Rivista Mat. Univ. Parma 6, 45-64 (1955)

JAURÈS CECCONI (*)

# Un teorema sull'esistenza del minimo degli integrali doppi del Calcolo delle variazioni, in forma non parametrica. (**)

**1. – Introduzione.** Sia $D$ un insieme aperto e limitato del piano $(x, y)$, $D^*$ la sua frontiera; sia $z(x, y)$ una funzione definita sull'insieme $D + D^*$; sia $F(x, y, z, p, q)$ una funzione continua rispetto a $(x, y, z, p, q)$ per $(x, y) \in D + D^*$ e $z$, $p$, $q$ arbitrari; sia infine $\varphi(x, y)$ una funzione continua su $D^*$.

Al problema della ricerca del minimo dell'integrale

$$\mathfrak{J}(z, D) = \iint_D F(x, y, z, p, q)\, dx\, dy \qquad (p = z_x, \quad q = z_y) \tag{1}$$

nella classe delle funzioni $z(x, y)$ che sono continue su $D + D^*$, assolutamente continue secondo TONELLI (A. C. T.) su $D$ e coincidono con $\varphi(x, y)$ su $D^*$, molti contributi sono stati portati dalle ricerche di L. TONELLI, H. LEBESGUE e molti altri.

In tutte queste ricerche, oltre alla possibilità di stabilire la semicontinuità inferiore del funzionale (1), giuoca un ruolo essenziale la possibilità di maggiorare uniformemente l'integrale

$$\iint_D \{ |p|^{2+\alpha} + |q|^{2+\alpha} \}\, dx\, dy, \tag{2}$$

---

(*) Indirizzo: Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil.

(**) Ricevuto il 2-V-1955.

al variare di $z(x, y)$ nella classe delle funzioni ammissibili per l'integrale (1), essendo $\alpha$ un numero reale $\geqslant 0$ [possibilità che in generale discende da alcune ipotesi fatte sul modo di crescere della funzione $F(x, y, z, p, q)$ al crescere di $p$ e $q$].

Da tutto questo, se $\alpha > 0$, si può dedurre (L. TONELLI [9]) direttamente la compattezza di ogni successione minimizzante l'integrale (1); se invece $\alpha = 0$ occorre un procedimento di livellamento (H. LEBESGUE [6], L. TONELLI [8]) per poter dedurre da una successione minimizzante (1) una nuova successione che sia compatta e seguiti ad essere minimizzante per (1).

Perchè quest'ultimo fatto si realizzi si fanno di solito ulteriori ipotesi sulla $F(x, y, z, p, q)$ (come è stato fatto da L. TONELLI nei teoremi delle pagine 123-125 della Nota [9]) tendenti ad assicurare che dopo il livellamento l'integrale (1) non è aumentato.

Scopo di questa Nota è di far vedere che queste nuove ipotesi non sono in generale necessarie.

Precisamente dimostriamo il seguente

Teorema. *Supponiamo che l'insieme aperto e limitato $D$, sopra considerato, sia connesso, supponiamo inoltre che la sua frontiera $D^*$ sia tale che detta $\{\gamma\}$ la collezione dei componenti di $D^*$ si abbia* $\operatorname*{Inf.}_{\gamma\in\{\gamma\}} \operatorname{diam} \gamma > 0$. *Supponiamo che la funzione $F(x, y, z, p, q)$ sia oltre che continua per $(x, y)\in D + D^*$, $z$, $p$, $q$ arbitrari, anche dotata di derivate parziali $F_p$, $F_q$ continue per $(x, y)\in D$, $z$, $p$, $q$ arbitrari.*

*Supponiamo inoltre che esistano 3 numeri $m > 0$, $L > 0$, $H$ reale tali che la disuguaglianza*

$$m\cdot(p^2 + q^2) + H < F(x, y, z, p, q) \tag{3}$$

*sia verificata per ogni $(x, y)\in D$, $z$ arbitrario e $p^2 + q^2 > L$.*

*Supponiamo che il funzionale* (1) *sia quasi regolare positivo* (cfr. n. **2**).

*Considerato un insieme convesso e limitato $A$ dello spazio $(x, y, z)$ contenente l'insieme $\varphi[D^*] \equiv [(x, y, z); (x, y)\in D^*, z = \varphi(x, y)]$ immagine di $D^*$ secondo $\varphi(x, y)$, supponiamo che sia non vuota la classe $W$ costituita dalle funzioni $z = z(x, y)$ che sono:* a) *continue su $D + D^*$,* b) A. C. T. *su $D$,* c) *coincidenti con $\varphi(x, y)$ su $D^*$,* d) *tali che l'insieme $z[D]$, immagine di $D$ secondo $z(x, y)$, appartenga ad $A$,* e) *tali da rendere finito l'integrale $\mathfrak{J}(z, D)$.*

*Allora nella classe $W$ esiste una funzione che rende minimo l'integrale $\mathfrak{J}(z, D)$.*

La dimostrazione di questo Teorema è fondata essenzialmente, oltre che su di un teorema di semicontinuità di L. TONELLI [7] e su di un teorema di L. C. YOUNG [9], concernente la possibilità di costruire « $\varepsilon - \delta$ gratings (reticolati) » per le $z(x, y)$, su di un procedimento di livellamento che adatta a superficie immagini di funzioni A. C. T. un procedimento di livellamento per superficie poliedriche recentemente introdotto da L. CESARI **[3]** per stabilire l'esistenza del minimo in problemi di forma parametrica (⁰).

**2.** – Siano $z(x, y)$, $F(x, y, z, p, q)$, $D$, $\mathfrak{J}(z, D)$ definiti come nel n. **1**.

Diremo che il funzionale $\mathfrak{J}(z, D)$ è quasi regolare positivo se è

$$\mathcal{E}(x, y, z; p_0, q_0; p, q) = F(x, y, z, p, q) - F(x, y, z, p_0, q_0)) -$$

$$-(p - p_0)\, F_p(x, y, z, p_0, q_0) - (q - q_0)\, F_q(x, y, z, p_0, q_0) \geqslant 0$$

per ogni $(x, y) \in D$ e per tutti i valori di $z$, $p_0$, $q_0$, $p$, $q$.

Diremo che $\mathfrak{J}(z, D)$ è inferiormente semicontinuo in una classe $C$ di funzioni $z(x, y)$, A. C. T. su $D$, che rendono finito $\mathfrak{J}(z, D)$, se, fissata comunque una funzione $z_0(x, y)$ in $C$, ad ogni $\varepsilon > 0$ può farsi corrispondere un $\varrho > 0$ in modo che sia

$$\mathfrak{J}(z, D) > \mathfrak{J}(z_0, D) - \varepsilon$$

per tutte le funzioni $z(x, y)$ di $C$ per le quali su tutto $D$ risulta

$$|\, z(x, y) - z_0(x, y)\, | < \varrho.$$

Sussiste il seguente

Teorema (L. TONELLI [7]). Supponiamo che esista un numero reale $N$ per il quale sia $F(x, y, z, p, q) \geqslant N$ per ogni $(x, y) \in D$ e per $z$, $p$, $q$ arbitrari.

Supponiamo che per ogni $Z > 0$ esistano tre numeri $\alpha > 0$, $m > 0$, $L > 0$ in modo che sia

$$F(x, y, z, p, q) > m \cdot \{|\, p\,|^{1+\alpha} + |\, q\,|^{1+\alpha}\}$$

quando $|\, z\,| \leqslant Z$ e $p^2 + q^2 \geqslant L$.

Supponiamo che $\mathfrak{J}(z, D)$ sia quasi regolare positivo.

