Rivista Mat. Univ. Parma 5, 313-324 (1954)

D. QUILGHINI (*)

Sull'approssimazione delle funzioni continue di due variabili mediante polinomi di interpolazione algebrici e trigonometrici. (**)

Introduzione.

Argomento di questa Nota è lo studio della approssimazione di una funzione continua $f(x, y)$, di due variabili, mediante polinomi di interpolazione algebrici e trigonometrici.

È noto (1) che, quando si faccia uso della formula di interpolazione di LAGRANGE in due variabili, nell'ipotesi che il doppio sistema di punti fondamentali, per la interpolazione, sia costituito dagli zeri

$$x_s^{(n)} = \cos \frac{2s-1}{2n} \pi \quad (s = 1, 2, ..., n), \qquad y_i^{(m)} = \cos \frac{2i-1}{2m} \pi \quad (i = 1, 2, ..., m)$$

del polinomio di TCHEBYCHEFF di prima specie, la doppia successione $\{L_{n,m}[f(x,y)]\}$ dei polinomi di LAGRANGE, quando n ed m tendono all'infinito in modo che, se h e k sono due costanti positive prefissate, risulti $n/m \leqslant h$ e $m/n \leqslant k$, converge verso $f(x, y)$, e ciò uniformemente nel quadrato $Q \equiv [-1 \leqslant x,\ y \leqslant 1]$, quando la $f(x, y)$ soddisfa, in tutto il suo campo di esistenza, ad una condizione di LIPSCHITZ, ossia quando:

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leqslant L\{|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|\} \qquad (L = \text{costante}).$$

Nella presente Nota studieremo, invece, una formula di interpolazione in due variabili, dedotta da quella di HERMITE.

(*) Indirizzo: Istituto Matematico ULISSE DINI, Università, Firenze, Italia.

(**) Ricevuto il 15-VII-1954.

(1) L. MERLI, *Sull'approssimazione delle funzioni continue di due variabili mediante polinomi,* Boll. Un. Mat. Ital. (3) 5, 68-71 (1950).

Seguendo il caso di FEJÉR, nell'ipotesi di una sola variabile (2), supporremo che i polinomi interpolanti $H_{n,m}(x, y)$ siano di grado $2n-1$ in x e $2m-1$ in y, ed abbiano eguale a zero, nei punti fondamentali della interpolazione, le loro derivate prime. Chiameremo le funzioni $H_{n,m}[f(x, y)]$ polinomi interpolanti di HERMITE in due variabili.

Quando il doppio sistema di punti fondamentali, per l'interpolazione, è costituito dagli zeri dei polinomi di TCHEBYCHEFF di prima specie, dimostreremo la convergenza della doppia successione $\{H_{n,m}(x, y)\}$, comunque n ed m tendano all'infinito, verso la $f(x, y)$ supposta continua, e ciò uniformemente nel quadrato $Q \equiv [-1 \leqslant x,\ y \leqslant 1]$.

Se poi la $f(x, y)$ soddisfa ad una condizione di LIPSCHITZ di ordine α, $1/2 < \alpha \leqslant 1$, supposto cioè che sia

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leqslant L\{|x_1 - x_2|^\alpha + |y_1 - y_2|^\alpha\} \qquad (L = \text{cost.},\ 1/2 < \alpha \leqslant 1),$$

proveremo la disuguaglianza

$$|H_{n,m}[f(x, y)] - f(x, y)| \leqslant A_1 \left\{\frac{[\log n]^{2-\alpha}}{n^\alpha} + \frac{[\log m]^{2-\alpha}}{m^\alpha}\right\},$$

essendo A_1 una costante assoluta.

Ponendoci lo stesso problema nel caso di polinomi trigonometrici di interpolazione, dalla teoria delle serie doppie trigonometriche (3), approssimando l'integrale che esprime il valore del polinomio di FEJÉR, relativo alla funzione $f(x, y)$ ed ai primi $(n+1)(m+1)$ termini della sua serie trigonometrica di FOURIER, estenderemo al caso di due variabili la formula di interpolazione di JACKSON (4), pervenendo così ad una classe di polinomi $\tau_{n,m}(x, y)$, che chiameremo polinomi interpolanti di JACKSON in due variabili.

