Rivista Mat. Univ. Parma 6, 3-35 (1955)

ROBERTO CONTI (*)

Sulla stabilità dei sistemi di equazioni differenziali lineari. (**)

1. - Preliminari.

È noto che affinchè un sistema lineare omogeneo (1)

$$\dot{y} = A(t)\, y \tag{A}$$

sia stabile, secondo LIAPUNOV (2), è necessario e sufficiente che esista una

---

(*) Istituto Matematico U. DINI, Università, Firenze, Italia.

(**) Ricevuto il 12-IV-1955.

(1) In tutto il seguito useremo le notazioni del Calcolo delle matrici, particolarmente adatte per lo studio dei sistemi lineari (cfr., ad esempio, G. SANSONE [**18**], V. V. NEMYTZKIĬ - V. V. STEPANOV [**16**], R. BELLMAN [**4**]).

Indicheremo con $A(t)$ una matrice $n \cdot n$ e con elementi $a_{i,k}(t)$ funzioni reali o complesse della variabile reale t, definite per $t \geqslant 0$, con $y(t)$ una « matrice-colonna » o « vettore » (verticale) di n elementi $y_1(t), \ldots, y_n(t)$, con $\dot{y} = dy/dt$ la matrice-colonna di elementi $\dot{y}_1(t) = dy_1/dt, \ldots, \dot{y}_n(t) = dy_n/dt$.

La $A(t)$, matrice del sistema (A), è supposta misurabile e sommabile in ogni intervallo finito della t ($t > 0$), salvo altre ipotesi che verranno poste di volta in volta.

La scrittura $\|A(t)\|$ sta per $\sum_{i,k} |a_{i,k}(t)|$ e la scrittura $\|y(t)\|$ sta per $\sum_i |y_i(t)|$.

Con A_{-1} indicheremo la matrice trasposta della A, con A^{-1} l'inversa, con $\bar{A}$ la complessa coniugata, con $\operatorname{tr} A$ la traccia di A, con $\det A$ il suo determinante.

(2) Ricordiamo che una soluzione $\bar{y} = \bar{y}(t)$ di (A) [o più in generale di un sistema

$$y = f(t, y), \tag{S}$$

con $f(t, y)$ « matrice-colonna » funzione nota di t e della y] si dice *stabile, secondo L i a p u n o v, per $t \to +\infty$*, se, per ogni coppia di numeri $t_0 \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$ prefissati, esiste un costante $c_1 > 0$ tale che sia

$$\| Y(t) \| \leqslant c_1, \qquad 0 \leqslant t, \tag{1}$$

dove $Y(t)$ rappresenta la «matrice fondamentale principale» di (A), definita da

$$\dot{Y}(t) = A(t)\, Y(t), \qquad Y(0) = I$$

(I matrice unità $n \cdot n$), ovvero da

$$Y(t) = I + \int_0^t A(\tau) Y(\tau)\, d\tau.$$

L'esistenza di una costante $c_2 > 0$ tale che sia

$$\| Y^{-1}(t) \| \leqslant c_2, \qquad 0 \leqslant t, \tag{2}$$

equivale invece alla stabilità del sistema

$$\dot{y} = - \bar{A}_{-1}(t)\, y, \tag{A*}$$

aggiunto del sistema (A).

Qualora le (1), (2) valgano contemporaneamente si potrà dire che il sistema (A) è stabile in senso stretto ([3]) od anche che esso gode della stabilità ristretta.

---

numero $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ in modo che se per un'altra soluzione $y = y(t)$ di (A) [in generale di (S)] si ha

$$\| y(t_0) - \bar{y}(t_0) \| \leqslant \delta$$

si abbia anche

$$\| y(t) - y(t) \| \leqslant \varepsilon, \qquad t_0 \leqslant t.$$

Per i sistemi lineari (omogenei o no) la stabilità di una soluzione implica la stabilità di tutte le soluzioni ed allora si può anche dire che *è stabile il sistema*.

([3]) Seguendo G. Ascoli [**2**]. Nel n. **3** osserveremo che i sistemi stabili in senso stretto si identificano con quelli «riducibili a zero».

Le (1) e la (2) si possono evidentemente riunire nell'unica disuguaglianza

$$\| Y(t)\, Y^{-1}(\tau) \| \leqslant c_3, \qquad 0 \leqslant t,\ 0 \leqslant \tau,$$

dove c_3 è una costante positiva.

Quando in luogo di questa è soddisfatta la più debole disuguaglianza

$$(3) \qquad \| Y(t) Y^{-1}(\tau) \| \leqslant c_3, \qquad 0 \leqslant \tau \leqslant t,$$

allora il sistema (A) risulta uniformemente stabile, e inversamente [4].

La stabilità uniforme è dunque intermedia tra la stabilità e la stabilità ristretta.

In questo lavoro ci proponiamo di perfezionare alcuni criteri già noti di stabilità, mostrando come in effetti gli stessi assicurino la stabilità uniforme (cfr. Teoremi 1′ e 8, Teorema 7′, Teorema 9), di dare alcuni criteri di stabilità ristretta (cfr. Teorema 2′, Teoremi 3 e 3′, Teorema 4, Teorema 5, Teoremi 6 e 6′, Teorema 10 e 10′, Teorema 11) ed infine di coordinare e, in certo modo, di classificare questi diversi criteri in base al tipo di stabilità che essi assicurano.

Concludono il lavoro (n. **8**) alcune osservazioni relative alla stabilità nei sistemi non omogenei.

---

[4] Nella definizione di stabilità richiamata nella precedente annotazione [2] il numero δ è funzione della ε e della t_0. Se si può determinare un $\delta > 0$, dipendente dalla sola ε, in modo che per tutte le soluzioni $y(t)$ per le quali si ha, per un certo t_0,

$$\| y(t_0) - \bar{y}(t_0) \| \leqslant \delta$$

si abbia anche

$$\| y(t) - \bar{y}(t) \| \leqslant \varepsilon, \qquad t_0 \leqslant t,$$

allora la soluzione $y(t)$ si dice *uniformemente stabile, secondo Liapunov, per* $t \to +\infty$.

Si verifica che se è uniformemente stabile una soluzione di un sistema lineare (omogeneo o no) tali risultano tutte le soluzioni, cosicchè è lecito parlare di *sistemi lineari uniformemente stabili.*

2. – Un criterio di L. Cesari.

L. CESARI ha provato il seguente (5)

Teorema 1. *Se la matrice* $A(t)$ *è tale che*

i) *le radici caratteristiche di* $A(t)$ *hanno, per* $0 \leqslant t$, *parte reale* $\leqslant 0$;

ii) *la* $A(t)$ *è a variazione limitata in* $(0, +\infty)$;

iii) *tra le radici caratteristiche della matrice costante* (6)

$$A(+\infty) \equiv \lim_{t \to +\infty} A(t)$$

quelle con parte reale nulla sono semplici;

allora il sistema

$$\dot{y} = A(t)\, y \tag{A}$$

è stabile.

Vogliamo provare il

Teorema 1'. *Nelle ipotesi del Teorema* 1 *il sistema* (A) *è uniformemente stabile.*

Anzitutto, se $A(t)$ soddisfa le ipotesi sopra indicate si può costruire (7) una matrice $\Omega(t)$, limitata per $t \geqslant 0$ insieme con la propria inversa $\Omega^{-1}(t)$, a variazione limitata in $(0, +\infty)$ e tale che la matrice $\Omega^{-1}(t)\, A(t)\, \Omega(t)$ abbia la forma

$$\Omega^{-1}(t)\, A(t)\, \Omega(t) = \left[\begin{array}{ccc|cccc} \varrho_1(t) & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & \varrho_p(t) & & & & \\ \hline & & & \varrho_{p+1}(+\infty) & d_{p+1,\,p+2}(t) & \dots & d_{p+1,\,n}(t) \\ & 0 & & & \varrho_{p+2}(+\infty) & \dots & d_{p+2,\,n}(t) \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \varrho_n(+\infty) \end{array}\right].$$

(5) Cfr. L. CESARI [**9**], Teorema IV. L'enunciato di tale Teorema IV è alquanto più generale di quello qui riportato, poichè là si suppone che la $A(t)$ sia somma di una $A_1(t)$ avente le proprietà i), ii), iii) del testo e di una $A_2(t)$ assolutamente integrabile nell'intervaloo $(0, +\infty)$. Tuttavia nel n. **6** mostreremo (Teorema 8) che anche in queste ipotesi si deduce la stabilità uniforme del sistema (A) anzichè la semplice stabilità.

(6) L'esistenza del limite $A(+\infty)$ discende dalla ipotesi ii), dalla quale si ha pure che anche le radici caratteristiche di $A(+\infty)$, limiti di quelle di $A(t)$ per $t \to +\infty$, hanno tutte parte reale $\leqslant 0$.