Allora $\mathfrak{J}(z, D)$ è inferiormente semicontinuo nella classe $C$.

---

(⁰) Recentemente un teorema di questo tipo è stato annunciato da A. G. SIGALOV nella Nota *Integrali doppi quasi regolari del Calcolo delle variazioni in forma non parametrica,* Doklady **73**, 891-894. Il nostro Teorema non fa però intervenire una ipotesi cui A. G. SIGALOV ricorre per poter fare uso di un teorema di approssimazione.

**3.** – Sia $C$ una classe di funzioni A. C.T. su $D$. Diremo che *una funzione* $z_0(x, y)$ *è di accumulazione per la classe* $C$ se, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, esiste almeno una funzione $z(x, y)$ in $C$ per la quale si abbia, per ogni $(x, y) \in D$,

$$|z(x, y) - z_0(x, y)| \leqslant \varepsilon.$$

Sussiste il seguente

Teorema di chiusura (L. TONELLI [**8**]). Se $C$ è una classe di funzioni $z(x, y)$ A. C. T. su $D$, limitato, ed esistono due numeri $\alpha > 0$, $A > 0$ tali che per tutte le funzioni di $C$ si abbia

$$\iint_D \{|p|^{1+\alpha} + |q|^{1+\alpha}\} \, dx \, dy < A;$$

allora tutte le funzioni di accumulazione di $C$ risultano A. C. T. su $D$.

**4.** – Sussiste il seguente

Teorema. Sia $\{z_n(x, y)\}$ una successione di funzioni continue su $D + D^*$, A. C. T. su $D$, ed esista una costante $A > 0$ tale che per tutte le funzioni della successione $z_n(x, y)$ si abbia

$$\iint_D \{p_n^2 + q_n^2\} \, dx \, dy \leqslant A.$$

Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\eta > 0$, dipendente soltanto da $\varepsilon$, e per ogni $n$ esistono un numero $\delta_n$ e due gruppi finiti di rette

$$x = x_i^{(n)}, \qquad y = y_i^{(n)}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, h_n),$$

che posseggono le seguenti proprietà:

a) $\delta_n < x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)} < 2\delta_n, \quad \delta_n < y_{i+1}^{(n)} - y_i^{(n)} < 2\delta_n,$

b) $D$ appartiene al rettangolo di vertici opposti $(x_1^{(n)}, y_1^{(n)})$, $(x_{h_n}^{(n)}, y_{h_n}^{(n)})$,

c) $\eta < \delta_n < \varepsilon$,

d) l'immagine secondo $z_n(x, y)$ dell'intercetta di $D$ con un segmento di lunghezza $< 2\delta_n$ appartenente ad una delle rette $x = x_i^{(n)}$, $y = y_i^{(n)}$ ha lunghezza $< \varepsilon$.

Questo Teorema si deduce da un corrispondente teorema di L. C. YOUNG [**9**].

**5.** – Sia $\alpha$ un insieme aperto e limitato del piano $(x, y)$, sia $\alpha^*$ la sua frontiera. In ciò che segue vogliamo considerare una nozione di lunghezza generalizzata $l(\alpha^*)$ della frontiera $\alpha^*$ di $\alpha$: questa nozione costituisce un caso particolare della nozione di lunghezza generalizzata dell'immagine della frontiera di un insieme aperto secondo una trasformazione continua, recentemente introdotta da L. CESARI ([**3**], [**4**]).

Supponiamo, in un primo momento, che l'insieme $\alpha$ sia inoltre semplicemente connesso in modo che $\alpha^*$ consti di un solo continuo.

Sia $w$ un punto di $\alpha^*$ e sia $b$ un arco semplice ogni cui punto, ad eccezione dell'estremo $w$, appartiene ad $\alpha$; diciamo *arco limite* di $\alpha$ l'insieme $(w, b)$. Secondo CARATHÉODORY [**1**] diremo che *due archi limiti* $(w, b)$, $(w', b')$ *definiscono il medesimo elemento finale* $\eta$ *di* $\alpha$ se hanno il medesimo estremo $w = w'$ e se gli archi $b$ e $b'$ si incontrano in ogni intorno di $w = w'$, oppure se in essi sono contenuti due archi $b_1$ e $b_1'$ tali che esista un arco semplice $c$ in $\alpha$, congiungente gli estremi di $b_1$ e $b_1'$, in modo che la regione aperta di JORDAN, la cui frontiera è $b_1 + c + b_1'$, appartenga ad $\alpha$. Altrimenti diremo che *due archi limiti definiscono elementi finali diversi.*

Siano $w_1$ e $w_2$ due punti di $\alpha^*$ e sia $c$ un arco semplice di cui ogni punto, ad eccezione degli estremi, appartiene ad $\alpha$; diremo che $(w_1, c, w_2)$ *costituisce una sezione di* $\alpha$.

Siano $\eta_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ quattro diversi elementi finali di $\alpha$ e siano $(w_i, b_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ quattro archi limiti definenti i detti elementi finali, privi di punti in comune, salvo al più per gli estremi che cadono su $\alpha^*$. Congiunti gli estremi di $b_1$ e $b_2$ con un arco $c$ appartenente ad $\alpha$ e privo di punti in comune con $b_3$ e $b_4$, diremo che *la coppia* $(\eta_1, \eta_2)$ *separa oppure no la coppia* $(\eta_3, \eta_4)$ secondo che la sezione $(w_1, b_1 + c + b_2, w_2)$ separa o no $b_3$ da $b_4$ in $\alpha$.

L'insieme $\{\eta\}$ può perciò essere ciclicamente ordinato. Diciamo $\Omega$ uno dei fondamentali ordinamenti di $\{\eta\}$.

Sia $[\eta] = [\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n] \equiv [(w_1, b_1), (w_2, b_2), \ldots, (w_n, b_n)]$ un gruppo finito di elementi finali di $\alpha$ ordinati nell'ordinamento $\Omega$.

Consideriamo il poligono chiuso i cui vertici sono ordinatamente $w_1$, $w_2$, $w_3$, ..., $w_n$ e la sua lunghezza $l_{[\eta]}$.

Il numero

$$l(\alpha^*) = \sup_{[\eta]} l_{[\eta]}$$

in cui l'estremo superiore è preso al variare di tutti i possibili gruppi finiti di elementi finali $[\eta]$ di $\alpha$, sarà chiamato, nel caso particolare preso in considerazione, *lunghezza generalizzata della frontiera di* $\alpha$.

**6.** – Nel caso generale procediamo, sempre seguendo L. CESARI ([3], [4]), nel seguente modo.

Sia $\{\delta\}$ la classe dei componenti dell'insieme aperto $\alpha$. Per ogni $\delta \in \{\delta\}$ sia $\{\gamma_\delta\}$ la classe dei componenti di $\delta^*$.

Sia $\gamma$ uno di questi componenti, per ogni altro componente $\gamma'$ diciamo $\beta' = \beta(\gamma, \gamma')$ l'insieme, eventualmente vuoto, dei punti del piano $(x, y)$ che $\gamma'$ separa da $\gamma$. Consideriamo quindi l'insieme

$$A(\delta, \gamma) = \delta + \sum_{\substack{\gamma' \in \{\gamma\}_\delta \\ \gamma' \neq \gamma}} (\gamma' + \beta');$$

tale insieme è aperto, connesso e la sua frontiera è costituita dall'insieme $\gamma$.

Ora se $A(\delta, \gamma)$ è limitato può considerarsi, come nel n. precedente, la lunghezza genralizzata $l[A(\delta, \gamma)^*]$ della frontiera dell'insieme aperto, limitato e semplicemente connesso $A(\delta, \gamma)$. Se $A(\delta, \gamma)$ non è limitato, seguitano a valere tutte le considerazioni svolte nel n. precedente circa gli elementi finali di $A(\delta, \gamma)$ ed il loro ordinamento in modo che si può alla stessa maniera definire il numero $l[A(\delta, \gamma)^*]$.

