Rivista Mat. Univ. Parma 5, 339-361 (1954)

M. DOLCHER (*)

# Geometria delle trasformazioni continue. Un teorema sulle trasformazioni di una corona circolare.

## Introduzione.

Presento qui un ulteriore risultato su una questione che è già stata oggetto di altri miei lavori. Per chiarezza, premetto alla considerazione del caso specifico qui trattato la posizione generale del problema e quei risultati precedenti che sono in nesso diretto con l'attuale.

Sia $\Phi$ una trasformazione continua di un dominio $\overline{R}$ di un piano $\mathcal{E}$ in un piano $\mathcal{E}'$; detto $\gamma$ il contorno (complessivo) orientato di $\overline{R}$, per i punti $p'$ di $\mathcal{E}'$ non appartenenti all'imagine $\gamma'$ di $\gamma$ si definisce un *indice topologico*, intero relativo che è costante sopra ogni regione componente di $\mathcal{E}'-\gamma'$. Si fermi l'attenzione su una, $A'$, di tali regioni, della quale sia $n$ l'indice (che, senza restrizione, supporremo positivo). Diciamo *eccezionali* quei punti $p'$ di $A'$ per i quali l'insieme-modello $\Phi^{-1}(p')$ consta di meno che $n$ punti, e diciamo *abbassamento* relativo a un punto $p'(\in A')$ la differenza $n-N(p')$, essendo $N(p')$ il numero dei punti dell'insieme-modello di $p'$.

Si pone il problema di determinare, in relazione agl'indici topologici, quanti punti eccezionali al massimo possano esservi per la $\Phi$ in $A'$; e, più precisamente, quale possa essere, al massimo, l'*abbassamento totale* (= somma degli abbassamenti relativi ai singoli punti eccezionali) *della* $\Phi$ *in* $A'$.

*Nel caso che* $\overline{R}$ *sia un cerchio, l'abbassamento totale è al massimo* $n-1$ [1]; nè vi hanno, in questo caso, altre limitazioni: comunque si assegnino $k$ $(<n)$ punti $p'_i$ su $\mathcal{E}'$ e comunque si associ a ciascuno di essi un intero positivo $s_i$ in

(*) Indirizzo: Istituto Matematico, Università, Ferrara, Italia.

[1] M. DOLCHER: *Exceptions to n-covering for continuous mappings of a plane region*, Proc. Internat. Congress of Mathematicians 1954 (Amsterdam, 1954), vol. II, p. 95. M. DOLCHER: *Évaluation du maximum d'exceptions à l'n-vocité, de l'inverse d'une transformation plane continue*, Fund. Math., (in corso di stampa).

guisa da aversi $\sum_{1}^{k}{}_i\, s_i \leqslant n-1$, esiste effettivamente una trasformazione continua $\Phi$ (di un cerchio $\overline{R} \subset \mathcal{E}$) nella quale i punti scelti restano in una medesima regione $A'$, di indice $n$, e si presentano eccezionali con gli abbassamenti $s_i$ prescritti.

Nel caso, più generale, che $\overline{R}$ sia un dominio limitato da un numero finito di curve semplici chiuse $\gamma_i$, il massimo in questione dipende dagl'indici $n_i$ (rispetto ad $A'$) delle singole curve-imagini $\gamma_i'$, in un modo che non mi pare si presti ad un'enunciazione espressiva. Una maggiorazione (piuttosto grossolana, e subordinata a qualche ipotesi sugli indici $n_i$) per l'abbassamento totale nel caso di regioni pluriconnesse può stabilirsi, come ho mostrato altrove [2], quale facile conseguenza del teorema relativo al caso del cerchio.

Qui viene risolta la questione nel caso che $\overline{R}$ *sia una corona circolare, i cui contorni* $\alpha$, $\beta$ *equiorientati abbiano imagini* $\alpha'$, $\beta'$ *circuitanti* $A'$ *in uno stesso senso* (non implica allora restrizione supporre che sia $n^{(\alpha)} > n^{(\beta)} > 0$). Il risultato è che, *posto* $n = n^{(\alpha)} - n^{(\beta)}$, *l'abbassamento totale massimo* [*relativo ad una regione* $A'$ *componente di* $\mathcal{E}' - (\alpha' + \beta')$] *è* $n-1$, come nel caso del cerchio.

L'ipotesi fatta sui segni degl'indici $n^{(\alpha)}$, $n^{(\beta)}$ è essenziale: se gli indici sono di segni contrari (supposte, s'intende, $\alpha$ e $\beta$ equiorientate), il numero $n-1$ rimane una limitazione superiore per l'abbassamento totale ma non ne rappresenta il *massimo* (che è, con ogni verosimiglianza, $n-2$): sarebbe facile provare ad esempio che, supponendo $n^{(\alpha)} = n^{(\beta)} = 1$, dunque $n = 2$, non possono aversi punti eccezionali. Lo studio di tale eventualità non mi pare, d'altronde, presenti aspetti interessanti.

Il risultato che qui si raggiunge si presenta dunque nei termini di un'estensione di quello precedente, relativo al cerchio; tuttavia esso involge un fatto topologico che ivi non può apparire. Dato che proprio in considerazione di tale fatto la questione mi è apparsa degna di un particolare studio, ne farò cenno esplicito nelle righe seguenti.

Nel caso in esame, si constata anzitutto che *l'abbassamento totale della* $\Phi$ *in* $A'$ *non può superare* $n$. A tale constatazione (che rientra nella menzionata maggiorazione « grossolana » stabilita per il caso di un dominio pluriconnesso) si giunge mediante l'estensione della $\Phi$ all'intero cerchio di contorno $\alpha$: e precisamente, la si definisce nel cerchio interno sostanzialmente mediante la funzione di variabile complessa $z^m = z'$ $(m = n^{(\beta)})$, avendo cura di situare il punto $z' = 0$ in un punto non eccezionale di $A'$. La trasformazione $\Phi^*$ così ottenuta avrà *un* nuovo punto eccezionale, con abbassamento $n^{(\beta)} - 1$ (gli altri essendo rimasti quelli che lo erano per la $\Phi$, con gli stessi abbassamenti).

---

[2] M. Dolcher: *Geometria delle trasformazioni continue. Sul numero delle imagini inverse nelle trasformazioni di un dominio piano pluriconnesso*, Ann. Univ. Ferrara, Nuova serie, Sez. VII, 4, 1-7 (1954-1955).

Dato che l'abbassamento totale della $\Phi^*$ non supera $n-1$, ne segue che per la $\Phi$ esso non supera $(n^{(\alpha)}-1)-(n^{(\beta)}-1)$, ossia $n$. Orbene, il teorema che qui si dà prova che il ragionamento ora svolto non garantisce per la $\Phi$ l'effettiva possibilità che l'abbassamento in $A'$ sia $n$. Dunque: o almeno uno dei punti che sono eccezionali per la $\Phi^*$ cade fuori del componente $A'$ di $\mathcal{E}'-(\alpha'+\gamma')$ (il quale è allora più ristretto del componente di $\mathcal{E}'-\alpha'$ in cui esso è contenuto) oppure la $\Phi^*$ non raggiunge in effetti il massimo dell'abbassamento consentito dal suo indice.

Un tale fatto appartiene alla « Geometria delle trasformazioni continue », in quanto trova riscontro, o piuttosto trova il suo modello, in un teorema sulle funzioni razionali intere, che così suona:

*Detta $f$ una funzione razionale intera e detti $a_1, a_2, \ldots, a_r$ gli zeri della sua derivata, se $\beta$ è una curva semplice chiusa non passante per alcuno dei punti $f^{-1}(f(a_i))$ e separante almeno una coppia degli stessi, allora la curva-imagine $f(\beta)$ separa almeno una coppia di punti-imagine $f(a_i)$, $f(a_j)$* (3).

Per costituire la situazione che si prospetta nel teorema topologico di cui qui si tratta, basta considerare un'ulteriore curva semplice chiusa $\alpha$, circuitante tutti i punti $f^{-1}(f(a_i))$ e non avente intersezioni con $\beta$, e limitarsi a considerare la $f$ nella corona così ottenuta.

Terminologia e notazioni. Dicendo *piano* s'intenderà sempre *piano euclideo*; tutte le enunciazioni sono valide tuttavia, con ovvie modifiche di espressione, per la sfera. Le nozioni di *cerchio*, *corona circolare*, ecc. vanno intese nel loro significato topologico.

*Regione* è ogni insieme aperto connesso; *continuo* è ogni insieme chiuso, connesso e limitato.

Se $A$, $B$ sono insiemi, $|A, B|$ indica la loro distanza; $\bar{A}$, $\mathrm{Fr}(A)$ indicano rispettivamente la chiusura e la frontiera di $A$. Con $\mathrm{ind}(\alpha; p)$ viene indicato l'indice topologico della curva orientata $\alpha$ rispetto al punto $p$. Con $N[E]$ viene indicato il numero dei punti (supposto finito) dell'insieme $E$.

---

(3) È forse superfluo notare che se $\beta$ separa due zeri $a_1$, $a_2$ di $f'(z)$ può ben avvenire che $f(\beta)$ non separi i punti-imagine $f(a_1)$, $f(a_2)$; ma allora, a norma del teorema riportato, esiste almeno un ulteriore zero $a_3$ di $f(z)$ che $f(\beta)$ s'incarica di separare da $a_1$ e da $a_2$. Nella proprietà qui rilevata s'inquadra la constatazione che *se un polinomio ha due zeri doppi $a_1$, $a_2$, allora $f'(z)$ ha almeno un ulteriore zero.* Constatazione che per l'Algebra è estremamente banale ma che, come si vede, ha un significato topologico alquanto riposto.

## 1. – Richiami e proposizioni preliminari.

Riportiamo qui di seguito alcune proposizioni della teoria degli insiemi del piano, omettendo la dimostrazione di quelle più semplici o più note.

Prop. 1. *Se un insieme $E$ separa il piano, lo stesso può dirsi di almeno un componente di $E$, e viceversa.*

Prop. 2. *Se $C$ è un componente di un insieme $E$, si ha* $\mathrm{Fr}(C) \subset \mathrm{Fr}(E)$.