(7) Cfr. L. CESARI [**9**], pp. 171-176, p. 181.

In questa matrice le $\varrho_1(t), \ldots, \varrho_p(t)$ sono le radici caratteristiche di $A(t)$ che per $t \to +\infty$ tendono verso le radici caratteristiche di $A(+\infty)$ aventi parte reale nulla, le $\varrho_{p+1}(+\infty), \ldots, \varrho_n(+\infty)$ sono le radici caratteristiche di $A(+\infty)$ aventi parte reale negativa, ed infine le $d_{r,s}(t)$ sono funzioni a variazione limitata in $(0, +\infty)$.

È pure possibile costruire una successione $\{D^{(m)}(t)\}$ di matrici

$$D^{(m)}(t) = \left\| \begin{array}{ccc:cccc} \varrho_1^{(m)}(t) & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & \varrho_p^{(m)}(t) & & & & \\ \hdashline & & & \varrho_{p+1}(+\infty) & d^{(m)}_{p+1,p+2}(t) & \ldots & d^{(m)}_{p+1,n}(t) \\ & 0 & & & \varrho_{p+2}(+\infty) & \ldots & d^{(m)}_{p+2,n}(t) \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \varrho_n(+\infty) \end{array} \right\|$$

con le seguenti proprietà [9]:

a) le funzioni $\varrho_i^{(m)}(t)$, $d_{r,s}^{(m)}(t)$ sono assolutamente continue in $(0, +\infty)$;

b) $\lim\limits_{t\to+\infty} \varrho_i^{(m)}(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \varrho_i(t)$, $\quad \lim\limits_{t\to+\infty} d_{r,s}^{(m)}(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} d_{r,s}(t)$;

c) $R\varrho_i^{(m)}(t) \leqslant 0 \quad (m = 1, 2, \ldots; \; i = 1, 2, \ldots, p)$;

d) nei punti in cui le $\varrho_i(t)$ e, rispettivamente, le $d_{r,s}(t)$ sono continue è

$$\lim_{m\to\infty} \varrho_i^{(m)}(t) = \varrho_i(t), \qquad \lim_{m\to\infty} d_{r,s}^{(m)}(t) = d_{r,s}(t);$$

e) l'integrale

$$\int_{t'}^{t''} |\dot{d}_{r,s}^{(m)}(\tau)| \, d\tau$$

non supera la variazione totale di $d_{r,s}(t)$ in (t', t''), comunque si prendano $t' \leqslant t''$.

---

(9) Cfr. L. Cesari [9], p. 180 e seguenti.

Segue da questa proprietà che le $d_{r,s}^{(m)}(t)$ sono limitate in $(0, +\infty)$ uniformemente rispetto ad m; infatti abbiamo

$$d_{r,s}^{(m)}(t) = d_{r,s}^{(m)}(\bar{t}) + \int_{\bar{t}}^{t} \dot{d}_{r,s}^{(m)}(\tau)\, d\tau$$

ossia, per la e),

$$| d_{r,s}^{(m)}(t) | \leqslant | d_{r,s}^{(m)}(\bar{t}) | + \{ \text{variazione totale di } d_{r,s}(t) \text{ in } (0, +\infty) \},$$

e prendendo per $\bar{t}$ un punto in cui valgano le d) si conclude che esiste un numero $d \geqslant 0$ tale che sia

$$(4) \qquad | d_{r,s}^{(m)}(t) | \leqslant d \qquad (0 \leqslant t;\ m = 1, 2, \ldots).$$

Segue di qui che se $u^{(m)}(t)$ è una qualunque soluzione del sistema

$$(\mathrm{A}') \qquad \dot{u}^{(m)} = D^{(m)}(t)\, u^{(m)}$$

esiste un numero $L_1 > 0$ dipendente unicamente dalle $d_{r,s}(t)$ e dalle $\varrho_i(+\infty)$ in modo che qualunque sia la coppia t_0, t, con $t_0 \leqslant t$, si abbia

$$(5) \qquad \| u^{(m)}(t) \| \leqslant L_1 \| u^{(m)}(t) \| \qquad (t_0 \leqslant t;\ m = 1, 2, \ldots).$$

Infatti, avendo presente la forma delle matrici $D^{(m)}(t)$ ed essendo $R\, \varrho_i^{(m)}(t) \leqslant 0$, si ha intanto per le prime p equazioni del sistema (A′)

$$| u_i^{(m)}(t) | \leqslant e^{R \int_{t_0}^{t} \varrho_i^{(m)}(\tau)\, d\tau} | u_i^{(m)}(t_0) | \leqslant | u_i^{(m)}(t_0) | \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Quanto alle rimanenti $n - p$ equazioni si osservi che esiste un numero $a^2 > 0$ tale che

$$R\, \varrho_i(+\infty) \leqslant -a^2 < 0 \qquad (i = p+1, p+2, \ldots, n),$$

ed allora per la n-ma equazione di (A′) sarà

$$| u_n^{(m)}(t) | \leqslant e^{-a^2 \cdot (t - t_0)} | u_n^{(m)}(t_0) |.$$

Passando alla $(n-1)$-ma equazione, poichè è

$$u_{n-1}^{(m)}(t) = u_{n-1}^{(m)}(t_0)\, e^{\varrho_{n-1}(+\infty)\cdot(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{\varrho_{n-1}(+\infty)\cdot(t-\tau)}\, d_{n-1,n}^{(m)}(\tau)\, u_n^{(m)}(\tau)\, \mathrm{d}\tau,$$

avremo, per la (4),

$$|\, u_{n-1}^{(m)}(t)\,| \leqslant |\, u_{n-1}^{(m)}(t_0)\,|\, e^{-a^2\cdot(t-t_0)} + |u_n^{(m)}(t_0)|\, e^{-a^2\cdot(t-t_0)} d\cdot(t-t_0)\,.$$

Si può così risalire fino alla $(p+1)$-ma equazione, sempre tenendo conto della (4), ed otterremo che ogni $|\, u_i^{(m)}(t)\,|$ $(i = p+1,\ p+2,\ \ldots,\ n)$ è maggiorata da somme di cui il termine generico ha la forma

$$e^{-a^2\cdot(t-t_0)} P_s(t,\ t_0),$$

dove ogni $P_s(t,\ t_0)$ è un polinomio in $t-t_0$ a coefficienti dipendenti soltanto dalle $d_{r,s}(t)$. Di qui la (5).

Da questa segue poi che se $U^{(m)}(t)$ è la matrice fondamentale principale del sistema (A′) si ha

$$(6) \qquad \|\, U^{(m)}(t)\, U^{(m)-1}(t_0)\,\| \leqslant n\mathrm{L}_1 \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots)$$

per ogni coppia t_0, t, con $0 \leqslant t_0 \leqslant t$ (9).

Riprendiamo ora a considerare la matrice $\Omega(t)$ introdotta all'inizio della dimostrazione; tale matrice è, come si è detto, limitata per $t \geqslant 0$, a variazione limitata in $(0,\ +\infty)$; lo stesso è della sua inversa (10).

---

(9) Basta ricordare che per ogni soluzione $u^{(m)}(t)$ di (A′) è

$$u^{(m)}(t) = U^{(m)}(t)\, U^{(m)-1}(t_0)\, u^{(m)}(t_0)$$

e quindi, per la (5),

$$\|\, U^{(m)}(t)\, U^{(m)-1}(t_0)\, u^{(m)}(t_0)\,\| \leqslant L_1\, \|\, u^{(m)}(t_0)\,\|.$$

Prendendo come vettore $u^{(m)}(t_0)$ ciascuna delle colonne della matrice unità I, segue l'asserto.

(10) Cfr. L. CESARI [**9**], p. 173, p. 161.

Possiamo allora costruire una successione di matrici $\{ \Omega^{(m)}(t) \}$ aventi le proprietà (11):

a′) le $\Omega^{(m)}(t)$ e le $\Omega^{(m)-1}(t)$ sono assolutamente continue in $(0, +\infty)$;

b′) $\lim_{t\to+\infty} \Omega^{(m)}(t) = \lim_{t\to+\infty} \Omega(t), \qquad \lim_{t\to+\infty} \Omega^{(m)-1}(t) = \lim_{t\to+\infty} \Omega^{-1}(t)$;

d′) nei punti in cui $\Omega(t)$ e, rispettivamente, $\Omega^{-1}(t)$ è continua si ha

$$\lim_{m\to\infty} \Omega^{(m)}(t) = \Omega(t), \qquad \lim_{m\to\infty} \Omega^{(m)-1}(t) = \Omega^{-1}(t);$$

e′) gli integrali

$$\int_{t'}^{t''} \| \dot{\Omega}^{(m)}(\tau) \| \, d\tau$$

non superano la variazione totale di $\Omega(t)$ in (t', t''), qualunque sia la coppia t', t'', con $t' \leqslant t''$.

