, Atti Accad. Italia, Rend. Cl. Sci. Mat. Fis. Nat. (7) **3**, 427-440 (1942).

[2] R. Caccioppoli e A. Ghizzetti: *Ricerche asintotiche per una classe di sistemi di equazioni differenziali ordinarie non lineari*, Ibidem 493-501.

[3] N. Levinson: *On a non linear differential equation of the second oder*, J. Math. Physics **22**, 181-187 (1943).

[4] G. E. H. Reuter: *Boundedness theorems for non linear differential equations of the second order*, J. London Math. Soc. **27**, 48-58 (1952).

[5] G. Sestini: *Criterio di stabilità in un problema di Meccanica non lineare*, Rivista Mat. Univ. Parma **2**, 303-314 (1951).

[6] G. Sestini: *Criteri di stabilità per il moto di un punto soggetto a forza elastica, a resistenza e ad una forza disturbatrice*, Atti 4° Congresso Un. Mat. It., vol. **2**, 559-564 (1951).