Dimostreremo inoltre, nella ipotesi che la $f(x, y)$ sia continua e periodica, in ambedue le variabili, con periodo 2π, che la doppia successione $\{\tau_{n,m}[f(x, y)]\}$ dei polinomi trigonometrici così ottenuta, comunque n ed m tendano all'infinito, converge uniformemente verso la $f(x, y)$. Anche qui, supponendo che la $f(x, y)$ soddisfi ad una condizione di LIPSCHITZ di ordine α, $0 < \alpha \leqslant 1$, quando cioè risulti

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leqslant L\{|x_1 - x_2|^\alpha + |y_1 - y_2|^\alpha\} \qquad (L = \text{cost.},\ 0 < \alpha \leqslant 1),$$

---

(2) G. SANSONE, *Sviluppi in serie di funzioni ortogonali* (Parte II dell'Opera: G. VITALI e G. SANSONE, *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*), 3a ediz., N. Zanichelli, Bologna 1952 (cfr. pp. 490-494).

(3) L. TONELLI, *Serie trigonometriche*, N. Zanichelli, Bologna 1928 (cfr. pp. 435-516).

(4) G. SANSONE, loc. cit. in (2) (cfr. pp. 500-503).

dimostreremo che

$$|\tau_{n,m}[f(x,y)] - f(x,y)| \leq A_2 \left\{ \frac{\log n}{n^\alpha} + \frac{\log m}{m^\alpha} \right\},$$

essendo A_2 una costante assoluta. Viene così realizzata l'estensione di un teorema di KRYLOFF (5) alle funzioni lipschitziane di ordine α, $0 < \alpha \leq 1$, in due variabili.

§ 1. – I polinomi di interpolazione di Hermite in due variabili, nel caso di Fejér.

a) **Teorema di convergenza.** Dato il doppio sistema di punti fondamentali:

$$\begin{array}{llll} x_1^{(1)} & & & \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & & \\ \cdots & & & \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \ldots & x_n^{(n)} \\ \cdots & & & , \end{array} \qquad \begin{array}{llll} y_1^{(1)} & & & \\ y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & & \\ \cdots & & & \\ y_1^{(m)} & y_2^{(m)} & \ldots & y_m^{(m)} \\ \cdots & & & , \end{array}$$

posto $\omega(x) = \prod_s^{1\ldots n} (x - x_s^{(n)})$ e $\overline{\omega}(y) = \prod_i^{1\ldots m} (y - y_i^{(m)})$ è facile provare che il polinomio

$$H_{n,m}(x,y) = \sum_s^{1\ldots n} \sum_i^{1\ldots m} f_{s,i} h_s(x) \overline{h}_i(y), \tag{1}$$

dove

$$h_s(x) = \left[1 - \frac{\omega''(x_s^{(n)})}{\omega'(x_s^{(n)})} (x - x_s^{(n)})\right] l_s^2(x), \tag{2_1}$$

$$\overline{h}_i(y) = \left[1 - \frac{\overline{\omega}''(y_i^{(m)})}{\overline{\omega}'(y_i^{(m)})} (y - y_i^{(m)})\right] \overline{l}_i^2(y), \tag{2_2}$$

essendo

$$(3_1) \quad l_s(x) = \frac{\omega(x)}{\omega'(x_s^{(n)})(x - x_s^{(n)})}, \qquad (3_2) \quad \overline{l}_i(y) = \frac{\overline{\omega}(y)}{\overline{\omega}'(y_i^{(m)})(y - y_i^{(m)})},$$

è l'unico polinomio di grado, al più, $2n-1$ in x e $2m-1$ in y, che negli $n \cdot m$ punti $P_{s,i} \equiv (x_s^{(n)}, y_i^{(m)})$ assume i prefissati valori $f_{s,i}$ ($s=1, 2, \ldots, n$; $i=1, 2, \ldots, m$), mentre le sue derivate parziali prime rispetto ad x e ad y, e la derivata seconda mista, vi si annullano.

(5) G. SANSONE, loc. cit. in (2) (cfr. pp. 504-506).

Se $P_{n,m}(x, y)$ è un polinomio di grado $\leqslant 2n-1$ in x e $\leqslant 2m-1$ in y, che gode delle medesime proprietà, si ha identicamente:

$$P_{n,m}(x, y) = \sum_s^{1\ldots n} \sum_i^{1\ldots m} P_{n,m}(x_s^{(n)}, y_i^{(m)}) h_s(x) \overline{h}_i(y) ,$$

e posto, in particolare, $P_{n,m}(x, y) \equiv 1$, si ha la relazione fondamentale

$$\sum_s^{1\ldots n} \sum_i^{1\ldots m} h_s(x) \overline{h}_i(y) \equiv 1 . \tag{4}$$

Siccome poi è:

(5_1) $h_s(x_k^{(n)}) = 0$ per $s \neq k$, (5_2) $\overline{h}_i(y_h^{(m)}) = 0$ per $i \neq h$,

(5_3) $h_s(x_s^{(n)}) = 1$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$, (5_4) $\overline{h}_i(y_i^{(m)}) = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$,

posto, alternativamente nella (4), $y = y_i^{(m)}$, $x = x_s^{(n)}$, si ha rispettivamente:

(4_1) $\sum_s^{1\ldots n} h_s(x) \equiv 1$, (4_2) $\sum_i^{1\ldots m} \overline{h}_i(y) \equiv 1$.