Prop. 3 (4). *Se $B$ è una regione a frontiera limitata e se $B$ non separa il piano, la frontiera di $B$ è un continuo.*

Prop. 4 (5). *Se $G$ è un insieme chiuso connesso ed $F$ è un insieme chiuso limitato, l'insieme-riunione dei componenti di $F$ aventi intersezione non vuota con $G$ è un componente di $F + G$. Nelle stesse condizioni, ogni componente di $F$ non avente punti in comune con $G$ è un componente di $F + G$.*

Prop. 5 (6). *Se $F$, $G$ sono due insiemi chiusi, privi di punti in comune, non separantisi nel piano, e se almeno uno di essi è limitato, esiste una curva semplice chiusa che li separa.*

Prop. 6 [Teorema di STRASZEWICZ] (7). *Siano $F$, $G$ due insiemi chiusi limitati, tali che ognuno degli insiemi $F$, $G$, $\mathcal{E} - F$, $\mathcal{E} - G$, $F \cdot G$ abbia un numero finito di componenti. In tali condizioni, anche ognuno degl'insiemi $F + G$, $\mathcal{E} - F \cdot G$, $\mathcal{E} - (F + G)$ ha un numero finito di componenti e sussiste l'uguaglianza*

$$\boldsymbol{c}[F] + \boldsymbol{c}[G] + \boldsymbol{c}[\mathcal{E} - F \cdot G] + \boldsymbol{c}[\mathcal{E} - (F + G)] = \\ = \boldsymbol{c}[\mathcal{E} - F] + \boldsymbol{c}[\mathcal{E} - G] + \boldsymbol{c}[F \cdot G] + \boldsymbol{c}[F + G],$$

(essendosi indicato con $\boldsymbol{c}[E]$ il numero, supposto finito, dei componenti dell'insieme $E$).

---

(4) Questa proposizione (Teorema di PHRAGMÈN-BROUWER-MAZURKIEWICZ) trovasi dimostrata ad esempio in G. T. WHYBURN: *Analytic Topology* (Am. Math. Soc. Coll. Publ. XXVIII), p. 105 (New York, 1942). In una forma più generale è data in C. KURATOWSKI: *Topologie, II*, 2-ème éd., p. 338, (Warszawa, 1952).

(5) È una delle diverse enunciazioni del Teorema di ZORETTI; cfr., ad esempio, G. T. WHYBURN, op. cit. in (4), p. 15.

(6) Cfr., ad esempio, C. KURATOWSKI, op. cit. in (4), p. 326.

(7) S. STRASZEWICZ: *Über die Zerschneidung der Ebene durch abgeschlossene Mengen*, Fund. Math. 7, p. 184 (1925). In una forma più generale, in C. KURATOWSKI, op. cit. in (4), p. 397. Nella forma qui adottata, il teorema trovasi riportato in W. WILKOSZ: *Les propriétés topologiques du plan euclidien* (Mém. Sci. Math. XLVI), p. 35 (Paris, 1931).

Prop. 7. *Se $B$ è una regione a frontiera limitata* [8], *i componenti di* Fr $(B)$ *coincidono ad uno ad uno con le frontiere dei componenti di $\mathcal{E} - B$.*

Dimostrazione. Sia $G = \mathcal{E} - B$ e sia $G_1$ un suo componente.

Proviamo dapprima che Fr $(G_1)$ è un componente di Fr $(B)$.

Dalla Prop. 2 segue che $\mathrm{Fr}\,(G_1) \subset \mathrm{Fr}\,(G) = \mathrm{Fr}\,(B)$ e dalla Prop. 1 segue che $G_1$ non separa il piano; poichè la regione $\mathcal{E} - G_1$ non separa il piano, segue (in virtù della Prop. 3) che Fr $(G_1)$ è un continuo. Dunque Fr $(G_1)$ è contenuto in un certo componente $F_1$ di Fr $(B)$. Il quale $F_1$, essendo un continuo contenuto in $G$ e contenente punti di $G_1$, è contenuto in $G_1$; ne segue, tenuto presente che $G_1 \cdot \mathrm{Fr}\,(B) = \mathrm{Fr}\,(G_1) \cdot \mathrm{Fr}\,(B) = \mathrm{Fr}\,(G_1)$, che $F_1$ è contenuto in Fr $(G_1)$. Dalle due inclusioni opposte si ha $F_1 = G_1$.

D'altra parte, ogni componente $F_1$ di Fr $(B)$ è contenuto in $G$, quindi in un componente di $G$. La tesi è così raggiunta.

Definizione. Detta $B$ una regione a frontiera limitata e detto $H$ un insieme qualunque contenuto in $\mathcal{E} - B$, indicheremo con

$$\mathrm{Fr}_H\,(B)$$

la frontiera di quel componente di $\mathcal{E} - B$ il quale contiene $H$.

Dal teorema precedente risulta che qualunque sia la regione $B$ a frontiera limitata, $\mathrm{Fr}_H\,(B)$ è un componente di Fr $(B)$, e precisamente quello che è contenuto nel componente di $\mathcal{E} - B$ contenente $H$.

In particolare, se $B$ è una regione limitata, la frontiera del componente illimitato di $\mathcal{E} - B$ s'indicherà anche con

$$\mathrm{Fr}_\infty\,(B)$$

e si dirà *frontiera esterna di $B$.*

Prop. 8. *Detta $B$ una regione a frontiera limitata e detto $G$ un componente di $\mathcal{E} - B$, per ogni numero positivo $\varepsilon$ esiste una curva semplice chiusa $\eta$ contenuta in $B$ e separante da $G$ ogni punto $p$ di $B$ per il quale è* $|p, \mathrm{Fr}\,(B)| > \varepsilon$.

Dimostrazione. Sia $\Gamma = \mathrm{Fr}_G\,(B)$ e sia $H_\varepsilon$ l'insieme dei punti $p$ di $\mathcal{E} - G$ per i quali è $|p, \Gamma| \geqslant \varepsilon$; essendo $\Gamma \subset \mathrm{Fr}\,(B)$, l'insieme $H_\varepsilon$ contiene, in particolare, tutti i punti $p$ di $B\,(\subset \mathcal{E} - G)$ per i quali è $|p, \mathrm{Fr}\,(B)| \geqslant \varepsilon$. Supponiamo $\varepsilon$ piccolo quanto basta affinchè sia $H_\varepsilon \neq 0$.

L'insieme $(\mathcal{E} - B) + H_\varepsilon$ è chiuso, e $G$ ne è un componente (Prop. 4); per-

---

[8] Che questa ipotesi sia essenziale è provato dall'esempio in cui $B$ è una striscia piana compresa fra due rette parallele.

tanto il suo insieme complementare $B'(= B - H_\varepsilon)$ separa $G$ da $H_\varepsilon$. Esiste allora (Prop. 5) una curva semplice chiusa $\eta$ contenuta in $B'$ la quale separa $G$ da $H_\varepsilon$. Dal fatto che $B' \subset B$, $B' \cdot H_\varepsilon = 0$ segue che la curva $\eta$ soddisfa alle condizioni volute.

Definizione. Diremo che la curva $\eta$ della quale si è provata l'esistenza è una *curva $\varepsilon$-approsimante di $G$ in $B$.*

Diremo *successione approssimante $G$ in $B$* una successione $\{\eta_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ di curve semplici chiuse tali che $\eta_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sia una curva $\varepsilon_n$-approssimante di $G$ in $B$, essendo $\{\varepsilon_n; n = 1, 2, \ldots\}$ una successione numerica decrescente con limite zero.

È facile constatare che, data comunque una successione $\{\eta_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ approssimante di $G$ in $B$, esiste una sua sottosuccessione $\{\eta_{n_r};\ r = 1, 2, \ldots\}$ nella quale ogni curva separa da $G$ le precedenti.

Basta all'uopo porre $\varepsilon_{n_1} = \varepsilon_1$, e successivamente $\varepsilon_{n_{r+1}} < |\eta_{n_r}, \mathrm{Fr}\,(B)|$ $(r = 1, 2, \ldots)$.

Prop. 9. *Sia $B$ una regione a frontiera limitata, sia $G$ un componente di $\mathcal{E} - B$, e sia $\{\eta_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ una successione approssimante $G$ in $B$, ogni curva della quale separi da $G$ le precedenti. Detta $C_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ la regione avente $\eta_n$ come contorno e non contenente $G$, e posto*

$$C = \sum_{1}^{\infty}{}_n\, C_n, \qquad \Gamma = \mathrm{Fr}\,(C)\,,$$

*si ha*

$$\Gamma = \lim_{n\to\infty} \eta_n = \mathrm{Fr}\,(G) \ \text{(9)}\,.$$

Dimostrazione. Per dimostrare che è $\Gamma = \mathrm{Fr}\,(G)$, proviamo che è $C = \mathcal{E} - G$.

Sia $p$ un punto di $\mathcal{E} - G$: se $p \in B$, esiste una curva $\eta_n$ della successione la quale separa $p$ da $G$, quindi una regione $C_n$ che contiene $p$; se è $p \in (\mathcal{E} - G) - B$, esiste in $B$ (Prop. 5) una curva semplice chiusa $\lambda$ separante $p$ da $G$, dal che si deduce che una curva $\eta_n$ la quale separi da $G$ tutti i punti $x$ di $\lambda$ per i quali è $|x, \mathrm{Fr}\,(B)| \geqslant |\lambda, \mathrm{Fr}\,(B)|$ separa $\lambda$, e quindi anche $p$, da $G$: in ambedue i casi è $p \in C$. Essendo d'altra parte, evidentemente, $C \subset \mathcal{E} - G$, ne segue $C = \mathcal{E} - G$. Se ne deduce $\mathrm{Fr}\,(C) = \mathrm{Fr}\,(\mathcal{E} - G) = \mathrm{Fr}\,(G)$.

---

(9) Detta $\{E_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ una successione di insiemi, indichiamo con $\limsup\limits_{n\to\infty} E_n$ (risp. $\liminf\limits_{n\to\infty} E_n$) l'insieme dei punti $p$ del piano, per ogni intorno $U$ dei quali si ha $U \cdot E_n \neq 0$ per infiniti valori di $n$ (risp. per tutti da un certo in poi i valori di $n$). Se questi due insiemi coincidono, parliamo di « insieme-limite », che indichiamo con $\lim\limits_{n\to\infty} E_n$.