È così possibile considerare il numero (eventualmente $+\infty$)

$$l(\alpha^*) = \sum_{\delta \in \{\delta\}} \sum_{\gamma \in \{\gamma\}_\delta} l[A(\delta, \gamma)^*]$$

che sarà chiamato, nel caso generale, *lunghezza generalizzata della frontiera* $\alpha^*$ *di* $\alpha$.

Osserviamo che se $l(\alpha^*)$ è finito allora fra i numeri $l[A(\delta, \gamma)^*]$ solo una infinità al più numerabile sono diversi da 0 e tutti sono finiti.

**7.** – Sussiste il seguente

Teorema. *Sia $D$ un insieme aperto e limitato del piano $(x, y)$, ogni componente del quale sia semplicemente connesso, sia $D^*$ la sua frontiera, sia $z = z(x, y)$ una funzione continua su $D + D^*$,* A. C. T. *su $D$, sia $N$ un numero maggiore del diametro dell'insieme $z[(D^*)] \equiv [(x, y, z), (x, y) \in D^*, z = (x, y)]$, immagine di $D^*$ secondo $z(x, y)$, sia $k > 1$, sia $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ un punto appartenente a $z[(D^*)]$ e sia $a(z, D) = a(S)$ l'area secondo Lebesgue della superficie definita da $z = z(x, y)$ su $D$.*

*Allora esistono un numero $2N < \varrho < 2N + 3[k \cdot a(z, D)]^{1/2}$ ed una funzione $z = z_0(x, y)$ continua su $D + D^*$,* A. C. T. *su $D$, per i quali si ha:*

a) $$|z_0(x, y) - z(x, y)| \leqslant \varrho, \qquad (x, y) \in D + D^*;$$

b) *esiste un insieme aperto* $\pi$, *che è la somma di una infinità numerabile di insiemi aperti e semplicemente connessi* $\pi_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, *tale che* $z_0(x, y) = z(x, y)$ *se* $(x, y) \in D - \pi$ *ed inoltre* $z_0(x, y)$ *è costante su ogni* $\pi_i$;

c) *si ha, dette rispettivamente* $a(z, \pi_i)$ *e* $a(z_0, \pi_i)$ *le aree delle superficie definite da* $z(x, y)$ *e* $z_0(x, y)$ *su ciascun insieme* $\pi_i$,

$$a(z_0, \pi_i) \leqslant \frac{1}{4k}\, a(z, \pi_i);$$

d) *detta* $l_i$ *la lunghezza generalizzata del contorno* $\pi_i^*$ *di* $\pi_i$ *e detto* $\mathfrak{L} = \sum l_i$ *si ha*

$$\mathfrak{L}^2 \leqslant \frac{1}{k} \sum a(z, \pi_i);$$

e) *ogni continuo* $c \in D + D^*$ *per il quale è* $c \cdot D^* \neq 0$, diam $[z(c)] < N$ *è completamente contenuto in* $D - \pi$.

Questo Teorema costituisce l'estensione alle superficie $S$: $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$, $z(x, y)$ A. C. T. su $D$, di un teorema di livellamento dato da L. Cesari [2] per superficie poliedriche di forma parametrica.

**8.** – Per la dimostrazione del Teorema ora enunciato esponiamo alcune proprietà della lunghezza generalizzata della frontiera di un insieme aperto che sono state date da L. Cesari ([3], [4]).

Siano $z(x, y)$, $N$ e $P \equiv (x_0, y_0, z_0)$ definiti come nell'enunciato del n. precedente. Sia, per ogni $\varrho > 0$, $c(P_0, \varrho)$ il cubo di centro in $P_0$, faccie parallele ai piani coordinati e semispigolo $\varrho$, sia $R > N$ tale che l'insieme $z[D] \equiv [(x, y, z); (x, y) \in D, z = (x, y)]$ sia interno a $c(P_0, R)$.

Per ogni $N < \varrho < R$ diciamo $\pi(\varrho)$ l'insieme, eventualmente vuoto, aperto, appartenente a $D$ sul quale è $| z(x, y) - z_0 | > \varrho$, diciamo $l(\varrho)$ la lunghezza generalizzata della frontiera di $\pi(\varrho)$, $\alpha(\varrho)$ l'area secondo Lebesgue della superficie definita da $z(x, y)$ su $\pi(\varrho)$.

La funzione $l(\varrho)$ gode (L. Cesari [4]) della seguente proprietà di semicontinuità inferiore

$$l(\varrho) \leqslant \varliminf_{\tau \to \varrho + 0} l(\tau), \qquad N \leqslant \varrho < R,$$

dalla quale si deduce in particolare la misurabilità della stessa $l(\varrho)$ in $(N, R)$.

Sussiste inoltre la seguente notevole disuguaglianza, stabilita essenzialmente da L. CESARI ([3], [4]),

$$\alpha(\varrho) \geqslant \int_{\varrho}^{R} l(r)\ \mathrm{d}r,$$

dalla quale si deduce in particolare che $l(\varrho)$ è quasi ovunque finita in $(N, R)$.

**9.** – Veniamo alla dimostrazione del Teorema enunciato nel n. 7.

Se è $R < 2N + 3[k \cdot a(x, D)]^{1/2}$ non c'è niente da dimostrare. Nel caso contrario ragionando come nei nn. 19-21 della Nota [2] di L. CESARI e tenendo presenti le proprietà della lunghezza generalizzata ricordate nel n. precedente, si prova l'esistenza di un numero $r$, appartenente all'intervallo $(2N, 2N + 3 \cdot [k \cdot a(z, D)]^{1/2})$, per il quale si ha

$$k \cdot [l(r)]^2 \leqslant \int_{r}^{R} l(t) \cdot \mathrm{d}t \leqslant \alpha(r). \tag{4}$$

Consideriamo l'insieme aperto $\pi(r)$ e osserviamo che $[\pi(r)]^* \subset D$. Sia $\{\delta_i\}$ la classe, al più numerabile, dei componenti di $\pi(r)$. Per ogni $\delta_i$ operiamo nel seguente modo. Sia $D_0$ il componente di $D$ cui appartiene $\delta_i$, sia $C(\delta_i)$ il complementare rispetto al piano $(x, y)$ di $\delta_i$, sia $P^*$ un punto di $D_0^*$ e sia $\varphi_i$ il componente di $C(\delta_i)$ che contiene $P^*$. Osserviamo che $\varphi_i$ contiene $D_0^*$ in quanto $D_0^*$ è connesso e non incontra $\delta_i^*$. Diciamo $\pi_i$ l'insieme aperto e limitato complementare di $\varphi_i$. Poichè la frontiera $\varphi_i^*$ di $\varphi_i$ è costituita da un componente $\gamma_i$ della frontiera $\delta_i^*$ di $\delta_i$, ne segue che $\bar{\pi}_i$ è semplicemente connesso. Si ha inoltre $\bar{\pi}_i^* \subseteq \delta_i^*$, $\delta_i \subseteq \bar{\pi}_i \subseteq D_0$.

Osserviamo anche che per nessuna coppia di indici $i$, $j$, con $i \neq j$, può accadere che $(\bar{\pi}_i)^*$ abbia punti interni e punti esterni a $\bar{\pi}_j$.