Segue, nel modo già visto a proposito delle $d^{(m)}_{r,s}(t)$ che esiste una costante $\omega > 0$ tale che si ha

$$\text{(7)} \qquad \| \Omega^{(m)}(t) \| \leqslant \omega, \qquad \| \Omega^{(m)-1}(t) \| \leqslant \omega, \qquad (0 \leqslant t;\ m = 1, 2, \ldots).$$

Consideriamo allora, per ogni m, il sistema

$$\text{(A}''\text{)} \qquad \dot{z}^{(m)} = D^{(m)}(t)\, z^{(m)} - \Omega^{(m)-1}(t)\, \dot{\Omega}^{(m)}(t)\, z^{(m)}.$$

Esiste un numero $L_2 > 0$ dipendente unicamente dal massimo modulo delle $d_{r,s}(t)$, dalle $\varrho_i(+\infty)$ e dalla $\Omega(t)$, tale che per ogni soluzione $z^{(m)}(t)$ di (A″) si ha

$$\text{(8)} \qquad \| z^{(m)}(t) \| \leqslant L_2 \| z^{(m)}(t_0) \| \qquad (t_0 \leqslant t; \quad m = 1, 2, \ldots),$$

qualunque sia la coppia t_0, t, con $0 \leqslant t_0 \leqslant t$.

Infatti, considerando il sistema (A′) come il sistema « omogeneo » corrispondente ad (A″) si ha la nota formula (di LAGRANGE) (12)

$$z^{(m)}(t) = U^{(m)}(t)\, U^{(m)-1}(t_0)\, z^{(m)}(t_0) - \int_{t_0}^{t} U^{(m)}(t)\, U^{(m)-1}(\tau)\, \Omega^{(m)-1}(\tau)\, \dot{\Omega}^{(m)}(\tau)\, z^{(m)}(\tau)\, d\tau,$$

(11) Cfr. L. CESARI [**9**], p. 160.
(12) Cfr., ad esempio, R. BELLMAN [**4**], p. 12.

dalla quale, avendo presenti la (6) e la (7) si ricava, se $t_0 \leqslant t$,

$$\| z^{(m)}(t) \| \leqslant nL_1 \| z^{(m)}(t_0) \| + nL_1\omega \int_{t_0}^{t} \| \dot{\Omega}^{(m)}(\tau) \| \| z^{(m)}(\tau) \| \, d\tau .$$

Applicando il cosiddetto «lemma di GRONWALL, generalizzato» ([13]), segue

$$\| z^{(m)}(t) \| \leqslant nL_1 \, e^{nL_1\omega \int_{t_0}^{t} \|\dot{\Omega}^{(m)}(\tau)\| d\tau} \| z^{(m)}(t_0) \| \leqslant nL_1 \, e^{nL_1\omega \int_{0}^{+\infty} \|\dot{\Omega}^{(m)}(\tau)\| d\tau} \| z^{(m)}(t_0) \|$$

e, in virtù della proprietà e') delle matrici $\Omega^{(m)}(t)$, otteniamo la (8).

Da questa si ricava poi subito che, se $Z^{(m)}(t)$ è la matrice fondamentale principale del sistema (A''), si ha

$$\text{(9)} \qquad \| Z^{(m)}(t) \, Z^{(m)-1}(t_0) \| \leqslant nL_2 \qquad (0 \leqslant t_0 \leqslant t; \; m = 1, 2, \ldots) .$$

Consideriamo ora, per ogni intero m, la trasformazione lineare

$$y = \Omega^{(m)}(t) \, z .$$

Poichè $\Omega^{(m)}(t)$ è assolutamente continua, se si applica questa trasformazione ad una $z^{(m)}(t)$ soluzione di (A'') otterremo una $y^{(m)}(t)$ soluzione del sistema

$$\text{(A''')} \qquad \dot{y}^{(m)} = \Omega^{(m)}(t) \, D^{(m)}(t) \, \Omega^{(m)-1}(t) \, y^{(m)} .$$

Detta $Y^{(m)}(t)$ la matrice fondamentale principale di questo sistema, avremo

$$Y^{(m)}(t) \, Y^{(m)-1}(t) = \Omega^{(m)}(t) \, Z^{(m)}(t) \, Z^{(m)-1}(t_0) \, \Omega^{(m)-1}(t_0) ,$$

e tenuto conto di (7) e di (9) segue

$$\| Y^{(m)}(t) \, Y^{(m)-1}(t_0) \| \leqslant nL_2 \, \omega^2 \qquad (0 \leqslant t_0 + t; \quad m = 1, 2, \ldots) ,$$

il che significa che tutti i sistemi (A''') sono uniformemente stabili ugualmente rispetto ad m. Ossia, fissato $\varepsilon > 0$ si può determinare un altro numero $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, indipendente da m, tale che se η è un vettore

$$\| \eta \| \leqslant \delta$$

([13]) Cfr., ad esempio, R. BELLMAN [4], p. 35.

si ha

$$\| y^{(m)}(t) \| \leqslant \varepsilon \qquad (t_0 \leqslant t;\ m = 1, 2, \ldots), \tag{10}$$

purchè sia $\| y^{(m)}(t_0) \| = \eta$ per un certo $t_0 \geqslant 0$.

D'altronde, se $y(t)$ è la soluzione del sistema (A) tale che per un certo t_0 è

$$y(t_0) = \eta,$$

si ha [14]

$$\lim_{m \to \infty} y^{(m)}(t) = y(t) \qquad (t_0 \leqslant t)$$

e dalla (10) segue

$$\| y(t) \| \leqslant \varepsilon \qquad (t_0 \leqslant t),$$

cioè la soluzione nulla di (A) [e quindi (A)] è uniformemente stabile.

3. – Stabilità e sistemi riducibili.

a) Se la matrice $A(t)$ è costante allora non vi è più distinzione tra sistemi stabili ed uniformemente stabili, poichè in tal caso vale la relazione

$$Y(t)\, Y^{-1}(t) = Y(t - \tau)$$

e la limitatezza della $Y(t)$ per $0 \leqslant t$ equivale a quella della $Y(t)\, Y^{-1}(\tau)$ per $0 \leqslant \tau \leqslant t$ [15].

La stabilità coincide con la stabilità uniforme anche nel caso più generale dei sistemi (A) con matrice $A(t)$ periodica, vale a dire soddisfacente la

$$A(t + T) = A(t), \qquad 0 \leqslant t,$$

---

(14) Cfr. L. Cesari [9], p. 182.

(15) Ricordiamo che la condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema (A) a matrice $A(t)$ costante sia (uniformemente) stabile, è che le radici caratteristiche della $A(t)$ abbiano tutte parte reale non positiva e che inoltre quelle con parte reale nulla corrispondano a divisori elementari lineari.

per qualche numero $T > 0$. In tal caso infatti per un noto teorema di LIAPUNOV la $Y(t)$ è rappresentabile nella forma

$$Y(t) = P(t)\, e^{Ct}$$

con $P(t)$ matrice periodica, limitata insieme con la propria inversa, e con C matrice costante: perciò

$$Y(t)\, Y^{-1}(t) = P(t)\, e^{C \cdot (t-\tau)} P^{-1}(\tau).$$

Ancor più in generale la stabilità è sempre stabilità uniforme per i sistemi (A) che sono riducibili, per quei sistemi cioè per i quali esiste una matrice $L(t)$, limitata per $0 \leqslant t$ insieme con la propria inversa $L^{-1}(t)$, dotata di derivata $\dot{L}(t)$ e tale che sia

$$L^{-1}(t) A(t) L(t) - L^{-1}(t) \dot{L}(t) = \text{matrice costante.}$$

Se una tale matrice $L(t)$ (matrice di LIAPUNOV) esiste, allora la trasformazione

$$y = L(t)\, z$$

riduce il sistema (A) ad un sistema con matrice costante ([16]).

Affinchè un sistema (A) sia riducibile è necessario e sufficiente ([17]) che la $Y(t)$ si possa rappresentare nella forma

$$Y(t) = K(t)\, e^{Ct},$$

con C matrice costante e con $K(t)$ limitata per $0 \leqslant t$, insieme con la inversa $K^{-1}(t)$.

Segue che se $Y(t)$ è limitata per $0 \leqslant t$, tale deve risultare e^{Ct} e quindi anche $e^{C \cdot (t-\tau)}$ sarà limitata per $0 \leqslant \tau \leqslant t$; perciò la stabilità equivale, se (A) è un sistema riducibile, all'uniforme stabilità.