Proviamo poi che è $\Gamma = \lim_{n\to\infty} \eta_n$. Posto $L' = \liminf_{n\to\infty} \eta_n$, $L'' = \limsup_{n\to\infty} \eta_n$, raggiungeremo la tesi provando successivamente che si ha $\Gamma \subset L'$, $L'' \subset \Gamma$.

Sia $p$ un punto di $\Gamma$, $U$ un intorno qualunque di $p$: essendo $U \cdot C \neq 0$ si ha $U \cdot C_m \neq 0$ per $m$ conveniente e quindi $U \cdot C_n \neq 0$ per $n \geqslant m$; essendo $U \cdot (\mathcal{E} - C) \neq 0$ è $U . (\mathcal{E} - C_n) \neq 0$ per ogni $n$; se ne deduce che è $U \cdot \eta_n \neq 0$ per $n \geqslant m$. Dunque $\Gamma \subset L'$.

Sia poi $p$ un punto di $L''$: per ogni intorno $U$ di $p$ si ha $U \cdot \eta_n \neq 0$ per infiniti valori di $n$, quindi, per gli stessi valori di $n$, $U \cdot C_n \neq 0$, $U \cdot (\mathcal{E} - C_n) \neq 0$; d'onde si ha rispettivamente $U \cdot C \neq 0$, $\overline{U} \cdot (\mathcal{E} - C) \neq 0$. Dunque $L'' \subset \Gamma$.

Nella dimostrazione del Teorema che è l'oggetto di questo lavoro si presenta il caso di regioni le cui frontiere soddisfano ad una condizione di regolarità, in conseguenza della quale può imporsi alla curva approssimante di cui alla Prop. 8 un ulteriore carattere di regolarità.

Contempliamo tale caso nella proposizione seguente.

Prop. 10. *Sia $B$ una regione a frontiera limitata e sia $G$ un componente di $\mathcal{E}' - B$; sia $\varepsilon$ un numero positivo arbitrario. Suppongasi inoltre che il continuo* $\mathrm{Fr}_G(B)$ *contenga un numero finito $m$ di archi semplici $\alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ tali che*

(1) *due qualunque di essi non abbiano punti non-estremi in comune;*

(2) *per ogni punto $p \in \alpha_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ non-estremo e per ogni intorno $U$ connesso e sufficientemente ristretto di $p$, il quale sia attraversato semplicemente da $\alpha_i$* [10] *si abbia*

(2a) $U \cdot \mathrm{Fr}(B) = U \cdot \alpha_i$,

(2b) *(uno ed) uno solo dei due componenti di $U - \alpha_i$ sia contenuto in $B$ [quindi, in forza della* (2a), *l'altro componente non contenga punti di $B$].*

*In tali condizioni, esiste una curva semplice chiusa $\eta$ la quale*

(3) *è contenuta in $B$,*

(4) *separa da $G$ ogni punto $p$ di $B$ per il quale è* $|p, \mathrm{Fr}(B)| > \varepsilon$,

(5) *è decomponibile in $2m$ archi semplici*

$$\alpha'_1, \varphi_1, \alpha'_2, \varphi_2, \ldots, \alpha'_m, \varphi_m,$$

*aventi, nell'ordine scritto (da intendersi circolare) ognuno un estremo in comune col successivo e privi a due a due di altri punti in comune, per modo che*

---

[10] Così dicendo, intendiamo che l'intersezione $\alpha_i \cdot \mathrm{Fr}(U)$ consta di due punti situati, sull'arco, da bande opposte rispetto a $p$.

(5a) $\alpha_i'$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ *sia contenuto nell'intorno-*$\varepsilon$ *di* $\alpha_{r_i}$, *essendo* $(r_1, r_2, \ldots, r_m)$ *una permutazione di* $(1, 2, \ldots, m)$,

(5b) $\varphi_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ *sia contenuto nell'intorno-*$\varepsilon$ *dell'insieme* $\mathrm{Fr}_G(B) - \sum_1^m{}_i\, \alpha_i$.

Osservazione. Per la curva $\eta$ possono formularsi, in luogo delle (3), (4), (5a), i requisiti seguenti (che sono più opportuni nella nostra successiva applicazione):

(3') *è contenuta in* $B + \sum_1^m{}_i\, \alpha_i$,

(4') *separa da* $G - \eta$ *ogni punto* $p$ *di* $B$ *tale che* $|p, \mathrm{Fr}\,(B)| > \varepsilon$,

(5a') *detti, con opportuna numerazione,* $\alpha_{r_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ *gli archi* $\alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, $\alpha_i'$ *sia un sottoarco di* $\alpha_{r_i}$ *tale che* $\alpha_{r_i} - \alpha_i'$ *consti di due archetti semiaperti i cui diametri siano minori di* $\varepsilon$.

Dimostrazione.

È noto [e ci dispensiamo di riportare qui l'argomento (11)] che ogni regione $C$ la cui frontiera sia un continuo può rappresentarsi topologicamente su una regione circolare o sulla regione esterna a un cerchio, a seconda che $C$ sia limitata o no; ed è noto in quale maniera una tale rappresentazione può completarsi mediante una corrispondenza (in generale non univoca in alcuno dei due sensi) fra i punti delle frontiere, sì da soddisfare un requisito, opportunamente formulato, di continuità.

Ciò premesso, sia $\Gamma = \mathrm{Fr}_G\,(B)$ e sia $C$ il componente di $\mathcal{E} - \Gamma$ contenente $B$. Dalla Prop. 7 segue che $C$ soddisfa alle condizioni richieste per la rappresentabilità di $\overline{C}$ su una regione $\overline{C}^*$, avente come contorno una circonferenza $\Gamma^*$.

Dai termini nei quali una tale corrispondenza viene istituita (12) risulta immediatamente che, nella nostra particolare condizione (2), ai punti non-estremi degli archi $\alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ sono biunivocamente associati i punti non-estremi di altrettanti archi $\alpha_i^*$ di $\Gamma^*$, e che in ognuno di tali punti tanto la trasformazione di $\overline{C}$ in $\overline{C}^*$ quanto l'inversa soddisfano alla ordinaria nozione di continuità.

Costruiremo una curva semplice chiusa $\eta^*$ in $\overline{C}^*$, la cui imagine in $\overline{C}$ sarà la curva $\eta$ richiesta.

Se $a_i$, $b_i$, con $i = 1, 2, \ldots, m$, sono gli estremi di $\alpha_i$, poniamo

$$\Delta = \Gamma - \sum_1^m{}_i\, (\alpha_i - a_i - b_i)\,,$$

(11) C. Carathéodory: *Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete*, Math. Ann. **73**, 323-370 (1913).

(12) Vedasi, ad esempio, B. v. Kerékjártó: *Vorlesungen über Topologie: I, Flächentopologie*, pp. 110-113 (Berlin, 1923).

e diciamo $U$ un intorno di $\Delta$ relativamente a $\overline{C}$, tale che $p \in U$ implichi $|p, \Delta| < \varepsilon$.

In $\overline{C}^*$, detti $a_i^*$, $b_i^*$, con $i = 1, 2, \ldots, m$, gli estremi dell'arco $\alpha_i^*$ (estremi che in generale non coincidono con gl'insiemi-imagine dei punti $a_i$, $b_i$) osserviamo che l'insieme

$$\Delta^* = \Gamma^* - \sum_{1}^{m}{}_i \, (\alpha_i^* - a_i^* - b_i^*)$$

è chiuso e consta di $m$ componenti (archi o punti), che indicheremo con $\delta_i^*$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, numerandoli nell'ordine circolare in cui sono disposti su $\Gamma^*$; essendo rimasta sin qui impregiudicata la numerazione degli archi $\alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, è legittimo supporla tale che $b_i^*$ ed $a_{i+1}^*$ [13] appartengano a $\delta_i^*$.

L'insieme $U^*$, imagine di $U$, è un intorno di $\Delta^*$ relativamente a $\overline{C}^*$. Pur di supporre $\varepsilon$ sufficientemente piccolo, fra i componenti di $U^*$ ve ne sono $m$, che diciamo $U_i^*$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, i quali sono rispettivamente intorni dei componenti $\delta_i^*$ di $\Delta^*$.

Su ciascuno degli archi $\alpha_i^*$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ scegliamo una coppia di punti $a_i'^*$, $b_i'^*$ tali che gli archi $\widehat{a_i^* a_i'^*}$ e $\widehat{b_i'^* b_i^*}$ di $\Gamma^*$ siano contenuti rispettivamente in $U_{i-1}^*$ e in $U_i^*$.

Detta $B^*$ l'imagine di $B$, constatiamo che per ogni $i$ esiste un componente $V_i^*$ di $U_i^* \cdot B^*$ alla cui frontiera appartengono sia $b_i'^*$ sia $a_{i+1}'^*$: se così non fosse, la frontiera di un componente di $U_i^* \cdot B^*$ la quale contenesse uno e non l'altro dei due detti punti separerebbe in $\overline{C}^*$ i punti di $B^*$ prossimi all'uno dai punti di $B^*$ prossimi all'altro, ipotesi che contraddice al fatto che $\Gamma^*$ è un componente di $\overline{C}^* - B^*$.

Poichè i punti $b_i'^*$, $a_{i+1}'^*$ appartengono a $\mathrm{Fr}(V_i^*)$ e sono accessibili dall'interno di $V_i^*$, si deduce l'esistenza di un arco semplice $\varphi_i^*$ avente gli estremi rispettivamente nei due detti punti, i cui rimanenti punti appartengono a $V_i^*$, dunque a $U_i^* \cdot B^*$.

Dicendo allora $\alpha_i'$, $\varphi_i$, con $i = 1, 2, \ldots, m$, le imagini in $\overline{C}$ rispettivamente degli archi $\widehat{a_i'^* b_i'^*}$, $\varphi_i^*$, si constata facilmente, in base alle modalità della costruzione indicata, che la curva semplice chiusa $\eta$ ottenuta percorrendo i detti archi uno di seguito all'altro soddisfa alle condizioni (3′), (4′), (5a′), (5b).

Volendo prescrivere le condizioni (3), (4), (5a), (5b), è evidente che basterà accorciare in prossimità di ambedue gli estremi ognuno degli archi $\varphi_i$, e sostituire gli archi $\alpha_i'$ con archi le cui imagini in $\overline{C}^*$ siano contenute in una circonferenza concentrica a $\Gamma^*$ e abbastanza vicina ad essa affinchè gli archi stessi siano contenuti in $B^*$ e le loro imagini in $C$ siano situate interamente nell'intorno-$\varepsilon$ dei corrispondenti archi $\alpha_i$. Cosa che, evidentemente, riesce effettuabile.