La (1) dà un polinomio di interpolazione per la funzione $f(x, y)$, che diremo polinomio di interpolazione di HERMITE in due variabili. Le $h_s(x)$ e le $\overline{h}_i(y)$, polinomi rispettivamente di grado $2n-1$ in x e $2m-1$ in y, sono le note funzioni fondamentali di prima specie nella interpolazione di HERMITE in una variabile. Consideriamo ora la doppia successione di polinomi

$$\{H_{n,m}[f(x, y)]\} , \tag{6}$$

ottenuta dalla (1) quando i valori $f_{s,i}$ sono i valori, assunti nei punti $P_{s,i} \equiv (x_s^{(n)}, y_i^{(m)})$, da una funzione di due variabili $f(x, y)$, e studiamo il comportamento della successione (6) quando $n \to \infty$ ed $m \to \infty$. Si ha il teorema:

Se $f(x, y)$ è una funzione continua nelle due variabili x ed y, nell'ipotesi che i punti fondamentali siano gli zeri $x_s^{(n)} = \cos \frac{2s-1}{2n} \pi$ $(s=1, 2, \ldots, n)$, $y_i^{(m)} = \cos \frac{2i-1}{2m} \pi$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, del polinomio di Tchebycheff di prima specie, allora è

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} H_{n,m}[f(x, y)] = f(x, y) ,$$

e ciò uniformemente nel quadrato $Q \equiv [-1 \leqslant x, y \leqslant 1]$.

Dimostrazione. A causa della (4) si ha:

$$f(x, y) = \sum_s^{1\ldots n} \sum_i^{1\ldots m} f(x, y) h_s(x) \overline{h}_i(y) ,$$

e perciò

$$(7)\qquad |H_{n,m}(x,y)-f(x,y)|\leqslant \sum_{s}^{1\ldots n}\sum_{i}^{1\ldots m}|f_{s,i}-f(x,y)|\,|h_s(x)\,\overline{h}_i(y)|\,,$$

e con le ipotesi fatte sui punti fondamentali si ha [6]:

$$(8_1)\qquad |h_s(x)|=h_s(x)\leqslant\frac{1}{n^2}\,\frac{2}{|x-x_s^{(n)}|^2}\qquad \text{per}\quad -1\leqslant x\leqslant 1\,,$$

$$(8_2)\qquad |\overline{h}_i(y)|=\overline{h}_i(y)\leqslant\frac{1}{m^2}\,\frac{2}{|y-y_i^{(m)}|^2}\qquad \text{per}\quad -1\leqslant y\leqslant 1\,.$$

Per il teorema di CANTOR, scelto un σ positivo arbitrario, si può determinare un numero positivo 2ε tale che, se P_1 e P_2 sono due punti del quadrato $Q\equiv[-1\leqslant x,\ y\leqslant 1]$ per cui $\overline{P_1P_2}<2\varepsilon$, risulta anche $|f(P_1)-f(P_2)|\leqslant\sigma$.

Notiamo, inoltre, che per quelle coppie di punti P_1', P_2' per cui è $\overline{P_1'P_2'}\geqslant 2\varepsilon$, risulta verificata una almeno delle condizioni $|x_1'-x_2'|>\varepsilon$, $|y_1'-y_2'|>\varepsilon$. Ciò premesso, scindiamo la somma, che compare al secondo membro della (7), in tre parti:

$$(7_1)\qquad |H_{n,m}(x,y)-f(x,y)|\leqslant \textstyle\sum_1|f(x,y)-f_{s,i}|\,h_s(x)\,\overline{h}_i(y)\,+$$
$$+\textstyle\sum_2|f(x,y)-f_{s,i}|\,h_s(x)\,\overline{h}_i(y)+\sum_3|f(x,y)-f_{s,i}|\,h_s(x)\,\overline{h}_i(y)\;;$$

la prima somma è estesa a tutte le differenze $|f(x,y)-f_{s,i}|$ per cui risulta $\overline{PP}_{s,i}<2\varepsilon$ e quindi $|f(x,y)-f_{s,i}|\leqslant\sigma$, la seconda somma è estesa a tutte le differenze $|f(x,y)-f_{s,i}|$ per le quali, risultando $\overline{PP}_{s,i}>2\varepsilon$, risulti $|x-x_s^{(n)}|>\varepsilon$, ed infine la terza somma è estesa a tutte le differenze $|f(x,y)-f_{s,i}|$ per le quali risulta $\overline{PP}_{s,i}>2\varepsilon$, $|x-x_s^{(n)}|\leqslant\varepsilon$, e quindi $|y-y_i^{(m)}|>\varepsilon$.