([16]) L'originaria definizione di LIAPUNOV (cfr. [**15**], p. 241) richiede che anche $\dot{L}(t)$ sia, come $L(t)$ e come $L^{-1}(t)$, continua e limitata, ma questo requisito è stato poi abbandonato negli ulteriori sviluppi della teoria della riducibilità. (Cfr. N. P. ERUGHIN [**13**]; V. V. NEMYTZKIĬ-V. V. STEPANOV [**16**], p. 176.)

([17]) Cfr. N. P. ERUGHIN [**13**]; V. V. NEMYTZKIĬ - V. V. STEPANOV [**16**], p. 177.

b) Se esiste una matrice $L(t)$ di Liapunov tale che sia

$$L^{-1}(t)\, A(t)\, L(t) - L^{-1}(t)\, \dot{L}(t) = \text{matrice nulla},$$

la trasformazione $y = L(t)\, z$ riduce il sistema (A) al sistema

$$\dot{z} = 0$$

e potremo dire in tal caso che (A) è « riducibile a zero ».

Ora *è facile riconoscere che i sistemi* (A) *« riducibili a zero » sono tutti e soli quelli stabili in senso stretto* (n. **1**).

Sia infatti (A) stabile in senso stretto; effettuando la trasformazione

$$y = Y(t)\, z$$

esso si muta in

$$Y(t)\, \dot{z} = 0$$

cioè, poichè $\det Y(t) \neq 0$, in

$$\dot{z} = 0.$$

D'altronde $Y(t)$ è limitata per $0 \leqslant t$, insieme con $Y^{-1}(t)$ per ipotesi (cfr. n. **1**) ed esiste $\dot{Y}(t)$ [18], quindi la $Y(t)$ è una matrice di Liapunov.

Inversamente, se $L(t)$ è una matrice di Liapunov per (A), è per ipotesi

$$L^{-1}(t)\, A(t)\, L(t) - L^{-1}(t)\, \dot{L}(t) = \text{matrice nulla},$$

ossia

$$\dot{L}(t) = A(t)\, L(t).$$

Dunque (A) ammette una matrice fondamentale $L(t)$ limitata per $0 \leqslant t$ insieme con l'inversa $L^{-1}(t)$ e quindi esso è stabile in senso stretto, poichè sarà

$$Y(t) = L(t)\, L^{-1}(t_0), \qquad Y^{-1}(t) = L(t_0)\, L^{-1}(t).$$

c) Nei due nn. successivi esamineremo alcuni criteri di stabilità ristretta.

---

[18] Va osservato che nelle ipotesi da noi adottate sulla $A(t)$ la $Y(t)$ risulta in generale soltanto assolutamente continua e quindi la derivata $\dot{Y}(t)$ può mancare in un insieme di punti di misura nulla.

4. – Alcuni criteri di stabilità in senso stretto.

a) Se il sistema (A) è stabile, gli elementi della $Y(t)$ sono limitati per $0 \leqslant t$ (cfr. n. **1**); lo stesso accadrà per quelli della $Y^{-1}(t)$ non appena per $0 \leqslant t$ risulti limitata la funzione $1/\{\det Y(t)\}$; per la formula di JACOBI

$$\det Y(t) = e^{R\int_0^t \operatorname{tr} A(\tau)\, d\tau}$$

segue il noto [19]

Teorema 2. *Condizione sufficiente perchè il sistema*

$$\text{(A)} \qquad \dot{y} = A(t)\, y$$

sia stabile in senso stretto è che esso sia stabile ed inoltre sia

$$R\int_0^t \operatorname{tr} A(\tau)\, d\tau \geqslant d > -\infty, \qquad 0 \leqslant t.$$

Possiamo osservare, partendo dal sistema aggiunto di (A), che sussiste un risultato « simmetrico » e « duale », precisamente vale il

Teorema 2′. *Condizione sufficiente perchè il sistema*

$$\text{(A)} \qquad \dot{y} = A(t)\, y$$

sia stabile in senso stretto è che sia stabile il sistema aggiunto

$$\text{(A}'\text{)} \qquad \dot{z} = -\bar{A}_{-1}(t)\, z$$

ed inoltre sia

$$R\int_0^t \operatorname{tr} A(\tau)\, d\tau \leqslant d < +\infty, \qquad 0 \leqslant t.$$

---

(19) Cfr., ad esempio, V. V. NEMYTZKIĬ - V. V. STEPANOV [**16**], p. 178. Segue anche, dal Teorema 2, che se $A(t)$ è una matrice costante, il sistema (A) è stabile in senso stretto se tutte le radici caratteristiche della $A(t)$ sono immaginarie pure e ciascuna corrisponde a divisori elementari lineari; questa condizione è anche necessaria.

Basta notare che è

$$R\,\mathrm{tr}\,\{-\bar{A}_{-1}(\tau)\} = -R\,\mathrm{tr}A(\tau).$$

b) Dal Teorema 2 possiamo ricavare un criterio di stabilità ristretta nel seguente modo.

Nell'equazione

$$Y(t) = I + \int^{t} A(\tau)Y(\tau)\,d\tau, \tag{11}$$

che definisce la $Y(t)$ (cfr. n. **1**), eseguiamo una integrazione per parti.

Tenendo conto del fatto che è $\dot{Y} = A(t)Y$ e posto

$$\mathcal{A}(t) = \int_0^t A(\theta)\,d\theta,$$

avremo

$$Y(t) = I + \mathcal{A}(t)Y(t) - \int_0^t \mathcal{A}(\tau)\,A(\tau)\,Y(\tau)\,d\tau.$$

Di qui, per la (11),

$$Y(t) = I + \mathcal{A}(t) + \mathcal{A}(t)\int_0^t A(\tau)Y(\tau)\,d\tau - \int_0^t \mathcal{A}(\tau)\,A(\tau)Y(\tau)\,d\tau.$$

ossia

$$Y(\tau) = I + \mathcal{A}(t) + \int_0^t [\mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(\tau)]A(\tau)Y(\tau)\,d\tau. \tag{12}$$

Supposto che esistano due costanti

$$k_1 \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant k_2 < 1$$

tali che sia

$$\|\mathcal{A}(t)\| \leqslant k_1, \qquad 0 \leqslant t,$$

$$\int_0^t \|\{\mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(\tau)\}A(\tau)\|\,d\tau \leqslant k_2, \qquad 0 \leqslant t,$$

sia $\bar{t}$ un valore di τ tra zero e t tale che

$$\| Y(\bar{t}) \| = \max_{0 \leq \tau \leq t} \| Y(\tau) \|.$$

Avremo allora

$$Y(\bar{t}) = I + \mathfrak{A}(\bar{t}) + \int_0^{\bar{t}} [\mathfrak{A}(\bar{t}) - \mathfrak{A}(\tau)] A(\tau) Y(\tau) \, d\tau,$$

e quindi

$$(1 - k_2) \| Y(\bar{t}) \| \leqslant n + k_1,$$

e a maggior ragione

$$\| Y(t) \| \leqslant (n + k_1)/(1 - k_2),$$

relazione che assicura la stabilità del sistema (A).

Per concludere basta notare che

$$| R \int_0^t \operatorname{tr} A(\tau) \, d\tau \, | \leqslant \| \int_0^t \operatorname{tr} A(\tau) \, d\tau \| \leqslant \| \mathfrak{A}(t) \| \leqslant k_1, \qquad 0 \leqslant t,$$

ed applicare il Teorema 2.

Essendo

$$\mathfrak{A}(t) - \mathfrak{A}(\tau) = \int_\tau^t A(\theta) \, d\theta,$$

possiamo enunciare il

Teorema 3. *Affinchè il sistema* (A) *sia stabile in senso stretto è sufficiente che esistano due costanti* $k_1 \geqslant 0$, $0 \leqslant k_2 < 1$ *tali che sia*

$$\| \int_{t_0}^t A(\theta) \, d\theta \| \leqslant k_1, \qquad 0 \leqslant t, \tag{13}$$

$$\int_0^t \| \{ \int_\tau^t A(\theta) \, d\theta \} A(\tau) \| \, d\tau \leqslant k_2 < 1, \qquad 0 \leqslant t \tag{14}$$ [20].

---

[20] Altri criteri si potrebbero dedurre operando una nuova integrazione per parti sulla (12) come si è fatto sulla (11), e così via, ma si ottengono in tal modo condizioni via via più complicate.

c) Se invece che alla $A(t)$ imponiamo alla $-\bar{A}_{-1}(t)$ le condizioni (13) e (14) otteniamo un criterio di stabilità ristretta per il sistema aggiunto

$$\text{(A*)} \qquad \dot{z} = -\bar{A}_{-1}(t)\, z$$

e quindi (cfr. n. 1) un altro criterio di stabilità ristretta per (A).