---

[13] È ovvio che la numerazione è intesa (mod $m$). Così, nel seguito, in casi analoghi.

## 2. – Teoremi già noti sulle trasformazioni continue.

Si riportano qui di seguito due risultati sulla questione che interessa il presente lavoro, ai quali la dimostrazione del nuovo Teorema è essenzialmente appoggiata.

Teorema I [14]. *Su un piano $\mathcal{E}$ sia $C$ una regione limitata, il cui contorno sia una curva semplice chiusa orientata $\gamma$. Sia $\Phi$ una trasformazione continua di $\overline{C}$ in un piano $\mathcal{E}'$; sia $\gamma'$ la curva-imagine di $\gamma$.*

*Detta allora $A'$ una regione componente dell'insieme $\mathcal{E}-\gamma'$ per la quale sia*

$$\operatorname{ind}(\gamma'; A') = n \neq 0$$

*e detto $P'$ un insieme finito qualunque di $k$ punti di $A'$, si ha*

$$N[\Phi^{-1}(P')] \geqslant |n|(k-1)+1 .$$

Si osservi che in tale enunciato rientra, come caso particolare ($k=1$), il teorema di Kronecker [15].

Teorema II [16]. *Su un piano $\mathcal{E}$, sia $R$ una corona circolare di contorni $\alpha$, $\beta$ equiorientati. Sia $\Phi$ una trasformazione continua di $\overline{R}$ in un piano $\mathcal{E}'$; siano $\alpha'$, $\beta'$ le curve-imagini dei contorni $\alpha$, $\beta$.*

*Detta allora $A'$ una regione componente di $\mathcal{E}'-(\alpha'+\beta')$ per la quale i due interi*

$$n^{(\alpha)} = \operatorname{ind}(\alpha'; A'), \qquad n^{(\beta)} = \operatorname{ind}(\beta'; A')$$

*non abbiano segni contrari e posto $n = |n^{(\alpha)} - n^{(\beta)}|$, per ogni insieme finito $P'$ di $k$ punti in $A'$ si ha*

$$N[\Phi^{-1}(P')] \geqslant n(k-1) .$$

## 3. – Teorema.

*Su un piano $\mathcal{E}$ sia $R$ una corona circolare di contorni $\alpha$, $\beta$ equiorientati. Sia $\Phi$ una trasformazione continua di $\overline{R}$ in un piano $\mathcal{E}'$. Dette $\alpha'$ e $\beta'$ le curve-imagini*

---

(14) Loc. cit. in (1).

(15) Cfr. Alexandroff-Hopf: *Topologie, I*, pp. 467-468 (Berlin, 1935); C. Kuratowski: op. cit. in (4), p. 430.

(16) Loc. cit. in (2).

*di $\alpha$ e $\beta$ mediante la $\Phi$, sia $A'$ una regione componente di $\mathcal{E}'-(\alpha'+\beta')$ tale che i due interi*

$$\operatorname{ind}(\alpha'; A') = n^{(\alpha)}, \qquad \operatorname{ind}(\beta'; A') = n^{(\beta)}$$

*non abbiano segni contrari.*

*Posto $n = |n^{(\alpha)} - n^{(\beta)}|$, chiamiamo «eccezionale» un punto $p'$ di $A'$ se e soltanto se l'insieme $\Phi^{-1}(p')$ consta di meno che $n$ punti.*

*In tali condizioni, affermiamo che*

*in $A'$ vi sono al più $n-1$ punti eccezionali.*

*Più precisamente: detti $p'_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ $k$ punti qualsiasi in $A'$, si ha*

$$\sum_{1}^{k}{}_i \{n - N[\Phi^{-1}(p'_i)]\} \leqslant n-1 ,$$

*ossia*

$$\sum_{1}^{k}{}_i N[\Phi^{-1}(p'_i)] \geqslant (k-1)n + 1 . \tag{1}$$

Dimostrazione.

**1.** – Supporremo orientato $\mathcal{E}'$ in guisa che i due interi $n^{(\alpha)}$, $n^{(\beta)}$ risultino non-negativi; poichè nel caso $n = 0$ l'enunciato è inespressivo, supponiamo che sia $n^{(\alpha)} > n^{(\beta)} \geqslant 0$. Su $\mathcal{E}$, ci raffigureremo $\alpha$ come contorno esterno di $R$, $\beta$ come contorno interno; indicheremo con $C^{(\alpha)}$, $C^{(\beta)}$ i cerchi aventi rispettivamente $\alpha$ e $\beta$ come contorni ($\overline{R} = \overline{C}^{(\alpha)} - C^{(\beta)}$).

Per $k = 1$ l'enunciato contiene soltanto l'affermazione che l'insieme $\Phi^{-1}(p'_1)$ non è vuoto, ossia esso s'identifica col teorema di KRONECKER; lo stesso può dirsi per il caso $n = 1$.

Supporremo pertanto

$$n \geqslant 2, \qquad k \geqslant 2 .$$

Ancora, *supporremo che i punti $p'_i$ siano tutti eccezionali*; invero, provata la (1) per ogni tale sistema di punti essa risulta immediatamente verificata in ogni caso, stante che per ogni punto $p'$ non eccezionale è $N[\Phi^{-1}(p')] \geqslant n$.

Indicheremo con $P'$ l'insieme dei punti $p'_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ con $P'_{2,\ldots,k}$ l'insieme $P' - p'_1$; porremo ancora

$$P_i = \Phi^{-1}(p'_i), \qquad P = \Phi^{-1}(P'), \qquad P_{2,\ldots,k} = \Phi^{-1}(P'_{2,\ldots,k}) .$$

Dal teorema di KRONECKER e dalle osservazioni precedenti segue che nessuno degl'insiemi ora considerati è vuoto.

**2.** – Consideriamo dapprima, separatamente, il caso che sia $n^{(\beta)} = 0$.

In tale ipotesi, la curva-imagine $\beta'$ è omotopa a zero in $\mathcal{E}' - A'$; ossia esiste una deformazione $\{\beta'_t;\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ di $\beta'$ $(= \beta'_0)$ in un punto $o'$ $(= \beta'_1)$, per la quale è $\beta'_t \cdot A' = 0$ per ogni valore di $t$. Possiamo pensarci rappresentata tale deformazione come una trasformazione continua del cerchio $\overline{C}^{(\beta)}$ in un insieme contenuto in $\mathcal{E}' - A'$;supponendo che tale trasformazione coincida con la $\Phi$ su $\beta$, otteniamo un prolungamento, che indichiamo con $\Phi^*$, della nostra $\Phi$ a tutto il cerchio $\overline{C}^{(\alpha)}$.

Alla $\Phi^*$, per la quale è

$$\operatorname{ind}(\Phi^*(\alpha);\ A') = \operatorname{ind}(\alpha';\ A') = n^{(\alpha)},$$

è applicabile il Teorema I (§ **2**); si ha cioè

$$N[\Phi^{*-1}(P')] \geqslant (k-1)n^{(\alpha)} + 1 .$$

Essendo $\Phi^*(\overline{C}^{(\beta)}) \cdot A' = 0$, quindi $\Phi^{*-1}(A') = \Phi^{-1}(A')$ si ha $\Phi^{*-1}(P') = \Phi^{-1}(P')$. La disuguaglianza ottenuta per la $\Phi^*$ coincide allora (essendo $n^{(\beta)} = 0$) con la tesi del Teorema.

**3.** – Il seguito della dimostrazione risulterà semplificato coll'ammettere l'ipotesi che

(*) l'insieme dei punti di $\alpha'$ e l'insieme dei punti di $\beta'$ coincidano in una (medesima) curva semplice chiusa $\gamma'$ la quale, mentre il punto-modello su $\mathcal{E}$ percorre semplicemente e positivamente $\alpha$ e $\beta$, risulta percorsa, positivamente e progressivamente, $n^{(\alpha)}$ risp. $n^{(\beta)}$ volte.

Perciò proveremo anzitutto che, se si ammette vera la tesi nelle particolari condizioni ora precisate, ne risulta la sua validità in generale.

Nell'ipotesi e con le notazioni dell'enunciato, sul piano $\mathcal{E}'$ diciamo $\gamma'$ una curva semplice chiusa orientata positivamente, rispetto alla quale la regione $A'$ resti all'interno, e del resto arbitraria; indichiamo con $m\gamma'$ ($m$ intero positivo) la curva chiusa che si ha percorrendo la $\gamma'$ positivamente e progressivamente $m$ volte.

Essendo $\operatorname{ind}(n^{(\alpha)}\gamma';\ A') = n^{(\alpha)} = \operatorname{ind}(\alpha';\ A')$, le curve $\alpha'$ ed $n^{(\alpha)}\gamma'$ risultano omotope in $\mathcal{E}' - A'$; ossia esiste una deformazione $\{\alpha'_t;\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ di $\alpha'$ $(= \alpha'_0)$ in $n^{(\alpha)}\gamma'$ $(= \alpha'_1)$ tale che $\alpha'_t \cdot A = 0$ per ogni valore di $t$. Considerando allora, su $\mathcal{E}$, una corona circolare $R^*_\alpha$ avente $\alpha$ come contorno interno, e della quale diciamo $\alpha^*$ il contorno esterno, pensiamoci rappresentata la detta deformazione con

una trasformazione continua $\Phi_\alpha$ definita in $\overline{R}^*_\alpha$, la quale coincida con la $\Phi$ su $\alpha$. Dunque:

$$\Phi_\alpha(p) = \Phi(p) \quad \text{per} \quad p \in \alpha, \qquad \Phi_\alpha(\overline{R}^*_\alpha) \cdot A' = 0.$$

Procediamo allo stesso modo relativamente al contorno $\beta$, definendo una trasformazione continua $\Phi_\beta$ in una corona circolare $\overline{R}^*_\beta$ avente $\beta$ come contorno esterno.