Ciò premesso, tenuto conto della (4) per la prima sommatoria, della (4_2) e della (8_1) per la seconda, ed infine della (4_1) e della (8_2) per la terza sommatoria, se M rappresenta il massimo di $|f(x,y)|$ in Q, si ha:

$$|H_{n,m}(x,y)-f(x,y)|\leqslant\sigma+\frac{4M}{\varepsilon^2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right);$$

da qui, per l'arbitrarietà di σ, comunque n ed m tendano all'infinito, segue il teorema.

---

(6) G. SANSONE, loc. cit., in (2) (cfr. p. 493).

b) **Limitazione del resto della formula di interpolazione per funzioni lipschitziane di ordine** α, **con** $1/2 < \alpha \leqslant 1$. Supposta $f(x, y)$ lipschitziana in $Q \equiv [-1 \leqslant x,\ y \leqslant 1]$ di ordine α, con $1/2 < \alpha \leqslant 1$, l'approssimazione di $H_{n,m}(x, y)$ in Q è espressa dal seguente teorema:

Sia $f(x, y)$ lipschitziana in $Q \equiv [-1 \leqslant x,\ y \leqslant 1]$ di ordine α, $1/2 < \alpha \leqslant 1$, sia cioè:

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leqslant L\{|x_1 - x_2|^\alpha + |y_1 - y_2|^\alpha\} \tag{9}$$
$$(L = \text{cost.},\ 1/2 < \alpha \leqslant 1)\,,$$

si ha allora in $Q \equiv [-1 \leqslant x,\ y \leqslant 1]$:

$$|H_{n,m}(x, y) - f(x, y)| \leqslant A\left\{\frac{[\log n]^{2-\alpha}}{n^\alpha} + \frac{[\log m]^{2-\alpha}}{m^\alpha}\right\}, \tag{10}$$

essendo A una costante assoluta.

Dimostrazione. Con le ipotesi fatte, nel numero precedente, sui punti fondamentali, e posto $x = \cos t$, si ha:

$$\left|\frac{\omega(x)}{\omega'(x_s^{(n)})}\right| = \left|\frac{\cos nt \cdot \operatorname{sen}\{(2s-1)\pi/(2n)\}}{n}\right| \leqslant \left|\frac{\operatorname{sen}\{(2s-1)\pi/(2n)\}}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n}, \tag{11$_1$}$$

$$\left|\frac{\omega''(x_s^{(n)})}{\omega'(x_s^{(n)})}\right| = \left|\frac{n\cos\{(2s-1)\pi/(2n)\}\cdot\operatorname{sen}\{(2s-1)\pi/(2n)\}}{n\operatorname{sen}^3\{(2s-1)\pi/(2n)\}}\right| \leqslant \tag{11$_2$}$$
$$\leqslant \frac{1}{\operatorname{sen}^2\{(2s-1)\pi/(2n)\}}\,.$$

Ora, per la (2_1) si ha:

$$|h_s(x)| \leqslant l_s^2(x) + \left|\frac{\omega''(x_s^{(n)})}{\omega'(x_s^{(n)})}\right| |x - x_s^{(n)}|\, l_s^2(x)\,,$$

e per la (3_1), tenuto conto delle (11), moltiplicando i due membri di quest'ultima disuguaglianza per $|x - x_s^{(n)}|^\alpha$, considerato che $\operatorname{sen}\dfrac{2s-1}{2n}\pi \geqslant \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2n}$, si ha:

$$|x - x_s^{(n)}|^\alpha |h_s(x)| \leqslant \frac{|l_s(x)|^{2-\alpha}}{n^\alpha} + \frac{|l_s(x)|^{1-\alpha}}{n^{1+\alpha}\operatorname{sen}^{1-\alpha}\{\pi/(2n)\}}\,,$$

ma è

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n} > \frac{\pi}{2n} - \frac{\pi^3}{48n^3} > \frac{1}{n} \qquad (\text{per } n > 1),$$

e quindi

$$|x - x_s^{(n)}|^\alpha |h_s(x)| \leqslant \frac{|l_s(x)|^{2-\alpha}}{n^\alpha} + \frac{|l_s(x)|^{1-\alpha}}{n^{2\alpha}} ;$$

e perciò

$$\sum_s^{1\dots n} |x - x_s^{(n)}|^\alpha |h_s(x)| \leqslant \frac{1}{n^\alpha} \sum_s^{1\dots n} |l_s(x)|^{2-\alpha} + \frac{1}{n^{2\alpha}} \sum_s^{1\dots n} |l_s(x)|^{1-\alpha} ,$$

ma [7]

$$\sum_s^{1\dots n} |l_s(x)|^{2-\alpha} \leqslant \left[\sum_s^{1\dots n} |l_s(x)|\right]^{2-\alpha} < C_1 (\log n)^{2-\alpha} ,$$

essendo C_1 una costante assoluta.