D'altronde è

$$\Big\| \int_0^t -A_{-1}(\theta)\, d\theta \Big\| = \Big\| \int_0^t A(\theta)\, d\theta \Big\|,$$

mentre

$$\Big\| \Big\{ \int_\tau^t -\bar{A}_{-1}(\theta)\, d\theta \Big\} \Big\{ -\bar{A}_{-1}(\tau) \Big\} d\tau \Big\| = \Big\| \Big\{ \int_\tau^t \bar{A}_{-1}(\theta)\, d\theta \Big\} \bar{A}_{-1}(\tau)\, d\tau \Big\| =$$

$$= \Big\| \Big[\bar{A}(\tau) \int_\tau^t \bar{A}(\theta)\, d\theta \Big]_{-1} \Big\| = \Big\| \bar{A}(\tau) \int_\tau^t \bar{A}(\theta)\, d\theta \Big\| = \Big\| A(\tau) \int_\tau^t A(\theta)\, d\theta \Big\|,$$

cosicchè abbiamo il

Teorema 3'. *Nell'enunciato del Teorema 3 la condizione* (14) *può essere sostituita con la condizione*

$$(14') \qquad \int_0^t \Big\| A(\tau) \int_\tau^t A(\theta)\, d\theta \Big\|\, d\tau \leqslant k_2' < 1, \qquad 0 \leqslant t \quad (^{21}).$$

d) Per giungere ad un altro criterio di stabilità ristretta, posto ancora, come in b),

$$\mathcal{A}(t) = \int_0^t A(\theta)\, d\theta,$$

moltiplichiamo per $e^{-\mathcal{A}(t)}$ ambo i membri della

$$\dot{Y} = A(t)\, Y.$$

---

[21] Si noti che, in generale, le due matrici $A(\tau)$ e $\int_\tau^t A(\theta)\, d\theta$ non sono permutabili.

Supposto che valga la relazione

$$(15) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{-\mathcal{A}(t)} = - e^{-\mathcal{A}(t)} A(t), \qquad 0 \leqslant t,$$

avremo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{ e^{-\mathcal{A}(t)} Y(t) \} = 0.$$

e, integrando tra 0 e t,

$$e^{-\mathcal{A}(t)} Y(t) = I,$$

da cui

$$(16) \qquad Y(t) = e^{\mathcal{A}(t)}, \qquad Y^{-1}(t) = e^{-\mathcal{A}(t)}.$$

Poichè per qualunque matrice C è

$$\| e^C \| \leqslant \| I \| + \| C \| / 1! + \| C \|^2/2! + \ldots = n - 1 + e^{\| C \|},$$

segue che se vale la (13) di b) la $Y(t)$ e la $Y^{-1}(t)$ risultano entrambe limitate.

Se la (15) valesse incondizionatamente, cioè per tutte le matrici $A(t)$, avremmo ottenuto una generalizzazione dei Teoremi 3 e 3′, eliminando dai medesimi le condizioni (14) e (14′), rispettivamente, ma ciò non è.

La (15) vale tuttavia se $A(t)$ è costante e, più in generale, se essa è permutabile con la matrice $\mathcal{A}(t) = \int_0^t A(\theta)\, \mathrm{d}\theta$ [22]. Possiamo pertanto enunciare il

Teorema 4. *Il sistema*

$$(\mathrm{A}) \qquad \dot{y} = A(t)\, y$$

è stabile in senso stretto se esiste una costante $k_1 \geqslant 0$ *tale che sia*

$$\left\| \int_0^t A(\theta)\, \mathrm{d}\theta \right\| \leqslant k_1, \qquad 0 \leqslant t,$$

---

[22] Le matrici permutabili con la propria derivata sono state oggetto negli ultimi anni di diversi studi di G. Ascoli [Univ. e Politecnico Torino, Rend. Sem. Mat. **9**, 245-250 (1949-1950); ibid. **11**, 335-336 (1951-1952)], H. Schwerdtfeger [Univ. e Politecnico Torino, Rend. Sem. Mat. **11**, 329-333 (1951-1952)], V. Amato [Matematiche, Catania **9**, 176-179 (1954)], A. Terracini [Ann. Mat. Pura Appl. (4) **40**, 99-112 (1955)].

e se inoltre è

$$A(t)\int_0^t A(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^t A(\theta)\,\mathrm{d}\theta\cdot A(t), \qquad 0 \leqslant t.$$

5. – Altri criteri di stabilità in senso stretto.

a) Associamo alla matrice $A(t)$ la matrice hermitiana

$$H(t) = (1/2)A(t) + (1/2)\bar{A}_{-1}(t),$$

e indichiamo, per ogni $t \geqslant 0$, con $\lambda(t)$ la più piccola, con $\Lambda(t)$ la più grande delle n radici caratteristiche (reali) di $H(t)$.

T. Wazewski ha provato [23] che ogni soluzione del sistema (A),

$$y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t)),$$

soddisfa la disuguaglianza

$$\sum_1^n{}_i \,|\, y_i(t_0)\,|^2\, e^{2\int_{t_0}^t \lambda(\tau)\,d\tau} \leqslant \sum_1^n{}_i \,|\, y_i(t)\,|^2 \leqslant \sum_1^n{}_i \,|\, y_i(t_0)\,|^2\, e^{2\int_{t_0}^t \Lambda(\tau)\,d\tau}. \tag{17}$$

Analogamente vale per ogni soluzione $z(t) = (z_1(t), \ldots, z_n(t))$ del sistema aggiunto (A*) la disuguaglianza

$$\sum_1^n{}_i \,|\, z_i(t_0)\,|^2\, e^{-2\int_{t_0}^t \Lambda(\tau)\,d\tau} \leqslant \sum_1^n{}_i \,|\, z_i(t)\,|^2 \leqslant \sum_1^n{}_i \,|\, z_i(t_0)\,|^2\, e^{-2\int_{t_0}^t \lambda(\tau)\,d\tau} \tag{17'}$$

che possiamo provare nel seguente modo.

Per ogni soluzione $z(t)$ di (A*) consideriamo la « matrice-riga » (o « vettore orizzontale »)

$$\bar{z}_{-1} = (\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n),$$

---

[23] Cfr. T. Wazewski [**20**].

dove $\bar{z}_i$ indica il numero complesso coniugato di z_i; da (A*) effettuando una trasposizione e passando ai coniugati abbiamo

$$\dot{\bar{z}}_{-1} = -\bar{z}_{-1}\, A(t).$$

Perciò se con $V(t)$ indichiamo il prodotto scalare

$$V(t) = \bar{z}_{-1}(t)\, z(t) = \sum_1^n{}_i \mid z_i(t) \mid^2$$

avremo

$$\dot{V}(t) = -\bar{z}_{-1} A(t)\, z - \bar{z}_{-1}\, \bar{A}_{-1}(t)\, z = -2\bar{z}_{-1}\, H(t)\, z$$

e quindi

$$\frac{\bar{z}_{-1}\, H(t)\, z}{\bar{z}_{-1}\, z} = -\frac{1}{2}\frac{\dot{V}(t)}{V(t)}.$$

D'altronde per ogni $t \geqslant 0$ si ha

$$\lambda(t) \leqslant \frac{\bar{z}_{-1}\, H(t)\, z}{\bar{z}_{-1}\, z} \leqslant \Lambda(t)$$

e quindi anche

$$-2\Lambda(t) \leqslant \dot{V}(t)/V(t) \leqslant -2\lambda(t) \tag{18}$$

e di qui integrando segue la (17′).

Dalle disuguaglianze (17) e (17′) segue immediatamente il

Teorema 5. *Affinchè il sistema* (A) *sia stabile in senso stretto è sufficiente che si abbiano le*

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \int_0^t \Lambda(\tau)\, d\tau < +\infty, \qquad \varliminf_{t\to+\infty} \int_0^t \lambda(\tau)\, d\tau > -\infty. \tag{19}$$

b) Il Teorema 5 dà luogo a notevoli Corollari.

Anzitutto le (19) sono soddisfatte se lo sono le

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \Lambda(\tau)\, d\tau = \int_0^{+\infty} \Lambda(\tau)\, d\tau < +\infty, \quad \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \lambda(\tau)\, d\tau = \int_0^{+\infty} \lambda(\tau)\, d\tau > -\infty, \tag{19'}$$

e in questo caso si prova facilmente (24) che per ogni soluzione $y(t)$ esiste finito il «limite in ampiezza».

$$\lim_{t\to+\infty} \sum_1^n {}_i \,|\, y_i(t) \,|^2.$$

Dalla (18) si ha che se valgono le (19') esiste finito anche il

$$\lim_{t\to+\infty} \sum_1^n {}_i \,|\, z_i(t) \,|^2$$

qualunque sia la soluzione $z(t)$ del sistema aggiunto (A*).