Resta così definita sulla corona $\overline{R}^* = \overline{R}^*_\alpha + R + \overline{R}^*_\beta$ un prolungamento $\Phi^*$ della $\Phi$, nel quale è

$$A' \subset \mathcal{E}' - (\Phi^*(\alpha^*) + \Phi^*(\beta^*)), \quad \text{ind}\,(\Phi^*(\alpha^*); A') = n^{(\alpha)}, \quad \text{ind}\,(\Phi^*(\beta^*); A') = n^{(\beta)}.$$

Siamo dunque per la $\Phi^*$ nelle condizioni previste nell'enunciato del Teorema, ed è verificata per essa la condizione restrittiva $(*)$, nella quale vogliamo ammettere che la tesi del Teorema sussista.

Si ha allora

$$N[\Phi^{*-1}(P')] \geqslant (k-1)(n^{(\alpha)} - n^{(\beta)}) + 1.$$

Tenuto conto che per il modo in cui la $\Phi^*$ è stata definita si ha $\Phi^*(\overline{R}^*_\alpha + \overline{R}^*_\beta) \subset \subset \mathcal{E}' - A'$ e che di conseguenza, essendo $P' \subset A'$, si ha $\Phi^{*-1}(P') = \Phi^{-1}(P')$, la tesi del Teorema risulta raggiunta per la $\Phi$.

Sarà dunque legittimo e conveniente supporre che la $\Phi$ stessa soddisfi alla condizione di semplicità $(*)$; indicheremo ancora con $\gamma'$ l'insieme $\Phi(\alpha) = \Phi(\beta)$.

**4.** – Sul piano $\mathcal{E}'$ sia $\sigma'$ una semiretta con origine in $p'_1$, non contenente altri punti di $P'$; sia $c'$ il punto-intersezione $\gamma' \cdot \sigma'$, e sia $\tau'$ la semiretta opposta alla $\sigma'$.

Sia $H = \Phi^{-1}(\sigma')$.

L'insieme $\alpha \cdot H = \alpha \cdot \Phi^{-1}(c')$ consta, in virtù dell'ipotesi semplificativa $(*)$ (n. **3** precedente), di $n^{(\alpha)}$ punti, che indichiamo con $a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n^{(\alpha)})$, seguendo il senso di percorrenza di $\alpha$.

Indichiamo con $\alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n^{(\alpha)})$ l'arco semplice di estremi $a_{i-1}$, $a_i$ definito da tale coppia ordinata di punti e dal verso fissato su $\alpha$. (Se è $n^{(\alpha)} = 1$, si tratta di un arco semplice ad estremi coincidenti.) Alla stessa maniera definiamo su $\beta$ i punti $b_i$ e gli archi $\beta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n^{(\beta)})$.

Nel seguito designeremo, per brevità, i detti archi con le parole *archi* $(\alpha)$ e *archi* $(\beta)$.

Dal fatto che $H$ è un insieme chiuso avente in comune con $\alpha$ e con $\beta$ i soli estremi degli archi $(\alpha)$ risp. $(\beta)$ segue che ognuno dei detti archi è contenuto per intero nella frontiera di una delle regioni componenti dell'insieme aperto $R - H$, e di una sola di esse. Diciamo $R_1, R_2, \ldots, R_s$ quei componenti di $R - H$ la cui frontiera contiene almeno un arco $(\alpha)$ o $(\beta)$ [sarà $s \leqslant n^{(\alpha)} + n^{(\beta)}$].

Indicando con $n_j^{(\alpha)}$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$ il numero, eventualmente nullo, degli archi $(\alpha)$ contenuti in $\mathrm{Fr}(R_j)$ ed analogamente definendo $n_j^{(\beta)}$, associamo ad ogni regione $R_j$ l'intero relativo $n_j = n_j^{(\alpha)} - n_j^{(\beta)}$ (*indice della regione* $R_j$). Evidentemente si ha $\sum_{1}^{s}{}_j\, n_j = n$.

Nel seguito designeremo gli archi $(\alpha)$ e $(\beta)$ contenuti in $\mathrm{Fr}(R_j)$ con le parole *archi* $(\alpha)_j$ risp. *archi* $(\beta)_j$.

**5.** – Esaminiamo più da vicino le frontiere delle regioni $R_j$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$ ora definite.

Si constata subito che, per ogni $j$ $(= 1, 2, \ldots, s)$, tutti gli (eventuali) archi $(\alpha)_j$ stanno in uno stesso componente di $\mathrm{Fr}(R_j)$: e infatti, appare assurda l'esistenza di una curva semplice chiusa la quale separi nel piano una coppia di archi $(\alpha)_j$ senza avere alcun'intersezione con $\mathrm{Fr}(R_j)$. Analogamente: per ogni $j$, tutti gli (eventuali) archi $(\beta)_j$ stanno in uno stesso componente di $\mathrm{Fr}(R_j)$.

È essenziale la seguente distinzione fra le $s$ regioni $R_j$:

(I) *Regioni* $R_j$ *che non separano* $\alpha$ *da* $\beta$. Poniamo $F_j = \mathrm{Fr}_\infty(R_j)$ $[= \mathrm{Fr}_\alpha(R_j) = \mathrm{Fr}_\beta(F_j)]$: gli archi $(\alpha)_j$, $(\beta)_j$ stanno tutti nel componente $F_j$ di $\mathrm{Fr}(R_j)$.

(II) *Regioni* $R_j$ *che separano* $\alpha$ *da* $\beta$. In tale caso, $\mathrm{Fr}_\alpha(R_j)$ e $\mathrm{Fr}_\beta(R_j)$ sono due componenti distinti di $\mathrm{Fr}(R_j)$. Ponendo $F_j^{(\lambda)} = \mathrm{Fr}_\lambda(R_j)$ $(\lambda = \alpha, \beta)$ e $F_j = F_j^{(\alpha)} + F_j^{(\beta)}$, gli archi $(\alpha)_j$ (se ve ne sono) stanno in $F_j^{(\alpha)}$, gli archi $(\beta)_j$ (se ve ne sono) stanno in $F_j^{(\beta)}$.

Si noti che delle nostre regioni due al più possono essere del tipo (II). Per provarlo, si osservi che se in una corona $R$ di contorni $\alpha$ e $\beta$ si hanno due regioni $R_1$, $R_2$ separanti $\alpha$ da $\beta$ e tali che

$$R_1 \cdot R_2 = 0\,, \qquad (\alpha + \beta)\cdot \mathrm{Fr}(R_1) \neq 0\,, \qquad (\alpha + \beta)\cdot \mathrm{Fr}(R_2) \neq 0\,,$$

non può avvenire che un medesimo dei contorni $\alpha$ o $\beta$ contenga punti di ambedue le frontiere; e invero, l'esistenza di due curve semplici chiuse $\varrho_1 \subset R_1$, $\varrho_2 \subset R_2$, ciascuna delle quali separi $\alpha$ da $\beta$, implica che $\mathrm{Fr}(R_1)$ non ha punti su quella delle due curve $\alpha$, $\beta$ dalla quale $R_1$ viene separato per mezzo di $\varrho_2$.

Notiamo anche che *una al più delle regioni del tipo* (II) *contiene archi* $(\alpha)$.

**6.** – Allo scopo di poter stabilire, per i componenti $F_j$ (rispettivamente $F_j^{(\alpha)}$, $F_j^{(\beta)}$) delle frontiere delle regioni $R_j$ una nozione analoga a quella del «percorrimento» per una curva semplice chiusa, definiremo curve (risp. coppie di curve) semplici chiuse approssimanti gli $F_j$. Ci gioveremo della Prop. 10 del § **1**.

Sia $\varepsilon$ un numero positivo arbitrario.

Per le regioni del tipo (I), diciamo ${}^{(\varepsilon)}\eta_j$ una curva semplice chiusa la quale

($\eta$1) sia contenuta nell'insieme $R_j + F_j - H$ [17];

($\eta$2) lasci all'interno ogni punto $p$ di $R_j$ per il quale è $|p, \mathrm{Fr}(R_j)| > \varepsilon$;

($\eta$3) sia la somma di $2(n_j^{(\alpha)} + n_j^{(\beta)})$ archi semplici, a due a due privi di punti non-estremi in comune, che notiamo (seguendo il percorso della ${}^{(\varepsilon)}\eta_j$) con

$$ {}^{(\varepsilon)}\bullet_{j,1},\ {}^{(\varepsilon)}\varphi_{j,1},\ {}^{(\varepsilon)}\bullet_{j,2},\ {}^{(\varepsilon)}\varphi_{j,2},\ \ldots,\ {}^{(\varepsilon)}\bullet_{j,\bar{n}_j},\ {}^{(\varepsilon)}\varphi_{j,\bar{n}_j}, \qquad (\bar{n}_j = n_j^{(\alpha)} + n_j^{(\beta)}) $$

[i segni $\bullet$ essendo da leggersi $\alpha$ o $\beta$, a norma di quanto segue],

per modo che

($\eta 3\bullet$) gli archi ${}^{(\varepsilon)}\bullet_{j,i}$ $(i = 1, 2, \ldots, \bar{n}_j)$ siano sottoarchi degli $(\alpha)_j$ e $(\beta)_j$, ottenuti rispettivamente da questi togliendo due archetti semiaperti di diametro minore di $\varepsilon$, in prossimità degli estremi,

($\eta 3\varphi$) gli archi ${}^{(\varepsilon)}\varphi_{i,j}$ $(i = 1, 2, \ldots, \bar{n}_j)$ siano interamente contenuti nell'intorno-$\varepsilon$ di $F_j - (\alpha + \beta)$ e non abbiano punti non-estremi sulle curve $\alpha$ e $\beta$.

La curva ${}^{(\varepsilon)}\eta_j$ ora definita si penserà orientata nel senso positivo: gli (eventuali) archi $(\alpha)_j$ vengono allora descritti come su $\alpha$; gli (eventuali) archi $(\beta)_j$ contrariamente al senso di $\beta$.

Indichiamo con ${}^{(\varepsilon)}C_j$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$ la regione limitata di contorno ${}^{(\varepsilon)}\eta_j$.