Se per due insiemi $\bar{\pi}_i$ e $\bar{\pi}_j$, con $i \neq j$, accade che $(\bar{\pi}_i)^*$ è interno a $\bar{\pi}_j$, e quindi $\bar{\pi}_i$ è interno a $\bar{\pi}_j$, sopprimiamo l'insieme $\bar{\pi}_i$.

Sia $\{\pi_i\}$ la classe al più numerabile degli insiemi residui. Diciamo $\pi$ l'insieme aperto riunione degli insiemi $\pi_i \in \{\pi_i\}$.

In virtù di questa operazione si ha

$$[\pi(r)]^* \supseteq \pi^*, \qquad \pi(r) \subseteq \pi \subseteq D.$$

Dalle rispettive definizioni si ha perciò

$$l(r) = l[\pi(r)^*] \geqslant l(\pi^*), \qquad \alpha(r) = a[z, \pi(r)] \leqslant a(z, \pi),$$

in modo che, per la disuguaglianza (4), risulta

$$k \cdot [l(\pi^*)]^2 \leqslant a(z, \pi).$$

**10.** – Sia $z = z_0(x, y)$, con $(x, y) \in D$, la funzione che coincide con $z = z(x, y)$ su $D - \pi$ ed è, su ogni componente $\pi_i$ di $\pi$, uguale a $z_0 + r$ $[z_0 - r]$ se su $\pi_i^*$ è $z(x, y) = z_0 + r$ $[z(x, y) = z_0 - r]$.

La funzione $z = z_0(x, y)$ è continua su $D + D^*$ e A. C. T. su $D$. Vogliamo osservare che essa soddisfa tutte le condizioni espresse nel Teorema del n. **7** quando si faccia $\varrho = r$.

Le condizioni a) e b) sono manifestamente verificate, la condizione d) è verificata in virtù di quanto si è visto nel n. precedente. La condizione e) si verifica osservando, come nella Nota [**2**] di L. CESARI, che per ogni $(x, y) \in c$ si ha, essendo $(\bar{x}, \bar{y}) \in D^* \cdot c$,

$$| z(x, y) - z(x_0, y_0) | \leqslant | z(x, y) - z(\bar{x}, \bar{y}) | + | z(\bar{x}, \bar{y}) - z(x_0, y_0) | < 2N,$$

per cui l'immagine di $c$ secondo $z(x, y)$ è interna a $c(P_0, 2N)$ mentre l'immagine della frontiera $\pi^*$ di $\pi$, secondo $z(x, y)$, appartiene al cubo $c(P_0, r)$, $r > 2N$, per cui $c$ non può incontrare $\pi^*$.

**11.** – Rimane da verificare la condizione c).

A questo scopo ricordiamo le seguenti ulteriori proprietà della frontiera di un insieme aperto, semplicemente connesso e limitato $\alpha$.

Consideriamo, come nel n. **5**, la collezione $\{\eta\}$ degli elementi finali di $\alpha$ ed uno, $\Omega$, degli ordinamenti fondamentali di $\{\eta\}$.

Indichiamo con $\infty$ un elemento finale di $\{\eta\}$, allora dati due elementi finali $\eta_1$ e $\eta_2$ ($\eta_1$ precedente $\eta_2$ in $\Omega$) diversi da $\infty$, diremo *intervallo aperto* $[\eta_1, \eta_2]$ *di elementi finali di* $\alpha$ l'insieme non vuoto degli elementi finali $\eta$ tali che la coppia $(\eta, \infty)$ separi la coppia $(\eta_1, \eta_2)$.

Definiremo come *elemento di frontiera* $\omega$ *di* $\alpha$ una successione di intervalli $\{[\eta_n', \eta_n'']\}$, ciascuno contenuto nel precedente, tale che al più un elemento finale $\eta$ appartenga a tutti gli $[\eta_n', \eta_n'']$.

Chiameremo *sostegno* $E_\omega$ *dell'elemento di frontiera* $\omega$ l'insieme dei punti $w \in \alpha^*$ che hanno le seguenti proprietà: esiste una successione di elementi finali $\{\eta_k \equiv (w_k, b_k)\}$ tali che $n_k \in [\eta_{n_k}', \eta_{n_k}'']$, inoltre $\lim_{k \to \infty} n_k = \infty$, $\lim_{k \to \infty} w_k = w_0$. Ricordiamo che ogni $E_\omega$ è un continuo e che la famiglia $\{E_\omega\}$ di tutti gli insiemi $E_\omega$ costituisce una copertura dell'insieme $\alpha^*$.

Ricordiamo anche che, secondo un risultato di C. CARATHÉODORY [**1**], è possibile rappresentare in modo biunivoco e bicontinuo l'insieme dei punti appartenenti ad $\alpha$ nell'interno del cerchio unitario $C$ ed è possibile estendere questa corrispondenza alle relative frontiere in modo che al sostegno $E_\omega$ di ogni elemento di frontiera $\omega$ di $\alpha$ corrisponda un punto di $C^*$ con le seguenti proprietà:

a) Se $\{P_n\}$ è una successione di punti di $C^*$ convergente verso un punto $P_0 \in C^*$, se $E_{\omega_n}$, $E_{\omega_0}$ sono i sostegni dei corrispondenti elementi di frontiera di $\alpha$, allora $E_{\omega_0}$ contiene l'insieme di accumulazione dei continui $E_{\omega_n}$.

b) Se $\{P_n\}$ è una successione di punti di $C$ convergente verso un punto $P_0 \in C^*$, se $\{Q_n\}$ sono i punti corrispondenti di $\alpha$ e $E_{\omega_0}$ è il sostegno dell'elemento di frontiera di $\alpha$ corrispondente a $P_0$, allora $E_{\omega_0}$ contiene tutti i punti di accumulazione dei punti $Q_n$.

**12.** – Siano $\pi$ e $\pi_i$ definiti come nel n. **9**. In virtù di quanto abbiamo ivi veduto risulta $l(\pi^*) = \sum_i l(\pi_i^*) < +\infty$, per cui è finita la lunghezza generalizzata della frontiera di ciascuno degli insiemi aperti semplicemente connessi $\pi_i$.

Affermiamo che, in conseguenza di ciò e delle proprietà ricordate nel n. precedente, il sostegno $E_\omega$ di ciascun elemento di frontiera $\omega$ di $\pi_i$ è ridotto ad un punto.

A questo proposito osserviamo che, detto ancora $\Omega$ l'ordinamento degli elementi di frontiera di $\pi_i$, subordinato dall'ordinamento scelto per gli elementi finali $\eta$ di $\pi_i$, per ogni elemento di frontiera $\omega$ per il quale $E_\omega$ non è ridotto ad un punto esistono un punto $w \in E_\omega$ e due successioni di elementi finali $\eta_k' \equiv (w_k', b_k')$, $\eta_k'' \equiv (w_k'', b_k'')$ per le quali è $\lim_{k\to\infty} w_k' = \lim_{k\to\infty} w_k'' = w$ ed inoltre, detti $\omega_k'$ e $\omega_k''$ gli elementi di frontiera individuati da $\eta_k'$ e $\eta_k''$ rispettivamente, accade che tutti gli $\omega_k'$ precedano $\omega$ e tutti gli $\omega_k''$ seguano $\omega$ in $\Omega$.