In secondo luogo si noti che avendosi (25)

$$-\| A(t) \| \leqslant -\| H(t) \| \leqslant \lambda(t) \leqslant \Lambda(t) \leqslant \| H(t) \| \leqslant \| A(t) \|,$$

segue che le (19') risultano sicuramente verificate se è

$$\int_0^{+\infty} \| H(\tau) \| \, d\tau < +\infty \tag{20}$$

(condizione di Z. BUTLEWSKI [**5**], A. ROSENBLATT [**17**]) e, *a fortiori*, se è

$$\int_0^{+\infty} \| A(\tau) \| \, d\tau < +\infty. \tag{21}$$

La (20) e la (21) sono quindi due condizioni atte ad assicurare non solo la stabilità, in senso stretto, ma anche l'esistenza dei «limiti in ampiezza», finiti, per tutte le soluzioni di (A) e dell'aggiunto.

La (20) è certamente verificata se $H(t)$ è la matrice nulla, vale a dire se (A) è un sistema autoaggiunto e in tale caso anzi è ben noto che

$$\sum_1^n {}_i \,|\, y_i(t) \,|^2, \qquad \sum_1^n {}_i \,|\, z_i(t) \,|^2$$

si mantengono costanti.

---

(24) Cfr. A. WINTNER [**22**].
(25) Cfr. T. WAZEWSKI [**20**].

Quanto alla (21), come richiameremo tra breve, essa assicura addirittura che esistono finiti i limiti

$$\lim_{t\to+\infty} y(t), \qquad \lim_{t\to+\infty} z(t)$$

per tutte le soluzioni $y(t)$ di (A) e $z(t)$ dell'aggiunto (A*).

c) Possiamo ora provare il seguente

Teorema 6. *Il sistema*

$$\text{(A)} \qquad \dot{y} = A(t)\, y$$

è stabile in senso stretto se la $A(t)$ è una matrice assolutamente continua in ogni intervallo finito della $t \geqslant 0$, se è limitata insieme con la inversa $A^{-1}(t)$ e se inoltre si ha

$$\text{(22)} \qquad \int_0^{+\infty} \| \dot{A}(\tau) + A^2(\tau) \| \, d\tau < +\infty.$$

Mediante la trasformazione

$$y = A^{-1}(t)\, z$$

il sistema (A) diventa [26] il sistema

$$\text{(B)} \qquad \dot{z} = B(t)\, z$$

con

$$B(t) = [\dot{A}(t) + A^2(t)] \cdot A^{-1}(t).$$

Poichè, in virtù della (22) e della limitatezza di $A^{-1}(t)$, è

$$\int_0^{+\infty} \| B(\tau) \| \, d\tau < +\infty,$$

([26]) Si noti che la $A^{-1}(t)$ è, al pari della $A(t)$, assolutamente continua in ogni intervallo finito della $t \geqslant 0$.

da quanto si è detto in b) segue che il sistema (B) è stabile in senso stretto. Pertanto la matrice fondamentale principale di (B)

$$Z(t) = I + \int_0^t B(\tau)\, Z(\tau)\, d\tau$$

risulta limitata insieme con l'inversa $Z^{-1}(t)$ (cfr. n. **1**). Quindi

$$Y(t) = A^{-1}(t)\, Z(t), \qquad Y^{-1}(t) = Z^{-1}(t)\, A(t)$$

sono entrambe limitate per $0 \leqslant t$ e di qui l'asserto.

d) Poichè è

$$\| - \dot{\bar{A}}_{-1}(t) + \{ - \bar{A}_{-1}(t) \}^2 \| = \| \dot{A}(t) - A^2(t) \|,$$

si ha subito il

Teorema 6′. *La tesi del Teorema* 6 *sussiste se in luogo della* (22) *si impone alla* $A(t)$ *di soddisfare la condizione*

$$\int_0^{+\infty} \| \dot{A}(\tau) - A^2(\tau) \|\, d\tau < +\infty. \tag{22′}$$

e) Ricordiamo infine che, recentemente, A. Wintner [**23**] ha dato una condizione, più generale di altre note in precedenza ([27]), atta ad assicurare l'esistenza di una matrice fondamentale $J(t)$ del sistema (A) soddisfacente la

$$J(t) = I + \int_0^{+\infty} A(\tau)\, J(\tau)\, d\tau. \tag{23}$$

L'esistenza di una tale $J(t)$ equivale al fatto che per ogni vettore (matrice-colonna) costante c esiste una soluzione $y(t)$ di (A) tale che

$$\lim_{t \to +\infty} \| y(t) - c \| = 0,$$

e inversamente ogni soluzione $y(t)$ di (A) tende per $t \to +\infty$ verso un determinato vettore costante.

([27]) Cfr. W. J. Trjitzinsky [**19**], A. Wintner [**21**].

La condizione di A. WINTNER è espressa dalla

$$(24)\qquad \int_0^{+\infty} \Big\| \Big\{ \int_\tau^{+\infty} A(\theta)\, \mathrm{d}\theta \Big\} A(\tau) \Big\| \, \mathrm{d}\tau < +\infty$$

che, come egli osserva, può essere sostituita dalla

$$(24')\qquad \int_0^{+\infty} \Big\| A(\tau) \int_\tau^{+\infty} A(\theta)\, \mathrm{d}\theta \Big\| \, \mathrm{d}\tau < +\infty.$$

Rinviando il lettore al lavoro [**23**]. di A. WINTNER per la dimostrazione, assai semplice, qui ci limiteremo alle seguenti osservazioni:

i) Le (24) e (24′) rappresentano entrambe condizioni di stabilità in senso stretto per il sistema (A). Infatti esse assicurano la risolubilità dell'equazione (23), ma da quella segue che la soluzione $J(t)$ è necessariamente limitata insieme con la inversa $J^{-1}(t)$ e poichè è

$$Y(t) = J(t)\, J^{-1}(0)$$

anche la matrice fondamentale principale $Y(t)$ sarà limitata insieme con la propria inversa.

ii) La (24) implica simultaneamente le

$$(13)\qquad \Big\| \int_0^t A(\theta)\, \mathrm{d}\theta \Big\| \leqslant k_1, \qquad 0 \leqslant t,$$

$$(14)\qquad \int_0^t \Big\| \Big\{ \int_\tau^t A(\theta)\, \mathrm{d}\theta \Big\} A(\tau) \Big\| \, \mathrm{d}\tau \leqslant k_2 < 1, \qquad 0 \leqslant t,$$

del Teorema 3 [e così la (24) implica le (13), (14′) del Teorema 3′].

iii) La (24) e la (24′) sono certamente soddisfatte se vale la

$$(21)\qquad \int_0^{+\infty} \| A(\tau) \| \, \mathrm{d}\tau < +\infty$$

già incontrata in precedenza.

Per altri casi particolari delle (24), (24′) rinviamo al lavoro di A. WINTNER.

6. – Stabilità «per scomposizione».

a) Ammesso che i due sistemi

$$\text{(B)} \qquad \dot{u} = B(t)\, u,$$

$$\text{(C)} \qquad \dot{v} = C(t)\, v$$

risultino entrambi stabili, si può affermare che anche il sistema

$$\text{(A)} \qquad \dot{y} = [B(t) + C(t)]\, y$$

è stabile?

La risposta è negativa, come mostrano noti esempi, quali il seguente.

Esempio I ([28]). Se a è una costante tale che

$$1 < 2a < 1 + e^{-\pi/2},$$

il sistema (B), con

$$B(t) = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}\log(t+1) + \cos\log(t+1) - 2a \end{bmatrix},$$

è stabile, come si vede calcolando a matrice fondamentale principale

$$U(t) = \begin{bmatrix} e^{-at} & 0 \\ 0 & e^{(t+1)\operatorname{sen}\log(t+1) - 2at} \end{bmatrix}.$$

Il sistema (C), con

$$C(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e^{-at} & 0 \end{bmatrix},$$

([28]) Cfr., ad esempio, R. Bellman [4], p. 42.

è poi addirittura stabile in senso stretto (cfr. n. **5**) poichè

$$\int_0^{+\infty} \| C(\tau) \| \, d\tau < +\infty .$$

Tuttavia il corrispondente sistema (A) ammette soluzioni non limitate (cfr. R. Bellman, loc. cit.).