Per le regioni del tipo (II), diciamo ${}^{(\varepsilon)}\eta_j$ una coppia di curve semplici chiuse ${}^{(\varepsilon)}\eta_j^{(\alpha)}$, ${}^{(\varepsilon)}\eta_j^{(\beta)}$, delle quali la prima s'intende definita come la ${}^{(\varepsilon)}\eta_j$ del caso precedente (essendo ora $2n_j^{(\alpha)}$ il numero totale degli archi in cui è decomposta; i segni $\bullet$ vanno letti $\alpha$), mentre la seconda è definita sostituendo la parola *esterno* alla parola *interno* nella ($\eta$2) e lasciando inalterato il rimanente del testo (il numero totale degli archi ora è $2n_j^{(\beta)}$; i segni $\bullet$ vanno letti $\beta$). Notiamo che se $F_j^{(\lambda)}$ $(\lambda = \alpha, \beta)$ non contiene archi $(\lambda)_j$, la ${}^{(\varepsilon)}\eta_j^{(\lambda)}$ consta di un unico arco ${}^{(\varepsilon)}\varphi_{j,1}^{(\lambda)}$ ad estremi coincidenti.

Supporremo che la prima delle due dette curve lasci la seconda al suo interno (il che per $\varepsilon$ abbastanza piccolo avviene necessariamente).

Diciamo, in questo secondo caso, ${}^{(\varepsilon)}C_j$ la corona delimitata dalle due dette curve.

**7.** – Sia poi, per ogni regione $R_j$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$,

$$ \{{}^{(\varepsilon_n)}\eta_j;\ n = 1, 2, \ldots; \qquad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0\}, $$

[17] Ossia in $R_j + \{$punti non-estremi degli archi $(\alpha)_j$, $(\beta)_j\}$.

una successione di curve [o, per le regioni del tipo (II), di coppie di curve] tale che per la corrispondente successione di regioni si abbia

$$^{(\varepsilon_{n+1})}C_j \supset {}^{(\varepsilon_n)}\overline{C}_j \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

L'insieme

$$C_j = \sum_{1}^{n}{}_n\, {}^{(\varepsilon_n)}C_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, s)$$

è una regione contenente $R_j$ (essendo che $\varepsilon_n$ tende a zero).

Per le regioni $C_j$ ($j = 1, 2, \ldots, s$) si ha evidentemente $C_{j'} \cdot C_{j''} = 0$ per $j' \neq j''$. Ad esse può estendersi senz'altro la distinzione, di cui al n. **5**, in due tipi (I) e (II); sussiste ancora per esse quanto si è ivi rilevato per le regioni $R_j$.

Segue dalla Prop. 9 del § **1** che è

$$\mathrm{Fr}\,(C_j) = F_j = \lim_{n \to \infty} {}^{(\varepsilon_n)}\eta_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, s);$$

in particolare, essendo $F_j \cdot R \subset H$, rileviamo che è

$$\mathrm{Fr}\,(C_j) \subset H + \alpha + \beta\,.$$

**8.** – Pensiamo decomposta ciascuna curva $^{(\varepsilon_n)}\eta_j$ [risp. $^{(\varepsilon_n)}\eta_j^{(\lambda)}$ ($\lambda = \alpha, \beta$), se la regione $R_j$ è del tipo (II)] in archi com'è detto al n. **6**, ($\eta 3$). Supponiamo numerati gli archi di ciascuna curva della successione in modo che per ogni fissato valore di $i$ ($=1, 2, \ldots, \overline{n}_j$ risp. $\overline{n}_j^{(\lambda)}$) il simbolo $^{(\varepsilon_n)}\bullet_{j,i}$ [risp. $^{(\varepsilon_n)}\bullet_{j,i}^{(\lambda)}$ ($\lambda = \alpha, \beta$)] indichi al variare di $n$ un sottoarco di un medesimo arco $(\bullet)_j$.

Considerando ora la successione di archi omologhi

$$\{^{(\varepsilon_n)}\varphi_{j,i};\ n = 1, 2, \ldots\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \overline{n}_j;\ j = 1, 2, \ldots, s)$$

[e analoghi per le regioni del tipo (II)], si constata subito che l'insieme-limite $F_{j,i}$ di tale successione è un continuo contenuto nell'insieme-limite della successione $\{^{(\varepsilon_n)}\eta_j;\ n = 1, 2, \ldots\}$, ossia in $\mathrm{Fr}(C_j) = F_j$. Poichè ad $F_{j,i}$ non possono appartenere punti non-estremi di archi $(\alpha)_j$ o $(\beta)_j$, e poichè $F_j$ è contenuto in $H + \alpha + \beta$, si ha

$$F_{j,i} \subset H \cdot F_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, \overline{n}_j;\ j = 1, 2, \ldots, s).$$

Essendo ovvio d'altra parte che ogni punto di $H \cdot F_j$ appartiene all'insieme-limite della successione di curve e quindi ad (almeno) uno degli $\overline{n}_j$ continui $F_{j,i}$, ne viene

$$H \cdot F_j \subset \sum_{1}^{\overline{n}_j}{}_j F_{j,i} \qquad (j = 1, 2, \ldots, s).$$

Dalle due inclusioni stabilite si trae

$$\sum_{1}^{\overline{n}_j}{}_i F_{j,i} = H \cdot F_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, s).$$

Per le regioni del tipo (I), $F_j$ è dunque la somma di $n_j^{(\alpha)}$ archi $(\alpha)_j$, $n_j^{(\beta)}$ archi $(\beta)_j$ ed $\overline{n}_j$ continui $F_{j,i}$ (questi ultimi non necessariamente tutti distinti fra loro). Seguendo l'ordine circolare dei valori (mod $\overline{n}_j$) di $i$, pensiamo ordinati circolarmente i detti $2\overline{n}_j$ elementi (archi e continui); potremo in tale senso dire che un continuo $F_{j,i}$ [con riferimento all'assegnato valore di $i$ ([18])] è *compreso fra* due archi $(\alpha)_j$ e $(\beta)_j$ e, considerando l'ordine subordinato fra gli $\overline{n}_j$ archi $(\alpha)_j$ e $(\beta)_j$, parleremo di coppia (ordinata) di archi *consecutivi*; va inteso che si considera tale nel caso $n_j = 1$ la coppia ad elementi coincidenti, costituiti dall'unico arco $(\alpha)_j$ o $(\beta)_j$ a disposizione.

Per le regioni del tipo (II), se un componente $F_j^{(\lambda)}$ $(\lambda = \alpha, \beta)$ di $\mathrm{Fr}(C_j)$ contiene archi della relativa curva $\lambda$, su di esso si ripete la considerazione precedente (essendo ora $n_j^{(\lambda)}$ il numero dei continui $F_{j,i}^{(\lambda)}$); se invece $F_j^{(\lambda)}$ non contiene alcun arco di $\lambda$ (ossia se $n_j^{(\lambda)} = 0$), esso consta di un unico continuo $F_{j,1}^{(\lambda)} = F_j^{(\lambda)}$.

In ciascuno dei componenti $F_j^{(\lambda)}$ $(\lambda = \alpha, \beta)$ si hanno $n_j^{(\lambda)}$ elementi, ordinati circolarmente.

**9.** – Dalla $(\eta 1)$ segue ${}^{(\varepsilon)}\eta_j \cdot H = 0$, donde $\Phi({}^{(\varepsilon)}\eta_j) . \sigma' = 0$. Tenuto conto che $p_1'$ è l'origine della semiretta $\sigma'$, se ne deduce

$$\mathrm{ind}\,(\Phi({}^{(\varepsilon)}\eta_j);\, p_1') = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, s).$$

Vogliamo provare poi che per $\varepsilon$ sufficientemente piccolo si ha

$$(2) \qquad \begin{cases} \mathrm{ind}\,(\Phi({}^{(\varepsilon)}\eta_j);\, p_h') = n_j & \text{se } R_j \text{ è del tipo (I)} \qquad (j = 1, 2, \ldots, s), \\ \mathrm{ind}\,(\Phi({}^{(\varepsilon)}\eta_j^{(\lambda)});\, p_h') = n_j^{(\lambda)} & \text{se } R_j \text{ è del tipo (II)} \qquad (h = 2, 3, \ldots, k). \end{cases}$$

Per semplicità di esposizione, ci riferiamo ad una regione $R_j$ del tipo (I); la stessa argomentazione vale per l'altro caso.

Sul piano $\mathcal{E}'$, posto $d' = |P'_{2,\ldots,k}, \sigma'|$, diciamo $S'$ l'intorno-$d'$ di $\sigma'$; si supponga $\varepsilon$ tale che per $p, q \in \overline{R}$, $|p, q| < \varepsilon$, si abbia $|\Phi(p), \Phi(q)| < d'$.

In tali condizioni, riferiamoci alla decomposizione della ${}^{(\varepsilon)}\eta_j$ in archi indicata al n. **6**. Dalla $(\eta 3\bullet)$ e dalla $(\eta 3\varphi)$ segue, per gli archi-imagine, rispettivamente

$$\gamma' - S' \subset \Phi({}^{(\varepsilon)}\bullet_{j,i}) \subset j', \qquad \Phi({}^{(\varepsilon)}\varphi_{j,i}) \subset S'.$$

([18]) Può infatti essere $F_{j,i'} = F_{j,i''}$ con $i' \neq i''$.

Dopo di ciò, detto $p$ un punto che descrive la ${}^{(\varepsilon)}\eta_j$, si consideri il punto-imagine $p'$ su $\mathcal{E}'$. Mentre $p$ descrive un arco ${}^{(\varepsilon)}\bullet_{j,i}$, $p'$ descrive un arco contenente $\gamma' - S'$, ruotando intorno ad $A'$ in senso positivo o negativo a seconda che $p$ percorre un arco $(\alpha)$ o un arco $(\beta)$. Mentre $p$ descrive un arco ${}^{(\varepsilon)}\varphi_{j,i}$, $p'$ si mantiene entro $S'$; per ogni tale arco-imagine esiste dunque una deformazione ad estremi costanti entro $S'$ dell'arco stesso in un archetto contenuto in $\gamma' \cdot S'$. Essendo $S' \cdot P'_{2,\ldots,k} = 0$, se ne deduce che $\Phi({}^{(\varepsilon)}\eta_j)$ è omotopa in $\gamma' + S'$ ad una curva ottenuta percorrendo $n_j^{(\alpha)}$ volte in senso positivo ed $n_j^{(\beta)}$ volte in senso negativo la $\gamma'$: ne resta provata la (2).