Sia infatti $\gamma_1$ $[\gamma_2]$ l'insieme dei punti $w$ di $E_\omega$ per i quali si ha $w = \lim_{k\to\infty} w_k$, $\eta_k \equiv (w_k, b_k) \equiv \omega_k$, $\omega_k$ precedente [seguente] $\omega$ in $\Omega$. Ciascuno degli insiemi $\gamma_1$, $\gamma_2$ è non vuoto, in virtù della condizione a) del teorema di C. Carathéodory enunciato nel n. precedente, ed è chiuso. Quanto affermiamo discende perciò dal fatto che $E$ è un continuo. Supponiamo allora, per assurdo, che esista un elemento di frontiera $\omega$ di $\pi_i$ per il quale $E_\omega$ non è ridotto ad un punto. Sia diam $E_\omega = 2d > 0$. Sia $\overline{w} \in E_\omega$ un punto avente la proprietà sopra considerata e sia $\overline{\overline{w}} \in E_\omega$ un punto avente distanza da $\overline{w}$ maggiore di $d$.

Sarà allora, in ogni caso, possibile costruire una successione di elementi finali $\eta_k \equiv (w_k, b_k)$ i cui corrispondenti elementi di frontiera $\omega_k$ si susseguono nell'ordinamento $\Omega$ (si ha cioè che $\omega_1$ precede $\omega_2$ in $\Omega$, $\omega_2$ precede $\omega_3$, e così via), per i quali è $\lim_{k\to\infty} w_{2k} = \overline{w}$, $\lim_{k\to\infty} w_{2k+1} = \overline{\overline{w}}$, $\text{dist}(w_k, w_{k+1}) > d$.

E ciò in contrasto con il fatto che sia $l(\pi_i^*) < \infty$. La nostra affermazione è così provata.

**13.** – Siano ancora $\pi$ e $\pi_i$ definiti come nel n. **9**.

In virtù di quanto si è visto nel n. precedente, del teorema di C. CARATHÉODORY enunciato nel n. **11**, e del fatto che la collezione $\{E_\omega\}$ dei sostegni degli elementi di frontiera di $\pi_i$ ricopre la frontiera $\pi_i^*$ di $\pi_i$, possiamo affermare che esiste una trasformazione continua del cerchio unitario $C + C^*$ nell'insieme $\pi_i + \pi_i^*$, che è biunivoca in ogni insieme aperto interno a $C$.

Da questo segue, in particolare, che l'indice topologico $O(P, \gamma)$ di ogni punto $P$ del piano $(x, y)$ rispetto alla linea $\gamma$, immagine di $C^*$ ed avente sostegno $\pi_i^*$ (fatto uguale a zero sui punti di $\gamma$), è uguale a $\mp 1$ in ogni punto di $\pi_i$ e zero altrove.

Dalla definizione di lunghezza generalizzata e dalla proprietà degli elementi finali ricordate nel n. **11** segue d'altronde che la lunghezza ordinaria $l(\gamma)$ di $\gamma$ coincide (¹) con $l(\pi_i^*)$.

In virtù della disuguaglianza isoperimetrica nel piano (T. RADÓ [**6**]) si ha perciò

$$\text{area } \pi_i = \iint_{\pi_i} |\, O(P,\ \gamma)\,|\ \ dP \leqslant \frac{1}{4\pi}\,[l(\gamma)]^2 = \frac{1}{4\pi}\,[l(\pi_i^*)]^2$$

e quindi, per la definizione di $z = z_0\,(x,\ y)$,

$$a(z_0,\ \pi_i) \leqslant \frac{1}{4\pi}\,[l(\pi_i^*)]^2\,.$$

Si ha perciò, in virtù della disuguaglianza (4) del n. **9**,

$$a(z_0,\ \pi) = \sum_i\ a(z_0,\ \pi_i) \leqslant \frac{1}{4\pi}\sum_i\{l(\pi_i^*)\}^2 \leqslant \frac{1}{4\pi}\{\sum_i\ l(\pi_i^*)\}^2 =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\{l(r)\}^2 \leqslant \frac{1}{4\pi k}\,a(z,\ \pi) \leqslant \frac{1}{4k}\,a(z,\ \pi).$$

Anche la condizione c) del Teorema enunciato nel n. **7** è così provata. Ciò completa la dimostrazione di tale Teorema.

---

(¹) Si noti anche che, per gli stessi argomenti, si ha diam $\pi_i^* \leqslant l(\gamma) = l(\pi_i^*)$.

**14.** – Sussiste il seguente

L e m m a. *Sia $D$ un insieme aperto e limitato del piano $(x, y)$, siano $\alpha > 1$ e $H > 0$ due numeri reali. Se esiste un successione di funzioni $\{z_n(x, y)\}$,* A. C. T. *su $D$, per le quali si abbia*

$$\iint_D (1 + p_n^2 + q_n^2)^{\alpha/2}\, dx\, dy < H \qquad \left(p = \frac{\partial z_n}{\partial x},\ q = \frac{\partial z_n}{\partial y};\qquad n = 1, 2, \ldots\right);$$

*allora, per ogni $\varepsilon > 0$ è possibile determinare un $\delta > 0$ tale che, per ogni insieme aperto $G \subseteq D$ di misura secondo* L e b e s g u e $\mathrm{m}(G) < \delta$, *si abbia*

$$a(z_n, G) = \iint_G (1 + p_n^2 + q_n^2)^{1/2}\, dx\, dy < \varepsilon.$$

Infatti si ha, per la disuguaglianza di Schwarz,

$$\iint_G (1 + p_n^2 + q_n^2)^{1/2}\, dx\, dy \leqslant \left\{\iint_G (1 + p_n^2 + q_n^2)^{\alpha/2}\, dx\, dy\right\}^{1/\alpha} \cdot \left\{\iint_G dx\, dy\right\}^{1-(1/\alpha)}$$

e quindi

$$\iint_G (1 + p_n^2 + q_n^2)^{1/2}\, dx\, dy < H^{1/\alpha} \cdot \{\mathrm{m}(G)\}^{1-(1/\alpha)} < \varepsilon,$$

purchè sia

$$\mathrm{m}(G) < \left\{\frac{\varepsilon}{H^{1/\alpha}}\right\}^{(1/\alpha)-1} = \delta.$$

**15.** – Veniamo ora alla dimostrazione del Teorema enunciato nel n. **1**.

Tale dimostrazione sarà ottenuta facendo uso del Teorema dato nel n. **7** per livellare le funzioni di una successione minimizzante su opportuni reticolati di $D$; così come è stato fatto da L. Cesari nella Nota **[2]** per stabilire l'esistenza del minimo in problemi di forma parametrica.

Senza ridurre la generalità del nostro Teorema, possiamo sostituire la disuguaglianza (3) del suo enunciato con la disuguaglianza

$$(3') \qquad m \cdot (1 + p^2 + q^2) \leqslant F(x, y, z, p, q), \qquad m > 0,$$

e supporre che questa sia verificata per ogni $(x, y, z) \in A$.

Diciamo $i$ l'estremo inferiore finito di $\mathfrak{I}(z, D)$ al variare di $z = z(x, y)$ nella classe $W$. Diciamo $M$ una costante positiva tale che si abbia

$$F(x, y, z, 0, 0) \leqslant M$$

per ogni $(x, y, z) \in A$. Diciamo $\delta > 0$ l'estremo inferiore dei diametri dei componenti $\gamma$ della frontiera $D^*$ di $D$.

Consideriamo, per ogni intero $n$, i numeri

$$\varepsilon_n = 2^{-n} \cdot \min \{1, \delta/2\},$$

$$\mu_n = \min \{(n+1)^{-1} 2^{-n-2}, 2^{-n} M \varepsilon_n^2\} \cdot \min\{1, \delta/2\}.$$

Sia, per ogni $n$, $z = z_n(x, y)$ una funzione appartenente alla classe $W$ per la quale si abbia

$$\mathfrak{I}(z_n, D) < i + \mu_n .$$

Sia, per ogni $n$, $\tau_n$ un numero reale pel quale $0 < \tau_n < \delta$, tale che se $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ e $P_2 \equiv (x_2, y_2)$ sono due punti appartenenti a $D^*$ e distanti meno di $\tau_n$ si abbia $|\varphi(P_1) - \varphi(P_2)| < \varepsilon_n$.