Inoltre, sempre nell'ipotesi che i punti $x_s^{(n)}$ siano gli zeri del polinomio di TCHEBYCHEFF di prima specie, si ha [8]:

$$l_s(x) = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \sum_r^{1\dots n-1} \cos r\theta_s \cdot \cos r\theta \qquad (x = \cos\theta) ,$$

e quindi $|l_s(x)| < 2$, e perciò $|l_s(x)|^{1-\alpha} < 2^{1-\alpha}$, onde:

$$\sum_s^{1\dots n} |x - x_s^{(n)}|^\alpha |h_s(x)| \leqslant C_1 \frac{(\log n)^{2-\alpha}}{n^\alpha} + \frac{2^{1-\alpha}}{n^{2\alpha-1}} .$$

Analogamente:

$$\sum_i^{1\dots m} |y - y_i^{(m)}| \, |\overline{h}_i(y)| \leqslant C_2 \frac{(\log m)^{2-\alpha}}{m^\alpha} + \frac{2^{1-\alpha}}{m^{2\alpha-1}} .$$

Ciò premesso, dalla (7), tenuto conto della (9), si ha:

$$|H_{n,m}(x, y) - f(x, y)| \leqslant L \sum_s^{1\dots n} \sum_i^{1\dots m} \{|x - x_s^{(n)}|^\alpha + |y - y_i^{(m)}|^\alpha\} \, |h_s(x) \overline{h}_i(y)|$$

ed anche, poichè $|h_s(x)| = h_s(x)$, $|\overline{h}_i(y)| = \overline{h}_i(y)$ in $Q \equiv [-1 \leqslant x,\ y \leqslant 1]$, tenuto conto delle (4_1) e (4_2), si ha:

$$|H_{n,m}(x, y) - f(x, y)| \leqslant L \sum_s^{1\dots n} |x - x_s^{(n)}|^\alpha h_s(x) + L \sum_i^{1\dots m} |y - y_i^{(m)}|^\alpha \overline{h}_i(y)$$

---

(7) L. MERLI, *Sull'approssimazione delle funzioni continue mediante polinomi*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) 1, 1175-1180 (1946).

(8) E. FELDHEIM, *Théorie de la convergence des procédés d'interpolation et de quadrature mécanique*, Mémorial des Sciences Mathématiques, fasc. 95, Gauthier-Villars, Paris 1939 (cfr. p. 9).

e perciò

$$|H_{n,m}(x, y) - f(x, y)| \leqslant \frac{LC_1(\log n)^{2-\alpha}}{n^\alpha} + \frac{2^{1-\alpha}L}{n^{2\alpha-1}} + \frac{LC_2(\log m)^{2-\alpha}}{m^\alpha} + \frac{2^{1-\alpha}L}{m^{2\alpha-1}},$$

e da quest'ultima segue la (10).

§ 2. – I polinomi di interpolazione di Jackson per funzioni di due variabili.

a) **Teorema di convergenza.** È noto (9) che, se $f(x, y)$ è una funzione sommabile nel quadrato $Q \equiv [0 \leqslant x,\ y \leqslant 2\pi]$, periodica di periodo 2π in ambedue le variabili, se

$$(12) \qquad f(x, y) \sim \sum_n^{0...\infty} \sum_m^{0...\infty} \lambda_{n,m}(a_{n,m} \cos nx \cdot \cos my + b_{n,m} \cos nx \cdot \operatorname{sen} my + \\ + c_{n,m} \operatorname{sen} nx \cdot \cos my + d_{n,m} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} my),$$

con

$$\lambda_{n,m} = \begin{cases} 1/4 & \text{per } n = m = 0, \\ 1/2 & \text{per } n = 0, \quad m > 0, \quad \text{e per } n > 0, \quad m = 0, \\ 1 & \text{per } n > 0, \quad m > 0 \end{cases}$$

e dove le $a_{n,m}$, $b_{n,m}$, $c_{n,m}$, $d_{n,m}$ sono i coefficienti di FOURIER della serie trigonometrica di FOURIER della $f(x, y)$; allora la somma di FEJÉR dei primi $(n+1)(m+1)$ termini della serie (12) ha, nel punto $P \equiv (x, y)$ nel quadrato $Q \equiv [0 \leqslant x,\ y \leqslant 2\pi]$, l'espressione

$$(13) \qquad \sigma_{n,m}(x, y) = \frac{1}{4(n+1)(m+1)} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t, v) \left[\frac{\operatorname{sen}\{(n+1)(t-x)/2\}}{\operatorname{sen}\{(t-x)/2\}}\right]^2 \cdot \\ \cdot \left[\frac{\operatorname{sen}\{(m+1)(v-y)/2\}}{\operatorname{sen}\{(v-y)/2\}}\right]^2 dt\, dv .$$