Però il sistema (B) di questo esempio è stabile, ma non niformemente stabile [29] e si potrebbe pensare che la risposta al quesito posto in principio di questo n. possa risultare affermativa se entrambi i sistemi (B) e (C) sono, almeno, uniformemente stabili. Ma anche questa congettura si rivela errata in base al seguente, noto,

Esempio II (cfr., ad esempio, R. Bellman [**4**], p. 113). Posto

$$\alpha(t) = -2 \frac{\operatorname{sen} 2(t+1)}{t+1} - \frac{\operatorname{sen}^2 2(t+1)}{4(t+1)^2},$$

si considerino i sistemi (B) e (C) corrispondenti alle matrici

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha(t) & 0 \end{bmatrix},$$

i quali sono, entrambi, stabili in senso stretto; infatti (B) è autoaggiunto e per (C) basta calcolare la matrice fondamentale principale e la sua inversa, oppure basta applicare il Teorema 5. Tuttavia il sistema

$$\text{(A)} \qquad \dot{y} = [B(t) + C(t)]\, y$$

ammette soluzioni non limitate (cfr. R. Bellman, loc. cit.).

b) Quanto si è visto in a) fa risaltare l'importanza di un criterio di stabilità che ha le sue origini in un lontano lavoro di U. Dini [**12**] e che attraverso varie formulazioni particolari [30] è stato poi enunciato da D. Caligo [31] in forma equivalente a quella del seguente

---

(29) Ciò può dedursi, ad esempio, dal successivo Teorema 7'.

(30) Cfr. M. Hukuhara [**14**], L. Cesari [**7**], R. Bellman [**3**], G. Ascoli [**1**].

(31) Cfr. D. Caligo [**6**]. Tale enunciato si riferisce ai sistemi non omogenei per i quali rinviamo al n. **8** di questo lavoro.

T e o r e m a 7. *Se la matrice* $A(t)$ *del sistema*

$$\text{A)} \qquad \dot{y} = A(t)\, y$$

si può scrivere

$$A(t) = B(t) + C(t)$$

con

$$(5) \qquad \int_0^{+\infty} \| C(t) \| \, d\tau < +\infty$$

e se il sistema

$$\text{(B)} \qquad \dot{u} = B(t)\, u$$

è uniformemente stabile, allora il sistema (A) *è stabile.*

Ora è immediato riconoscere che in effetti la tesi può essere perfezionata con quella del

T e o r e m a 7'. *Nelle ipotesi del Teorema* 7 *il sistema* (A) *è uniformemente stabile.*

Basta per questo far ricorso ancora alla formula di LAGRANGE

$$y(t) = U(t)U^{-1}(t_0)\; y(t_0) + \int_{t_0}^{t} U(t)U^{-1}(\tau)C(\tau)\; y(\tau)\, d\tau ,$$

dove $U(t)$ è la matrice fondamentale principale di (B), e, dopo aver osservato che esiste per ipotesi una costante $c > 0$ tale che

$$\| U(t)U^{-1}(t_0) \| \leqslant c, \qquad 0 \leqslant t_0 \leqslant t,$$

impiegare (come si è fatto nella dimostrazione del Teorema 1') il lemma di GRONWALL generalizzato.

c) *G. A s c o l i, in* **[2]**, *osserva che se nel teorema di C a l i g o* (*Teorema* 7), *ferma restando la* (25), *si suppone che il sistema* (B) *sia stabile in senso stretto, allora anche* (A) *è stabile in senso stretto.*

Potremmo dunque dire che l'aggiunta di un «termine» $C(t)$ *tale che*

$$(25) \qquad \int_0^{+\infty} \| C(\tau) \| \, d\tau < +\infty,$$

« *conserva* » *la stabilità uniforme e la stabilità ristretta, ma non la semplice stabilità* [vedasi Esempio I dato in a)].

d) Avendo riconosciuto (n. **2**) che le ipotesi di L. CESARI dànno non solo la stabilità (Teorema 1), ma la stabilità uniforme (Teorema 1′) e che questa, come si è detto ora, si « conserva » per l'aggiunta di un termine $C(t)$ soddisfacente la (25), si ha il seguente teorema che migliora nelle conclusioni il teorema IV di L. CESARI [**9**]:

Teorema 8. *Se la matrice $A(t)$ di* (A) *si può considerare come somma di due matrici $B(t)$ e $C(t)$, delle quali la $C(t)$ soddisfa la* (25) *mentre la $B(t)$ soddisfa alle condizioni che si son poste sulla matrice* A(t) *che figura nell' nunciato del Teorema* 1, *allora il sistema* (A) *è uniformemente stabile.*

e) Come altra applicazione di quanto si è detto in b) e c), abbiamo il

Teorema 9. *La matrice $A(t)$ del sistema*

$$\dot{y} = A(t)\, y \tag{A}$$

sia assolutamente continua in ogni intervallo finito di $t \geqslant 0$ e sia limitata in $(0, +\infty)$ *insieme con l'inversa $A^{-1}(t)$.*

Esista inoltre una matrice $C(t)$ tale che il sistema

$$\dot{z} = C(t)\, z \tag{C}$$

sia uniformemente stabile [*stabile in senso stretto*] *e tale che si abbia*

$$\int_0^{+\infty} \| \dot{A}(\tau) + A^2(\tau) - C(\tau)\, A(\tau) \| \, d\tau < +\infty, \tag{26}$$

oppure si abbia

$$\int_0^{+\infty} \| \dot{A}(\tau) - A^2(\tau) + A(\tau)\, C(\tau) \| \, d\tau < +\infty. \tag{26'}$$

Allora il sistema (A) *è uniformemente stabile* [*stabile in senso stretto*] ([32]).

([32]) Il Teorema 9 generalizza il Teorema 6, dove C è la matrice nulla, nonchè un precedente criterio di stabilità dell'Autore [**10**].

Il Teorema 9 è stato ulteriormente esteso da me nella Nota: *Sulla t-similitudine tra matrici e la stabilità dei sistemi differenziali lineari,* Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., 1955 (in corso di stampa) [aggiunta durante la correzione delle bozze].

Valga la (26): facendo la trasformazione

$$y = A^{-1}(t)\, z,$$

(A) si muta nel sistema

$$\text{(D)} \qquad \dot{z} = C(t)\, z + D(t)\, z,$$

dove

$$D(t) = [\dot{A}(t) + A^2(t) - C(t)\, A(t)]\, A^{-1}(t),$$

cosicchè

$$\int_0^{+\infty} \| D(\tau) \|\, d\tau < +\infty,$$

e da b) e c) segue l'asserto. Se invece valesse la (26′) basterà fare la trasformazione

$$y = A(t)\, z.$$

f) Altri criteri di stabilità uniforme si trovano nel lavoro **[11]** di B. P. Demidovich; ci limitiamo a ricordarli notando che anche alla matrice dei sistemi ivi considerati si potrebbe aggiungere un termine soddisfacente la (25) senza alterare le conclusioni.

7. – Ancora sulla stabilità «per scomposizione».

a) All'inizio del n. precedente abbiamo osservato che se la matrice $A(t)$ si può scomporre nella somma $B(t) + C(t)$ di due matrici tali che entrambi i sistemi (B), (C) corrispondenti risultino stabili, non è certo che anche (A) sia stabile.

Tuttavia ammettiamo che uno dei due sistemi, ad esempio (B), sia stabile e sia $U(t)$ la sua matrice fondamentale principale.

Effettuando la trasformazione

$$\text{(T)} \qquad Y = U(t) Z$$

allorchè Y coincide con la matrice fondamentale principale di (A) avremo

$$\dot{Z} = U^{-1}(t)\, C(t)\, U(t)\, Z$$

e, poichè $Z(0) = U^{-1}(0)Y(0) = I$, la Z risulta in tal caso la matrice fondamentale principale del sistema

$$\dot{z} = U^{-1}(t)\ C(t)U(t)\ z. \tag{C'}$$

Dalla trasformazione (T) risulta subito che se il sistema (C') è stabile anche (A) lo è, avendosi

$$\| Y(t) \| \leqslant \| U(t) \| \| Z(t) \|$$

e si ha perciò il

Teorema 10. *Se la matrice $A(t)$ del sistema*

$$\dot{y} = A(t)\ y \tag{A}$$

si può scomporre nella somma di due matrici $B(t)$, $C(t)$, di cui una, $B(t)$, sia tale che risulti stabile il sistema

$$\dot{u} = B(t)\ u \tag{B}$$

e se inoltre è stabile il sistema

$$\dot{z} = U^{-1}(t)\ C(t)U(t)\ z, \tag{C'}$$

dove $U(t)$ è la matrice fondamentale principale di (B), *allora anche* (A) *è stabile.*

Si deduce di qui il

Corollario [33]. *Se $A(t)$ è scomponibile in $B(t) + C(t)$, in modo che* (B) *sia stabile e se è*

$$\int_0^{+\infty} e^{R \int_0^{\tau} \mathrm{tr}\, B(\theta)\, d\theta} \| C(\tau) \| \, d\tau < +\infty, \tag{27}$$

allora (A) *è stabile.*

---

[33] Cfr. D. Caligo [**6**], per il caso dei sistemi non omogenei.