**16.** – Consideriamo la successione $\{z_n(x, y)\}$ minimizzante $\mathfrak{I}(z, D)$, introdotta nel n. precedente. Avremo, in virtù di (3'),

$$m \iint_D (1 + p_n^2 + q_n^2)\, dx\, dy \leqslant \mathfrak{I}(z_n, D) \leqslant i + \mu_n < i + 1.$$

Sarà perciò possibile applicare alla successione di funzioni $\{z_n(x, y)\}$ il Lemma del n. **4** ed il Lemma del n. **14** con $\alpha = 2$.

Sia $\nu$ un intero e $\xi_\nu$ un numero reale $> 0$. In virtù dei Lemma ora citati sarà possibile determinare per ogni $\nu$ il numero $\eta_\nu$ e per ogni $n$ i numeri $\delta_{n\nu}$, con $\eta_\nu < \delta_{n\nu} < \xi_\nu$, e reticolati $\Delta_{n\nu}$ del piano $(x, y)$ mediante rette parallele agli assi $x, y$ le cui distanze sono numeri reali compresi fra $\delta_{n\nu}$ e $2\delta_{n\nu}$, in modo che, detto (2) $r$ il generico rettangolo $\in \Delta_{n\nu}$, abbia lunghezza complessiva $< \xi_\nu$ l'immagine secondo $z_n(x, y)$ dell'intersezione di ogni lato di $r$ con $D$ ed abbia area $< 5M\xi_\nu^2/m$ la superficie definita da $z = z_n(x, y)$ sull'insieme aperto $r \cdot D$, intersezione di $D$ con l'insieme dei punti interni ad $r$. Facciamo quindi successivamente

$$\xi_\nu = \min [\tau_\nu/16, \varepsilon_\nu/4, \eta_{\nu-1}/2^3, \eta_{\nu-2}/2^4, \ldots, \eta_1/2^{\nu+1}].$$

(2) Con $r$ indichiamo altresì l'insieme dei punti interni al rettangolo $r$.

Fissato $n$, le dimensioni di ogni rettangolo $r \in \Delta_{n\nu}$ sono, per ogni $\nu$, comprese fra $\delta_{n\nu}$ e $2\delta_{n\nu}$, quindi fra $\eta_\nu$ e $2\xi_\nu < \eta_{n-1}$, perciò esse sono più piccole di quelle dei rettangoli $\in \Delta_{n,\nu-1}$.

Per ogni $r \in \Delta_{n\nu}$ consideriamo l'insieme $r \cdot D$, sopra definito, la frontiera $(r \cdot D)^*$ di esso e l'insieme $z_n[(r \cdot D)^*] \equiv [(x, y, z); (x, y) \in (r \cdot D)^*, z = z_n(x, y)]$ immagine di tale frontiera secondo $z = z_n(x, y)$.

Osserviamo che ciascun componente $\alpha$ di $r.D$ è semplicemente connesso. Si noti infatti che ogni componente di $(r \cdot D)^*$ che non incontra la frontiera $r^*$ di $r$ è un componente di $D^*$ ed ha perciò diametro $> \delta$. Si osservi quindi che se la frontiera $\alpha^*$ di $\alpha$ non è connessa, ad essa appartiene almeno un continuo, componente di $(r \cdot D)^*$, che non incontra il componente di (3) $\alpha^*$ che separa $\alpha$ da $\infty$, quindi non incontra $r^*$. Ad $\alpha$ appartiene allora un componente di $D^*$ e quindi deve essere

$$\delta \geqslant \operatorname{diam} r \geqslant \operatorname{diam} \alpha \geqslant \operatorname{diam} \alpha^* > \delta,$$

la quale è contraddittoria.

Osserviamo inoltre che per ogni $n$ e $\nu$ risulta

$$\operatorname{diam} z_n[(r \cdot D)^*] < 4\varepsilon_\nu,$$

essendo, ben inteso, $r \in \Delta_{n\nu}$, $r \cdot D$ non vuoto.

Il ragionamento fatto sopra consente intanto di escludere l'esistenza di un componente di $D^*$ che abbia un punto interno ad $r$ e non incontri $r^*$.

Consideriamo oltre all'insieme $(r \cdot D)^*$ anche l'insieme $r^* \cdot D^*$. Se $r^* \cdot D^*$ è vuoto, allora nessun componente di $D^*$ incontra $r^*$; ma poichè nessuno di questi componenti può avere un punto interno ad $r^*$, ne viene che $D^*$ non incontra neppure l'insieme $r$. In questo caso è allora $(r \cdot D)^* = r^* \subseteq D$ e quindi

$$\operatorname{diam} z_n[(r \cdot D)^*] = \operatorname{diam} z_n[r^*] < 4\varepsilon_\nu/4 = \varepsilon_\nu,$$

per il modo come si sono costruiti i rettangoli $r$.

Altrimenti sia $P_0 \in r^* \cdot D^*$, sia $P \in (r \cdot D)^* \subseteq r^* + D^*$. Se $P \in D^*$ si ha

$$| z_n(P) - z_n(P_0) | < \varepsilon_\nu$$

per essere $PP_0 < \tau_\nu$.

---

(3) Cioè il continuo che costituisce la frontiera del componente del complementare di $\alpha$ che contiene punti esterni a $D$.

Se invece $P \notin D^*$ dovrà aversi $P \in r^*$ ed anche $P \in D$, perciò $P \in r^* \cdot D$. Sia allora $P_1 P_2$ l'intervallo aperto di $r^*$, diverso da $r^*$, costituente il componente di $r^* \cdot D$ cui $P$ appartiene. Sia $P_1$ che $P_2$ appartengono a $D^*$ e si ha

$$| z_n(P) - z_n(P_0) | \leqslant | z_n(P) - z_n(P_1) | + | z_n(P_1) - z_n(P_0) | < 2\varepsilon_\nu .$$

Si ha perciò, in ogni caso, se $r^* \cdot D^*$ non è vuoto e $P_0 \in r^* \cdot D^*$,

$$| z_n(P) - z_n(P_0) | < 2\varepsilon_\nu .$$

Quindi per ogni coppia $P$, $P' \in (r \cdot D)^*$ si ha, anche nel caso in cui $r^* \cdot D^*$ sia non vuoto,

$$| z_n(P) - z_n(P') | < | z_n(P) - z_n(P_0) | + | z_n(P_0) - z_n(P') | < 4\varepsilon_\nu .$$

La nostra affermazione è così completamente dimostrata.

**17.** – È perciò possibile applicare, per ogni $n = 1, 2, \ldots$ e per ogni $\nu = 1, 2, \ldots, n$, il Teorema di livellamento enunciato nel n. **7** ad ogni insieme $r \cdot D$; essendo $r \in \Delta_{n\nu}$, con la costante $k = M/m > 1$, la costante $N = 4\varepsilon_\nu$ e $(x_0, y_0) \in (r \cdot D)^*$.

Esiste allora per ogni $r \cdot D$, $r \in \Delta_{n\nu}$, un insieme aperto $\pi = \sum_i \pi_i$ ed una funzione $z = z_{n\nu}(x, y)$ che è continua su $r \cdot D + (r \cdot D)^*$, A. C. T. su $r \cdot D$, costante su ogni componente di $\pi$, tale che

$$a(z_{n\nu}, \pi) \leqslant \frac{m}{4M} a(z_n, \pi)$$

e tale che il sostegno $z_{n\nu}[r \cdot D]$ della superficie da essa definita su $r \cdot D$ appartenga al cubo $c(P_0, 15M\varepsilon_\nu/m)$.