Dividiamo adesso il quadrato Q in una rete di rettangoli, con i lati paralleli ai lati di Q, con le rette di equazioni

$$t = \theta_\nu = \nu \frac{2\pi}{n+1} \qquad (\nu = 0, 1, 2, ..., n),$$

$$v = \bar{\theta}_\mu = \mu \frac{2\pi}{m+1} \qquad (\mu = 0, 1, 2, ..., m),$$

(9) L. TONELLI, loc. cit. in (3) (cfr. pp. 486-495).

ed approssimiamo l'integrale al secondo membro della (13) col metodo dei rettangoli; con ciò il valore approssimato dell'integrale diviene:

$$(14)\qquad \tau_{n,m}(x,y)=\sum_{\nu}^{0\ldots n}\sum_{\mu}^{0\ldots m} f_{\nu,\mu}\left[\frac{\operatorname{sen}\{(n+1)(\theta_\nu-x)/2\}}{(n+1)\operatorname{sen}\{(\theta_\nu-x)/2\}}\right]^2\left[\frac{\operatorname{sen}\{(m+1)(\bar\theta_\mu-y)/2\}}{(m+1)\operatorname{sen}\{(\bar\theta_\mu-y)/2\}}\right]^2,$$

avendo posto $f(\theta_\nu,\bar\theta_\mu)=f_{\nu,\mu}$.

È subito visto che $\tau_{n,m}(x,y)$ è un polinomio trigonometrico, di ordine n in x ed m in y, che nei punti $P_{\nu,\mu}\equiv(\theta_\nu,\bar\theta_\mu)$ assume i valori $f_{\nu,\mu}$. Diremo che la (14) è la formula di interpolazione di JACKSON per funzioni di due variabili. Sussiste il seguente teorema di convergenza:

Se $f(x,y)$ è una funzione periodica, di periodo 2π in ambedue le variabili, continua in tutto il suo campo di esistenza, allora si ha:

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\tau_{n,m}(x,y)=f(x,y),$$

e ciò uniformemente in $Q\equiv[0\leqslant x,\ y\leqslant 2\pi]$.

Dimostrazione. È infatti [10] identicamente:

$$(15_1)\qquad \sum_{\nu}^{0\ldots n}\left[\frac{\operatorname{sen}\{(n+1)(\theta_\nu-x)/2\}}{(n+1)\operatorname{sen}\{(\theta_\nu-x)/2\}}\right]^2=1,$$

e così pure:

$$(15_2)\qquad \sum_{\mu}^{0\ldots m}\left[\frac{\operatorname{sen}\{(m+1)(\bar\theta_\mu-y)/2\}}{(m+1)\operatorname{sen}\{(\bar\theta_\mu-y)/2\}}\right]^2=1,$$

e perciò anche:

$$(16)\qquad \sum_{\nu}^{0\ldots n}\sum_{\mu}^{0\ldots m}\left[\frac{\operatorname{sen}\{(n+1)(\theta_\nu-x)/2\}}{(n+1)\operatorname{sen}\{(\theta_\nu-x)/2\}}\right]^2\left[\frac{\operatorname{sen}\{(m+1)(\bar\theta_\mu-y)/2\}}{(m+1)\operatorname{sen}\{(\bar\theta_\mu-y)/2\}}\right]^2=1,$$

da cui

$$(17)\qquad f(x,y)=\sum_{\nu}^{0\ldots n}\sum_{\mu}^{0\ldots m} f(x,y)\left[\frac{\operatorname{sen}\{(n+1)(\theta_\nu-x)/2\}}{(n+1)\operatorname{sen}\{\theta_\nu-x)/2\}}\right]^2\left[\frac{\operatorname{sen}\{(m+1)(\theta_\mu-y)/2\}}{(m+1)\operatorname{sen}\{(\bar\theta_\mu-y)/2\}}\right]^2$$

e quindi:

$$(18)\qquad |\tau_{n,m}(x,y)-f(x,y)|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\nu}^{0\ldots n}\sum_{\mu}^{0\ldots m}|f(x,y)-f_{\nu,\mu}|\left[\frac{\operatorname{sen}\{(n+1)(\theta_\nu-x)/2\}}{(n+1)\operatorname{sen}\{(\theta_\nu-x)/2\}}\right]^2\left[\frac{\operatorname{sen}\{(m+1)(\bar\theta_\mu-y)/2\}}{(m+1)\operatorname{sen}\{\bar\theta_\mu-y)/2\}}\right]^2 .$$

---

[10] G. SANSONE, loc. cit. in [2] (cfr. p. 502).