**10.** – Con riferimento all'ordine circolare definito al n. **8** per gli elementi $\bullet_{j,i}$, $F_{j,i}$, con $i = 1, 2, \ldots, \bar{n}_j$, contenuti in $F_j$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$ [e analoghi per le regioni del tipo (II)] vogliamo provare che *se una coppia di archi consecutivi appartiene alla medesima delle due curve $\alpha$, $\beta$, il continuo compreso fra i due archi contiene almeno un punto dell'insieme $P_1$ $[= \Phi^{-1}(p'_1)]$.*

Supponiamo trattarsi, ad esempio, di due archi di $\alpha$; per semplicità, scriviamo $\alpha_1$, $F$, $\alpha_2$ in luogo di $\alpha_{j,i}$, $F_{j,i}$, $\alpha_{j,i+1}$.

Sia $\{\varphi_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ una successione approssimante $F$, come definita al n. **8**, e sia $\{\varphi'_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ la successione dei relativi archi-imagine su $\mathcal{E}'$.

Fissato un intorno-$\delta$ qualunque $S'$ di $\sigma'$, è chiaro che per $n$ abbastanza grande si ha $\varphi'_n \subset S'$. Ricordando (dal n. **9** precedente) che gli estremi di $\varphi_n$, situati su $\gamma' \cdot S'$, stanno da bande opposte rispetto a $\sigma'$, e tenendo presente che è $\varphi'_n . \sigma' = 0$, si deduce che ogni arco-imagine $\varphi'_n$ taglia la semiretta $\tau'$ (opposta di $\sigma'$). Consideriamo una successione di siffatte intersezioni

$$\{q'_n;\ n = 1, 2, \ldots\}, \qquad q'_n \in \varphi'_n . \tau' .$$

Poichè si ha $\lim\limits_{n\to\infty} (\max\limits_{p' \in \varphi'_n} |p', \sigma'|) = 0$, è $\lim\limits_{n\to\infty} q'_n = p'_1$.

Detto allora $q_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ un punto arbitrario di $\Phi^{-1}(q'_n) \cdot \varphi_n$ (per esempio il primo che s'incontra percorrendo l'arco orientato $\varphi_n$) è detto $q_0$ un punto di accumulazione per l'insieme dei punti $q_n$, si ha necessariamente $\Phi(q_0) = p'_1$. Essendo $q_0 \in F$, la tesi di questo n. è provata.

**11.** – Delle $s$ regioni $C_j$ ci limiteremo, nel seguito, a considerare quelle per le quali è $n_j > 0$: siano esse $C_1, C_2, \ldots, C_r$ $(0 < r \leqslant s)$. Evidentemente si ha

$$\sum_{1}^{r}{}_j\, n_j \geqslant n.$$

Diciamo $G$ l'insieme che rimane togliendo da $R$ le $r$ regioni dette e tutti i punti non-estremi degli archi $(\alpha)_j$, $(\beta)_j$, con $j = 1, 2, \ldots, r$; ossia poniamo

$$G = R - \sum_{1}^{r}{}_j\, (C_j + F_j - H) .$$

Notiamo che ogni componente di $G$ ha punti su almeno una delle due curve $\alpha$, $\beta$.

Dopo tutto ciò, perverremo alla tesi del Teorema per due vie diverse, a seconda che l'insieme $G + \alpha + \beta$ sia sconnesso o connesso.

### Caso A: L'insieme $G + \alpha + \beta$ è sconnesso.

**12.** – Ci proponiamo in questo n. di stabilire una limitazione inferiore per il numero $r$.

Poichè ogni componente di $G$ ha punti sul contorno di $R$, $G + \alpha + \beta$ consta di *due* componenti, contenenti rispettivamente $\alpha$ e $\beta$; ne viene che l'insieme complementare $C = \sum_1^r {}_j\, C_j = \overline{R} - (G + \alpha + \beta)$ separa $\alpha$ da $\beta$, e quindi (Prop. 1 del § **1**) che almeno una delle regioni $C_j$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ separa $\alpha$ da $\beta$. Nè, d'altra parte, di tali regioni può esservene più d'una, dappoichè la frontiera di ciascuna regione $C_j$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ contiene almeno un arco $(\alpha)$ [cfr. argomentazione esposta al n. **5** e osservazione al n. **7**].

Sia $C_r$ la regione separante $\alpha$ da $\beta$.

Dall'ipotesi di questo Caso A discende ancora che $\mathrm{Fr}\,(C_j)$ $[= F_j]$, per $j = 1, 2, \ldots, r-1$, non contiene alcun punto di $\beta$, e che $\mathrm{Fr}\,(C_r)$ $(= F_r^{(\alpha)} + F_r^{(\beta)})$ può contenere punti di $\beta$ soltanto nel suo componente $F_r^{(\beta)}$. In conseguenza di ciò, interessa qui rilevare che nell'ordine circolare definito al n. **8** per gli elementi di $F_j$ (per $j = 1, 2, \ldots, r-1$), e di $F_r^{(\alpha)}$ e di $F_r^{(\beta)}$, *due archi consecutivi appartengono necessariamente ambedue alla medesima delle curve* $\alpha$, $\beta$.

Dopo di ciò, proviamo che *ogni componente di* $G$ *contiene almeno un punto di* $P_1$. Detto $G_1$ un componente di $G$, sappiamo che è $G_1 \cdot (\alpha + \beta) \neq 0$; sia ad esempio $G_1 \cdot \alpha \neq 0$. Sia $a_1$ un punto [estremo di un arco $(\alpha)$] di $G_1 \cdot \alpha$, e sia $\alpha_1$ l'arco $(\alpha)$ avente il suo secondo estremo in $a_1$. Notiamo anzitutto che non può essere $\alpha_1 \subset G$; detta infatti $C_j$ la regione avente $\alpha_1$ alla frontiera, se fosse $n_j \leqslant 0$, $\mathrm{Fr}\,(C_j)$ conterrebbe almeno un arco $(\beta)$, mentre la sola regione che compatibilmente con l'ipotesi di questo Caso A può avere alla frontiera archi di entrambe le curve $\alpha$ e $\beta$ è $C_r$, per la quale è $n_r > 0$. Sia dunque $\alpha_1 \subset \mathrm{Fr}\,(C_j)$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$. Nell'ordine circolare su $F_j$ (se $1 \leqslant j \leqslant r-1$) o su $F_r^{(\alpha)}$, l'arco consecutivo ad $\alpha_1$ è un arco $(\alpha)$; sia esso $\alpha_2$. Pertanto, il continuo $F_{j,i}$ (oppure $F_{r,i}^{(\alpha)}$) compreso, nel senso specificato nel n. **8**, in $F_j$ (risp. in $F_r^{(\alpha)}$), fra $\alpha_1$ ed $\alpha_2$ contiene (n. **10**) almeno un punto di $P_1$. Essendo $a_1 \in G_1$, si ha $F_{j,i}$ (risp. $F_{r,i}^{(\alpha)}$) $\subset G_1$; resta dunque provato che $G_1$ contiene un punto di $P_1$.

Indichiamo con $G_\alpha$ l'insieme-riunione di quei componenti di $G$ i quali contengono punti di $\alpha$.

Allo scopo di applicare agl'insiemi chiusi $\alpha$, $G_\alpha$ la formula di STRASZEWICZ

(Prop. 6 del § **1**), valutiamo il numero dei componenti di ciascuno degli otto insiemi che vi compaiono.

Con la notazione usata nel § **1**, osserviamo anzitutto che è $\boldsymbol{c}[\alpha]=1$, $\boldsymbol{c}[\mathcal{E}-\alpha]=2$.

Essendo che $\alpha\cdot G_\alpha$ consta di tutti e soli i punti $a_i$ $(i=1,2,\ldots,n^{(\alpha)})$ si ha $\boldsymbol{c}[\alpha\cdot G_\alpha]=n^{(\alpha)}$, $\boldsymbol{c}[\mathcal{E}-(\alpha\cdot G_\alpha)]=1$.

L'insieme $\alpha+G_\alpha$ è un continuo il cui insieme complementare consta del componente illimitato di $\mathcal{E}-\overline{R}$, delle regioni $C_1, C_2, \ldots, C_{r-1}$ e della regione $C_r$ ampliata col componente limitato del suo insieme complementare. Si ha pertanto $\boldsymbol{c}[\alpha+G_\alpha]=1$, $\boldsymbol{c}[\mathcal{E}-(\alpha+G_\alpha)]=r+1$.

L'insieme $G_\alpha$ non separa il piano: e infatti, ognuna delle $r+1$ regioni di cui alle righe precedenti ha almeno un arco di $\alpha$ alla frontiera. Dunque è $\boldsymbol{c}[\mathcal{E}-G_\alpha]=1$.

Con i valori trovati, la formula di STRASZEWICZ diviene

$$r=n^{(\alpha)}-\boldsymbol{c}[G_\alpha]+1\,.$$

Dopo di ciò, osserviamo che esiste almeno un componente di $G$ non contenuto in $G_\alpha$ (dappoichè si è supposto $n^{(\beta)}<0$, cfr. n. **2**), e ricordiamo che ogni componente di $G$ contiene almeno un punto di $P_1$. Indicando con $N_1$ il numero dei punti di $P_1$ si ha dunque

$$\boldsymbol{c}[G_\alpha]\leqslant\boldsymbol{c}[G]-1\leqslant N_1-1\,.$$

Se ne deduce

$$r\geqslant n^{(\alpha)}-N_1+2;$$

ed essendo $n^{(\alpha)}\geqslant n+1$, si ha infine

$$r\geqslant n-N_1+3\,.$$

**13.** – Consideriamo ora in luogo delle regioni $C_j$ $(j=1,2,\ldots,r)$ le regioni ${}^{(\varepsilon)}C_j$ definite al n. **6** (cerchi per $j\leqslant r-1$, corona per $j=r$), supponendo $\varepsilon$ piccolo quanto basta affinchè l'imagine del contorno ${}^{(\varepsilon)}\eta_j$ (curva o coppia di curve) sia contenuta in $\gamma'+S'$, essendo $S'$ un intorno di $\sigma'$ ristretto quanto basta per escludere $P'_{2,\ldots,k}$. Si ha allora, come è stato provato al n. **9**,

$$\begin{aligned}&\operatorname{ind}(\Phi({}^{(\varepsilon)}\eta_j);\ P'_{2,\ldots,k})=n_j && \text{per } j=1,2,\ldots,r-1,\\ &\operatorname{ind}(\Phi({}^{(\varepsilon)}\eta_r^{(\alpha)});\ P'_{2,\ldots,k})=\operatorname{ind}(\Phi({}^{(\varepsilon)}\eta_r^{(\beta)});\ P'_{2,\ldots,k})=n_r\,.\end{aligned}$$

Diciamo ${}^{(\varepsilon)}\Phi_j$ la restrizione della $\Phi$ alla regione ${}^{(\varepsilon)}C_j$.