Infatti dalla (27) e dalla supposta stabilità di (B) segue

$$\int_0^{+\infty} \| U^{-1}(\tau)\, C(\tau) U(\tau) \| \, d\tau < +\infty,$$

da cui discende la stabilità (ristretta) di (C′) e dal Teorema precedente l'asserto.

b) Dalla (T) abbiamo

$$Y^{-1} = Z^{-1} U^{-1}(t)$$

e quindi, allorchè Y coincide con la matrice fondamentale principale di (A), segue

$$Y^{-1}(t) = Z^{-1}(t)\, U^{-1}(t),$$

$$Y(t)\, Y^{-1}(\tau) = Z^{-1}(t)\, U^{-1}(t)\, U(\tau)\, Z(\tau),$$

e poichè, come si è osservato in a), in questo caso la $Z(t)$ è la matrice fondamentale principale di (C′) abbiamo (cfr. n. 1) il

Teorema 10′. *Ferme restando le ipotesi del Teorema* 10, *se, di più,* (B) *è stabile in senso stretto e* (C′) *è uniformemente stabile [stabile in senso stretto], allora anche* (A) *è uniformemente stabile [stabile in senso stretto].*

c) Potrà accadere che per una certa scomposizione $A(t) = B(t) + C(t)$ come quelle sin qui considerate si abbia

$$U(t) C(t) = C(t)\, U(t), \tag{28}$$

nel qual caso il sistema (C′) si riduce al sistema (C) ed allora abbiamo il

Teorema 11. *Se* $A(t)$ *si può considerare come somma* $B(t) + C(t)$ *tale che* (B) *e* (C) *siano entrambi stabili [uniformemente stabili, stabili in senso stretto] e se, inoltre, vale la* (28), *allora anche* (A) *è stabile [uniformemente stabile, stabile in senso stretto].*

d) Si comprende ora facilmente come di un dato sistema

$$\dot{y} = A(t)\, y \tag{A}$$

sia possibile saggiare la stabilità, scomponendone in modo opportuno la matrice $A(t)$ e cercando di applicare ad una parte $B(t)$ di essa ed alla trasformata $U^{-1}(t) C(t)\, U(t)$ dell'altra parte $C(t)$ qualcuno dei criteri di stabilità che abbiamo via via incontrati nei nn. precedenti.

8. – I sistemi lineari non omogenei.

In quel che precede abbiamo sempre considerato sistemi omogenei: la ragione di ciò sta nel fatto che un sistema non omogeneo

$$(A_1) \qquad \dot{x} = A(t)\, x + a(t)$$

[con $a(t)$ matrice-colonna, nota, ad n elementi $a_i(t)$, funzioni sommabili di t per ogni intervallo finito] è stabile [uniformemente stabile] allora e solo quando è stabile [uniformemente stabile] il corrispondente sistema omogeneo [34]

$$(A) \qquad \dot{y} = A(t)\, y.$$

Se tutte le soluzioni del sistema non omogeneo (A_1) sono limitate per $t \to +\infty$ il sistema è anche stabile, però, mentre nel caso di (A) vale anche il viceversa, ciò non è sempre vero per (A_1) [35].

Per concludere lasciamo al lettore la dimostrazione del seguente teorema, il cui enunciato riassume e completa quelli di alcuni noti criteri di stabilità per sistemi non omogenei [36].

Teorema 12. *Dato il sistema*

$$(A_1) \qquad \dot{x} = A(t)\, x + a(t),$$

se si può scrivere

$$A(t) = B(t) + C(t), \qquad a(t) = b(t) + c(t)$$

---

[34] Basta osservare che se $x(t)$, $y(t)$ sono soluzioni di (A_1), (A) rispettivamente, tali che $x(t_0) = y(t_0)$, si ha

$$x(t) = y(t) + \chi(t),$$

dove $\chi(t)$ è la soluzione di (A_1) tale che $\chi(t_0) = 0$. Quindi se per un certo t_0 si considerano due soluzioni di $x(t)$, $\bar{x}(t)$ di (A_1) e le corrispondenti $y(t)$, $\bar{y}(t)$ di (A), avremo

$$x(t) - \bar{x}(t) = y(t) - \bar{y}(t).$$

[35] Ad esempio, il sistema $\dot{x} = 1$ (con $n = 1$) è uniformemente stabile, ma non « limitato ».

[36] Ci riferiremo a D. Caligo [6] e, in particolare, ad L. Cesari [8]; anche il teorema VI di L. Cesari [9] è un caso particolare di questo Teorema 12.

con $B(t)$, $b(t)$ *tali che il sistema*

$$\dot{u} = B(t)\, u + b(t)$$

sia uniformemente stabile ed abbia tutte le soluzioni limitate, e con $C(t)$, $c(t)$ *tali che sia*

$$\int_0^{+\infty} \| C(\tau) \| \, d\tau < +\infty, \qquad \int_0^{+\infty} \| c(\tau) \| \, d\tau < +\infty,$$

allora anche il sistema (A_1) *è uniformemente stabile ed ha tutte le soluzioni limitate.*

Bibliografia.

1. G. ASCOLI, *Sul comportamento asintotico degli integrali delle equazioni differenziali del* 2° *ordine*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) **22**, 234-243 (1935).

2. G. ASCOLI, *Osservazioni sopra alcune questioni di stabilità*, I, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) **9**, 129-134 (1950).

3. R. BELLMAN, *The boundedness of solutions of linear differential equations*, Duke Math. J. **14**, 83-97 (1947).

4. R. BELLMAN, *Stability theory of differential equations*, McGraw-Hill Book Company, New York-Toronto-London, 1953.

5. Z. BUTLEWSKI, *Sur les intégrales d'un système d'équations différentielles linéaires*, Studia Math. **10**, 40-47 (1948).

6. D. CALIGO, *Un criterio sufficiente di stabilità per le soluzioni dei sistemi di equazioni integrali lineari e sue applicazioni ai sistemi di equazioni differenziali lineari*, Atti 2° Congresso Un. Mat. Ital., pp. 177-185, Bologna 1940.

7. L. CESARI, *Sulla stabilità delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (2) **8**, 131-148 (1939).

8. L. CESARI, *Proprietà asintotiche delle equazioni differenziali lineari ordinarie*, Rend. Mat. e Appl. Roma (4) **3**, 171-193 (1940).

9. L. CESARI, *Un nuovo criterio di stabilità per le soluzioni delle equazioni differenziali lineari*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (2) **9**, 163-186 (1940).

10. R. CONTI, *Un criterio sufficiente di stabilità per i sistemi di equazioni differenziali lineari del primo ordine omogenee*, Bol. Un. Mat. Ital. (3) **6**, 288-293 (1951).

11. B. P. Demidovich, *Sulla stabilità secondo Liapunov dei sistemi lineari di equazioni differenziali ordinarie,* Mat. Sbornik N. S. **28** (70), 659-684 (1951), (Russo).

12. U. Dini, *Studi sulle equazioni differenziali lineari,* Ann. Mat. Pura Appl. (3) **3**, 125-183 (1899).

13. N. P. Erughin, *Sistemi riducibili,* Trudy Mat. Inst. Steklov. **13** (1946), (Russo).

14. M. Hukuhara, *Sur les points singuliers des équations differéntielles linéaires,* J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. (1) **2**, 13-88 (1934).

15. A. Liapunov, *Problème général de la stabilité du mouvement,* Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse (2) **9**, 203-475 (1907); ristampato in « Ann. Math. Studies, 17, Princeton University Press, 1949 ».

16. V. V. Nemytzkiĭ - V. V. Stepanov, *Teoria qualitativa delle equazioni differenziali,* 2a ediz., G.I.T.T.L., 1949 (Russo).

17. A. Rosenblatt, *On the growth of the solutions of ordinary differential equations,* Bull. Amer. Math. Soc. **51**, 723-727 (1954).

18. G. Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale.* Vol. I, 2a ediz., Zanichelli, Bologna 1948.

19. W. J. Trijtzinsky, *Properties of growth for solutions of differential equations of dynamical type,* Trans. Amer. Math. Soc. **50**, 252-294 (1941).

20. T. Wazewski, *Sur la limitation des intégrales des systèmes d'équations différentielles linéaires ordinaires,* Studia Math. **10**, 48-59 (1948).

21. A. Wintner, *On linear asymptotic equilibria,* Amer. J. Math. **71**, 853-858 (1949).

22. A. Wintner, *On free vibrations with amplitudinal limits,* Quart. Appl. Math. **8**, 102-104 (1950).

23. A. Wintner, *On a theorem of Bôcher in the theory of ordinary linear differential equations,* Amer. J. Math. **76**, 183-190 (1954).