Per la supposta periodicità di $f(x, y)$ si può pensare che, fissato $P \equiv (x, y)$, risulti $|\theta_\nu - x| < \pi$ e $|\bar{\theta}_\mu - y| < \pi$.

Conformemente al teorema di CANTOR, scelto un σ positivo arbitrario, determiniamo un numero positivo δ tale che, per ogni coppia di punti P_1, P_2, per cui $\overline{P_1P_2} < 4\delta$, risulti: $|f(P_1) - f(P_2)| \leqslant \sigma$.

Notiamo poi che, se P_1', P_2' è una coppia di punti per cui $\overline{P_1'P_2'} \geqslant 4\delta$, deve essere soddisfatta una almeno delle limitazioni $|x_1' - x_2'| > 2\delta$, $|y_1' - y_2'| > 2\delta$; ed inoltre osserviamo che se $|\theta_\nu - x| > 2\delta$ è $|\operatorname{sen}\{(\theta_\nu - x)/2\}| > \operatorname{sen}\delta$, e così se $|\bar{\theta}_\mu - y| > 2\delta$ è $|\operatorname{sen}\{(\bar{\theta}_\mu - y)/2\}| > \operatorname{sen}\delta$.

Ciò premesso, scindiamo la somma che compare al secondo membro della (18) in tre parti:

$$|\tau_{n,m}(x, y) - f(x, y)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum\nolimits_1 |f_{\nu,\mu} - f(x, y)| \left[\frac{\operatorname{sen}\{(n+1)(\theta_\nu - x)/2\}}{(n+1)\operatorname{sen}\{(\theta_\nu - x)/2\}}\right]^2 \left[\frac{\operatorname{sen}\{(m+1)(\bar{\theta}_\mu - y)/2\}}{(m+1)\operatorname{sen}\{(\bar{\theta}_\mu - y)/2\}}\right]^2 +$$

$$+ \sum\nolimits_2 |f_{\nu,\mu} - f(x, y)| \left[\frac{\operatorname{sen}\{(n+1)(\theta_\nu - x)/2\}}{(n+1)\operatorname{sen}\{(\theta_\nu - x)/2\}}\right]^2 \left[\frac{\operatorname{sen}\{(m+1)(\bar{\theta}_\mu - y)/2\}}{(m+1)\operatorname{sen}\{(\bar{\theta}_\mu - y)/2\}}\right]^2 +$$

$$+ \sum\nolimits_3 |f_{\nu,\mu} - f(x, y)| \left[\frac{\operatorname{sen}\{(n+1)(\theta_\nu - x)/2\}}{(n+1)\operatorname{sen}\{(\theta_\nu - x)/2\}}\right]^2 \left[\frac{\operatorname{sen}\{(m+1)(\bar{\theta}_\mu - y)/2\}}{(m+1)\operatorname{sen}\{(\bar{\theta}_\mu - y)/2\}}\right]^2 .$$

La prima somma è estesa a tutte le differenze $|f(x, y) - f_{\nu,\mu}|$ per cui risulta $\overline{PP}_{\nu,\mu} < 4\delta$, e quindi $|f(x, y) - f_{\nu,\mu}| \leqslant \sigma$, la seconda somma è estesa a tutte le differenze $|f(x, y) - f_{\nu,\mu}|$, per le quali, essendo $\overline{PP}_{\nu,\mu} \geqslant 4\delta$, risulti anche $|\theta_\nu - x| > 2\delta$, e quindi $|\operatorname{sen}\{(\theta_\nu - x)/2\}| > \operatorname{sen}\delta$, ed infine la terza somma è estesa a tutte la differenze $|f(x, y) - f_{\nu,\mu}|$ per le quali risulta: $\overline{PP}_{\nu,\mu} \geqslant 4\delta$ $|\theta_\nu - x| \leqslant 2\delta$, e quindi $|\bar{\theta}_\mu - y| > 2\delta$, e perciò $|\operatorname{sen}\{(\bar{\theta} - y)/2\}| > \operatorname{sen}\delta$.