In virtù della condizione e) del medesimo Teorema del n. **7** è inoltre $z_{n\nu}(x, y) = z_n(x, y)$ se $(x, y) \in (r \cdot D)^*$.

È perciò possibile definire su tutto $D + D^*$ una funzione $z = z_{n\nu}(x, y)$ che è ivi continua, è A. C. T. su $D$ e si riduce a $\varphi(x, y)$ su $D^*$. Tale funzione $z = z_{n\nu}(x, y)$ appartiene inoltre alla classe $W$ in virtù della ipotesi di convessità fatta sull'insieme $A$.

Si ha inoltre per ogni $r \in \Delta_{n\nu}$ e per il corripondente insieme aperto $\pi$ associato a $r \cdot D$, poichè $z = z_{n\nu}(x, y)$ è costante su ogni componente di $\pi$,

$$\mathfrak{I}(z_{n\nu}, \pi) = \iint_\pi F(x, y, z_{n\nu}, p_{n\nu}, q_{n\nu})\, dx\, dy \leqslant$$
$$\leqslant M \cdot \text{mis}\,(\pi) = M\, a(z_{n\nu}, \pi) \leqslant (1/4)\, m\, a(z_n, \pi).$$

D'altra parte è, per ogni $n$,

$$m\, a(z_n, \pi) = m \iint_\pi (1 + p_n^2 + q_n^2)^{1/2}\, dx\, dy \leqslant$$

$$\leqslant m \iint_\pi (1 + p_n^2 + q_n^2)\, dx\, dy \leqslant \iint_\pi F(x, y, z_n, p_n, q_n)\, dx\, dy.$$

Se ne deduce perciò

$$\mathfrak{I}(z_{n\nu}, \pi) \leqslant \frac{1}{4} \mathfrak{I}(z_n, \pi).$$

Risulterà quindi

$$i \leqslant \mathfrak{I}(z_{n\nu}, D) \leqslant \mathfrak{I}(z_n, D) \leqslant i + \mu_n,$$

dalla quale si deduce, seguendo il ragionamento della Nota [2] di L. CESARI,

$$\mu_n \geqslant \mathfrak{I}(z_n, D) - \mathfrak{I}(z_{n\nu}, D) = \sum_{r \in \Delta_{n\nu}} \{\mathfrak{I}(z_n, \pi) - \mathfrak{I}(z_{n\nu}, \pi)\} \geqslant \sum_{r \in \Delta_{n\nu}} \{\mathfrak{I}(z_n, \pi) - \frac{1}{4} \mathfrak{I}(z_n, \pi)\}$$

e quindi

$$\sum_{r \in \Delta_{n\nu}} \mathfrak{I}(z_n, \pi) \leqslant \frac{4}{3} \mu_n < 2\mu_n, \qquad \sum_{r \in \Delta_{n\nu}} \mathfrak{I}(z_{n\nu}, \pi) \leqslant \frac{1}{3} \mu_n < \mu_n.$$

Si ha inoltre, in virtù della condizione a) del Teorema del n. **7**,

$$\sum_{r \in \Delta_{n\nu}} \{l(\pi^*)\}^2 \leqslant \frac{1}{k} \sum_{r \in \Delta_{n\nu}} a(z_n, \pi) \leqslant \frac{1}{k}\frac{1}{m} \sum_{r \in \Delta_{n\nu}} \mathfrak{I}(z_n, \pi) \leqslant \frac{1}{M} 2\mu_n$$

e quindi, per il modo come sono scelti $\mu_n$ e $\varepsilon_n$,

$$\sum_{r \in \Delta_{n\nu}} \{ l(\pi^*) \}^2 \leqslant \varepsilon_n^2 < \varepsilon_n.$$

In particolare si ha

$$\operatorname{diam}(\pi_i^*) \leqslant l(\pi_i^*) \leqslant \varepsilon_n < \varepsilon_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

essendo $\pi_i$ il generico componente dell'insieme $\pi$.

**18.** – Seguendo sempre il ragionamento della Nota [2] di L. CESARI, facciamo le seguenti considerazioni.

Fissato $n$, consideriamo la funzione $z_n(x, y)$, $(x, y) \in D$, ed i reticolati $\Delta_{n1}$, $\Delta_{n2}, \ldots, \Delta_{nn}$ del piano $(x, y)$. Consideriamo per ogni $\nu$ e per ogni $r \in \Delta_{n\nu}$ l'insieme aperto $\pi = \sum \pi_i$ associato a $r \cdot D$ mediante il procedimento di livellamento descritto nel n. precedente, consideriamo quindi la classe $T_{n\nu}$ degli insiemi $\pi_i$ al variare di $r$ in $\Delta_{n\nu}$. Con $T_{n\nu}$ indichiamo altresì l'insieme aperto $\sum\limits_{r \in \Delta_{n\nu}} \pi = \sum\limits_{r \in \Delta_{n\nu}} \sum \pi_i$ riunione di tali insiemi $\pi_i$.

Diciamo $T'_{n1}$ la classe degli insiemi aperti $\pi_i$ che fanno parte di $T_{n1}$ e che non appartengono ad alcuno dei rettangoli aperti $r \in \Delta_{n2}$, $\Delta_{n3}, \ldots, \Delta_{n,n}$, diciamo $T'_{n,\nu}$ ($\nu = 2, 3, \ldots, n-1$) la classe costituita dagli insiemi aperti $\pi_i$, che fanno parte di $T_{n\nu}$, che non appartengono ad alcuno dei rettangoli $r \in \Delta_{n,\nu-1}$, $\Delta_{n,\nu-2}, \ldots$, $\Delta_{nn}$ e che non sono contenuti in alcuno degli insiemi $T'_{n1}, T'_{n2}, \ldots, T'_{n,\nu-1}$. Diciamo infine $T'_{n,n}$ la classe degli insiemi aperti $\pi_i$ che fanno parte di $T_{n,n}$ e non sono contenuti in $T'_{n,1}, T'_{n,2}, \ldots, T'_{n,n-1}$. Con $T'_{n,i}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) indichiamo altresì gli insiemi aperti ottenuti dalla riunione degli insiemi che appartengono alla corrispondente classe $T'_{n,\nu}$.

Parafrasando un ragionamento di L. CESARI [2] possiamo provare che se $\pi_i$ è uno degli insiemi che appartengono alla classe $T'_{n,\nu}$ allora esso non ha punti in comune con alcuno degli insiemi aperti $\pi'_j$ che appartengono ad una delle classi $T'_{n,1}, T'_{n,2}, \ldots, T'_{n,\nu-1}$.

Infatti sia $\pi_i \subset r \cdot D$, $r \in \Delta_{n,\nu}$. Poichè $\pi_i \in T'_{n,\nu}$ allora $\pi_i$ non appartiene ad alcuno degli insiemi $T'_{n,1}, T'_{n,2}, \ldots, T'_{n,\nu-1}$, quindi, se $\pi'_j$ è un insieme aperto appartenente da una delle classi $T'_{n,1}, T'_{n,2}, \ldots, T'_{n,\nu-1}$, allora $\pi_i$ non è contenuto in $\pi'_j$ e neppure $r \cdot D$ è contenuto in $\pi'_j$. D'altra parte $\pi'_j$ non è contenuto in $r \cdot D$. Perciò o $r \cdot D$ e $\pi'_j$ non hanno punti in comune, ed allora il nostro asserto è ovvio, oppure $r \cdot D$ e $\pi'_j$ hanno qualche punto in comune. In tal caso allora, poichè ciascun componente di $r \cdot D$ è semplicemente connesso ed anche $\pi'_j$ è semplicemente connesso, anche le loro frontiere $(r \cdot D)'_j{}^*$ e $\pi'_j{}^*$ devono avere almeno un punto in comune e poichè per il continuo $(\pi'_j)^*$, costituente la frontiera di $\pi'_j$, si ha diam $z_n(\pi'_j{}^*) < \varepsilon_n < \varepsilon_\nu$, si può concludere, in virtù della condizione e) del Teorema del n. 7, che $\pi'_j{}^*$ e quindi (4) $\pi'_j$ non ha alcun punto in comune con $\pi_i$.