Poichè $P'_{2,\ldots,k}$ è contenuto in un unico componente dell'insieme $\mathcal{E}' - {}^{(\varepsilon)}\Phi_j({}^{(\varepsilon)}\eta_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$, la ${}^{(\varepsilon)}\Phi_j$ soddisfa alle condizioni del Teorema I (§ **2**) per $j = 1, 2, \ldots, r-1$ e alle condizioni del Teorema II (§ **2**) per $j = r$.

Si ha dunque, per l'imagine reciproca del detto insieme di $k-1$ punti,

$$(0) \quad \begin{cases} N[{}^{(\varepsilon)}\Phi_j^{-1}(P'_{2,\ldots,k})] = N[P_{2,\ldots,k} \cdot {}^{(\varepsilon)}C_j] \geqslant (k-2)n_j + 1 \quad \text{per } j=1, 2, \ldots, r-1, \\ N[{}^{(\varepsilon)}\Phi_r^{-1}(P'_{2,\ldots,k})] = N[P_{2,\ldots,k} \cdot {}^{(\varepsilon)}C_r] \geqslant (k-2)n_r . \end{cases}$$

Essendo

$$P \subset P_1 + \sum_1^r{}_j (P_{2,\ldots,k} \cdot {}^{(\varepsilon)}C_j),$$

si ha, tenendo presente che per $j' \neq j''$ è ${}^{(\varepsilon)}C_{j'} \cdot {}^{(\varepsilon)}C_{j''} = 0$ $(j', j'' = 1, 2, \ldots, r)$,

$$N[P] = N[P_1] + N[P_{2,\ldots,k}] \geqslant N[P_1] + N[P_{2,\ldots,k} \cdot \sum_1^r{}_j {}^{(\varepsilon)}C_j] =$$

$$= N[P_1] + \sum_1^{r-1}{}_j N[P_{2,\ldots,k} \cdot {}^{(\varepsilon)}C_j] + N[P_{2,\ldots,k} \cdot {}^{(\varepsilon)}C_r] .$$

Tenuto conto poi delle (0) si ha

$$N[P] \geqslant N_1 + \sum_1^{r-1}{}_j \{(k-2)n_j + 1\} + (k-2)n_r = N_1 + (k-2) \sum_1^r{}_j n_j + r - 1,$$

e infine, ricordando che $\sum_1^r{}_j n_j \geqslant n$, $r \geqslant n - N_1 + 3$, si ottiene

$$N[P] \geqslant (k-1)n + 2 ,$$

che è, ad abundantiam, la tesi del Teorema.

### Caso B: L'insieme $G + \alpha + \beta$ è connesso.

**14.** – Anche in questo caso valutiamo dapprima il numero $r$.

In questo caso nessuna delle regioni $C_j$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ separa $\alpha$ da $\beta$; il che implica che le frontiere $F_j$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ sono tutte connesse. Possono esservi archi $(\alpha)$ contenuti in $G$. Posto $\mu = \sum_1^r{}_j n_j^{(\alpha)}$, $\nu = \sum_1^r{}_j n_j^{(\beta)}$, si ha $\mu - \nu = \sum_1^r{}_j n_j \geqslant n$; diciamo $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_\mu^*$ i componenti [archi-riunione di archi $(\alpha)$

o punti $a_i$] di $G \cdot \alpha$. Notiamo che si ha

$$n + \nu \leqslant \mu \leqslant n^{(\alpha)} .$$

Poniamo poi

$$G^* = G + \bar{C}_\beta ,$$

(essendo $\bar{C}_\beta$ il cerchio di contorno $\beta$), e proviamo che *ogni componente di $G^*$, ad eccezione, nel caso che sia $\nu \neq 0$, di quello contenente $\beta$, contiene almeno un punto di $P_1$.*

Se è $\nu = 0$, nessuna delle regioni $C_j$ ($j = 1, 2, \ldots, r$) ha alla frontiera archi ($\beta$); pertanto, nell'ordine circolare istituito al n. **8** per gli elementi delle frontiere $F_j$, ogni coppia di archi consecutivi consta di due archi ($\alpha$). E poichè ogni componente di $G^*$ contiene punti di qualche frontiera $F_j$, e quindi contiene per intero qualche continuo del tipo $F_{j,i}$, sul quale [essendo esso compreso fra due archi ($\alpha$), cfr. n. **10**] vi sono punti di $P_1$, la tesi è provata.

Sia poi $\nu \neq 0$. Sia $G_1$ un componente di $G^*$ tale che $G_1 \cdot \beta = 0$. L'intersezione $G_1 \cdot \alpha$ consta di un certo numero di componenti (archi o punti) $\alpha_i^*$; detto $\alpha_1^*$ uno di questi, sia $a_1$ il suo primo estremo e sia $\alpha_1$ l'arco di $\alpha - G$ avente il suo secondo estremo in $a_1$; sia $C_j$ la regione alla cui frontiera appartiene $\alpha_1$. L'arco consecutivo ad $\alpha_1$ su $F_j$ non può essere un arco ($\beta$), poichè in tale caso il continuo $F_{j,i}$ compreso fra $\alpha_1$ ed un tale arco ($\beta$) conterrebbe punti di ambedue i contorni $\alpha$ e $\beta$, ed essendo $F_{j,i} \subset G$, quindi anche $F_{j,i} \subset G_1$ (poichè $a_1 \in F_{j,i}$), ne verrebbe che $G_1$ contiene punti di $\beta$, contro quanto si è supposto. Detto dunque $\alpha_2$ (eventualmente $= \alpha_1$) l'arco consecutivo ad $\alpha_1$ su $F_j$, il continuo $F_{j,i}$ compreso fra i due contiene (n. **10**) almeno un punto di $P_1$; punto che, essendo $F_{j,i} \subset G_1$, appartiene a $G_1$.

In conseguenza di ciò, interessa rilevare che per il numero dei componenti di $G^*$ si ha:

$$c[G^*] \leqslant \begin{cases} N_1 + 1 & \text{se è} \quad \nu \neq 0, \\ N_1 & \text{se è} \quad \nu = 0. \end{cases}$$

Allo scopo di giovarci della formula di STRASZEWICZ per i due insiemi chiusi $\alpha$, $G^*$, osserviamo che si ha:

$c[\alpha] = 1$, $c[\mathcal{E} - \alpha] = 2$, evidentemente;

$c[\alpha + G^*] = 1$ poichè in questo Caso B ogni componente di $G^*$ ha punti su $\alpha$;

$c[\mathcal{E} - (\alpha + G^*)] = r + 1$, essendo $\mathcal{E} - (\alpha + G^*) = (\mathcal{E} - \bar{C}_\alpha) + (R - G) =$
$= (\mathcal{E} - \bar{C}_\alpha) + \sum_1^r {}_j\, C_j$;

$\boldsymbol{c}[\alpha \cdot G^*] = \mu$, essendo $\alpha \cdot G^* = \alpha \cdot G$;

$\boldsymbol{c}[\mathcal{E} - \alpha \cdot G^*] = 1$, essendo $\alpha \cdot G^* \subsetneqq \alpha$;

$\boldsymbol{c}[\mathcal{E} - G^*] = 1$, essendo $\mathcal{E} - G^* = \sum_1^r{}_j\, C_j + (\alpha - G) + (\mathcal{E} - \bar{C}_\alpha)$

ed avendo ogni regione $C_j$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ un arco di $\alpha - G$ alla frontiera.

Con tali valori, la formula di STRASZEWICZ dà

$$r = \mu - \boldsymbol{c}[G^*] + 1 .$$

Tenendo presente la maggiorazione ottenuta per $\boldsymbol{c}[G^*]$ e ricordando che è $\mu \geqslant n + \nu$, si ha

$$\text{se è } \nu = 0: \qquad \mu \geqslant n, \qquad \boldsymbol{c}[G^*] \leqslant N_1;$$

$$\text{se è } \nu < 0: \qquad \mu \geqslant n + 1, \qquad \boldsymbol{c}[G^*] \leqslant N_1 + 1 .$$

In ambedue i casi quindi è

$$r \geqslant n - N_1 + 1 .$$

**15.** – Sostituiamo ora alla considerazione delle regioni $C_j$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ quella delle regioni approssimanti ${}^{(\varepsilon)}C_j$ limitate dalle curve semplici chiuse ${}^{(\varepsilon)}\eta_j$, esattamente come nel Caso A; intendiamo ancora con ${}^{(\varepsilon)}\Phi_j$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ la restrizione della $\Phi$ a ${}^{(\varepsilon)}C_j$. Avendosi allora

$$\operatorname{ind}(\Phi({}^{(\varepsilon)}\eta_j);\, P'_{2,\ldots,k}) = n_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, r)$$

ed osservando che l'insieme $P'_{2,\ldots,k}$ è contenuto in un unico componente di $\mathcal{E}' - {}^{(\varepsilon)}\Phi_j({}^{(\varepsilon)}\eta_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ siamo in grado di applicare a ciascuna delle trasformazioni ristrette il Teorema I (§ **2**), ossia di stabilire le disuguaglianze

$$\boldsymbol{N}[{}^{(\varepsilon)}\Phi_j^{-1}(P'_{2,\ldots,k})] = \boldsymbol{N}[P_{2,\ldots,k} \cdot {}^{(\varepsilon)}C_j] \geqslant (k-2)n_j + 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, r).$$

Ne segue

$$\boldsymbol{N}[P] = N_1 + \boldsymbol{N}[P_{2,\ldots,k}] \geqslant N_1 + \sum_1^r{}_j\, \boldsymbol{N}[P_{2,\ldots,k} \cdot {}^{(\varepsilon)}C_j] \geqslant$$

$$\geqslant N_1 + (k-2) \sum_1^r{}_j\, n_j + r \geqslant N_1 + (k-2)n + (n - N_1 + 1) = (k-1)n + 1 ,$$

e con ciò il Teorema resta dimostrato.