Ciò premesso, tenuto conto della (16) per la prima somma, della (15_2) per la seconda, e della (15_1) per la terza sommatoria, indicando con M il massimo di $|f(x, y)|$ in Q, si ha:

$$|\tau_{n,m}(x, y) - f(x, y)| \leqslant \sigma + \frac{2M}{\operatorname{sen}^2\delta}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{m+1}\right),$$

e da questa, per l'arbitrarietà di σ, quando n ed m tendono all'infinito, segue il teorema.

b) **Limitazione del resto della formula d'interpolazione per funzioni lipschitziane di ordine** α, **con** $0 < \alpha \leqslant 1$. N. KRYLOFF [11] ha dimostrato il seguente teorema:

---

[11] Cfr. G. SANSONE, loc. cit. in [2] (vedasi pp. 504-506).

« Se $f(x)$ è una funzione periodica, di periodo 2π, lipschitziana in tutto il suo campo di esistenza, supposto cioè

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L\,|x_1 - x_2| \qquad (L = \text{cost.}),$$

se

$$\tau_n(x) = \sum_{\nu}^{0\ldots n} f(\theta_\nu) \left[\frac{\operatorname{sen}\{(n+1)(\theta_\nu - x)/2\}}{(n+1)\operatorname{sen}\{(\theta_\nu - x)/2\}}\right]^2$$

è l'ennesimo polinomio di JACKSON relativo alla $f(x)$, sussiste allora la limitazione

$$|\tau_n(x) - f(x)| \leq (AL \log n)/n\,,$$

essendo A una costante assoluta [12]. »

Estendendo questo teorema al caso di due variabili, dimostreremo:

Se $f(x, y)$ è una funzione periodica, di periodo 2π, in ambedue le variabili, lipschitziana di ordine α, con $0 < \alpha \leq 1$, sia cioè

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq L\,\{|x_1 - x_2|^\alpha + |y_1 - y_2|^\alpha\} \tag{19}$$
$$(L = \text{cost.},\ 0 < \alpha \leq 1)\,,$$

si ha allora:

$$|\tau_{n,m}(x, y) - f(x, y)| \leq A\left\{\frac{\log n}{n^\alpha} + \frac{\log m}{m^\alpha}\right\}, \tag{20}$$

essendo A una costante assoluta.

Dimostrazione. Posto $\theta_\nu - x = 2u_\nu$ e $\bar\theta_\mu - y = 2v_\mu$, dalla (18) a causa della (19), tenuto conto delle (15_1) e (15_2), si ha:

$$|\tau_{n,m}(x, y) - f(x, y)| \leq 2^\alpha L \sum_{\nu}^{0\ldots n} |u_\nu|^\alpha \frac{\operatorname{sen}^2 (n+1)u_\nu}{(n+1)^2 \operatorname{sen}^2 u_\nu} + \tag{21}$$
$$+ 2^\alpha L \sum_{\mu}^{0\ldots m} |v_\mu|^\alpha \frac{\operatorname{sen}^2 (m+1)v_\mu}{(m+1)^2 \operatorname{sen}^2 v_\mu}$$

---

(12) È facile provare che il teorema di N. KRYLOFF vale anche per

$$|f(x_1) - (x_2)| \leq L\,|x_1 - x_2|^\alpha \qquad (L = \text{cost.},\ 0 < \alpha \leq 1),$$

nel qual caso la limitazione del resto è

$$|\tau_n(x) - f(x)| \leq (AL\cdot\log n)/n^\alpha\,.$$

ed applicando ora a $\sum\limits_{\nu}^{0\dots n}|u_\nu|^\alpha \frac{\mathrm{sen}^2\,(n+1)u_\nu}{(n+1)^2\cdot\mathrm{sen}^2\,u_\nu}$ lo stesso ragionamento usato da KRYLOFF per maggiorare $\sum\limits_{\nu}^{0\dots n}|u_\nu| \frac{\mathrm{sen}^2\,(n+1)u_\nu}{(n+1)^2\,\mathrm{sen}^2\,u_\nu}$, si trova la limitazione:

$$2^\alpha L \sum_{\nu}^{0\dots n}|u_\nu|^\alpha \frac{\mathrm{sen}^2\,(n+1)u_\nu}{(n+1)\cdot\mathrm{sen}^2\,u_\nu} \leqslant \frac{2^\alpha L\pi^\alpha}{2^\alpha(n+1)^\alpha}\left(\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi^2}{6}+\log n+\gamma+\frac{1}{n}\right),$$

essendo γ la costante di EULERO-MASCHERONI, e così pure:

$$2^\alpha L \sum_{\mu}^{0\dots m}|v_\mu|^\alpha \frac{\mathrm{sen}^2\,(m+1)v_\mu}{(m+1)^2\cdot\mathrm{sen}^2\,v_\mu} \leqslant \frac{2^\alpha L\pi^\alpha}{2^\alpha(m+1)^\alpha}\left(\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi^2}{6}+\log m+\gamma+\frac{1}{m}\right),$$

e da queste, a causa della (21), segue la (20).