Il nostro asserto è così completamente provato.

**19.** – Per ogni $n$ consideriamo la funzione $z = z_n(x, y)$, $(x, y) \in D$, e gli insiemi $T_{n,\nu}$, $T'_{n,\nu}$, ($\nu = 1, 2, \ldots, n$).

In virtù del n. precedente qualsiasi insieme aperto $\pi_i$ appartenente alla classe

(4) Si osservi che anche $\pi_i$ è semplicemente connesso.

$T'_{n,\nu}$ non ha punti in comune con gli insiemi aperti $\pi'_j$ appartenenti alle classi $T'_{n,1}$, $T'_{n,2}$, ..., $T'_{n,\nu-1}$.

È perciò possibile definire una funzione $z = Z_n(x, y)$, $(x, y) \in D$, che è uguale a $z = z_{n\nu}(x, y)$ su ciascun insieme $\pi_i$ che appartiene alla classe $T'_{n,\nu}$ $(\nu = 1, 2, ..., n)$ ed è uguale a $z = z_n(x, y)$ su $D - \sum_\nu T'_{n,\nu}$. La funzione $z = Z_n(x, y)$ è continua su $D + D^*$, A. C. T. su $D$ ed appartiene alla classe $W$ per le ragioni esposte nel n. **17**.

Si ha inoltre

$$i \leqslant \mathfrak{J}(Z_n, D) = \mathfrak{J}(z_n, D - \sum_\nu T'_{n,\nu}) + \sum_\nu \sum_{r \in \Delta_{n\nu}} \mathfrak{J}(z_{n,\nu}, \pi) \leqslant$$

$$\leqslant \mathfrak{J}(z_n, D - \sum_\nu T'_{n,\nu}) + \sum_\nu \mu_n \leqslant \mathfrak{J}(z_n, D) + n\mu_n < i + (n+1)\mu_n < i + \varepsilon_n,$$

dalla quale si deduce che anche la successione $\{z = Z_n(x, y)\}$, $(x, y) \in D\}$ è una successione minimizzante per il nostro funzionale.

**20.** – Ragionando come nella Nota più volte citata di L. CESARI, si può ormai provare che le funzioni $z = Z_n(x, y)$ della successione sopra definita sono ugualmente continue su $D + D^*$.

Più precisamente si può dimostrare che, comunque si dia $\varepsilon > 0$, allora, detto $s$ il più piccolo intero per il quale si ha $130 \cdot M\varepsilon_s/m < \varepsilon$ e considerato il numero $\eta_s$ definito in corrispondenza di $s$ come nel n. **16**, per ogni coppia di punti $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ appartenenti a $D + D^*$ e distanti fra loro meno di $\eta_s$ e per ogni $n > s$ si ha

$$| Z_n(x_1, y_1) - Z_n(x_2, y_2) | < \varepsilon .$$

Poichè d'altra parte le funzioni $z = Z_n(x, y)$ sono ugualmente limitate, in quanto le superficie immagini corrispondenti appartengono all'insieme limitato $A$, è possibile applicare alla successione $Z_n(x, y)$ il teorema di ASCOLI ed estrarre da questa una sottosuccessione, che per comodità supponiamo sia la stessa $Z_n(x, y)$, che converge uniformemente su $D + D^*$.

**21.** – Sia $z = z_0(x, y)$, $(x, y) \in D$, la funzione limite della successione $z = Z_n(x, y)$. Tale funzione è continua su $D + D^*$ e tale che risulti, per ogni $(x, y) \in D^*$, $z_0(x, y) = \varphi(x, y)$.

Poichè si ha, per ogni $n$,

$$m \iint_D (1 + p_n^2 + q_n^2)\, dx\, dy \leqslant \iint_D F(x, y, Z_n, p_n, q_n)\, dx\, dy = \mathfrak{J}(Z_n, D) \leqslant i + 1,$$

essendo $p_n = \partial Z_n/\partial x$, $q_n = \partial Z_n/\partial y$, possiamo dedurre dal teorema di L. TONELLI enunciato nel n. **3** che la funzione $z = z_0(x, y)$ è A. C. T. su $D$.

Il sostegno della superficie definita da $z = z_0(x, y)$ su $D + D^*$ appartiene ovviamente all'insieme $A$.

Possiamo perciò concludere che la funzione $z = z_0(x, y)$ appartiene alla classe $W$ e che perciò si ha

$$\mathfrak{J}(z_0, D) \geqslant i.$$

Poichè la condizione (3') dell'enunciato del nostro Teorema implica, in virtù del teorema di L. TONELLI enunciato nel n. **2**, la semicontinuità inferiore dell'integrale $\mathfrak{J}(z, D)$, si ha

$$\mathfrak{J}(z_0, D) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \mathfrak{J}(Z_n, D) = \lim_{n\to\infty} (i + \varepsilon_n) = i.$$

È dunque

$$\mathfrak{J}(z_0, D) = i.$$

Abbiamo così provato che nella classe $W$ esiste una funzione che rende minimo l'integrale $\mathfrak{J}(z, D)$. Il Teorema enunciato nel n. **1** è così provato.

**22.** – Un riesame della dimostrazione ed un noto ragionamento ([5]) ci consentono di affermare che la condizione d) dell'enunciato del nostro Teorema (da noi posta alle funzioni della classe $W$) può essere omessa se la disuguaglianza (3) del medesimo enunciato è verificata per $(x, y) \in D$, $z$, $p$, $q$ arbitrari e se esiste una costante $M > 0$ tale che si abbia

$$F(x, y, z, 0, 0) < M$$

per ogni $(x, y) \in D$ e per ogni $z$.

---

([5]) Ci riferiamo al ragionamento contenuto nel **n.** 19 della Nota [**8**].

## Bibliografia.


1. C. CARATHÉODORY, *Über die Begrenzung einfach-zusammenhängender Gebiete*, Math. Ann. **73**, 323-370 (1913).

2. L. CESARI, *A existence theorem of Calculus of variations for integrals on parametric surfaces*, Amer. J. Math. **74**, 265-295 (1952).

3. L. CESARI, *Contours of a Fréchet surface*, Rivista Mat. Univ. Parma **4**, 173-194 (1953).

4. L. CESARI, *A inequality for Lebesgue area*, Bull. Amer. Mat. Soc. **57**, 168 (1951).

5. H. LEBESGUE, *Sur le problème de Dirichlet*, Rend. Circ. Mat. Palermo **24**, 371-402 (1907).

6. T. RADÓ, *The isoperimetric inequality and the Lebesgue definition of surface area*, Trans. Amer. Math. Soc. **61**, 530-555 (1947).

7. L. TONELLI, *Sur la semicontinuité des intégrales doubles du Calcul de variation*, Acta Math. **53**, 325-346 (1929).

8. L. TONELLI, *L'estremo assoluto degli integrali doppi*, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa **2**, 89-130 (1933).

9. L. C. YOUNG, *Some applications of the Dirichlet integral to the theory of surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **64**, 317-355 (1948).