Rivista Mat. Univ. Parma 6, 141-155 (1955)

BIANCA MANFREDI (*)

Soluzioni numeriche in problemi di flusso lineare di calore. (**)

§ 1. – Introduzione.

Notevole è l'interesse che, specialmente in questi ultimi anni, destano i problemi relativi alla risoluzione numerica di equazioni alle derivate parziali riguardanti i più classici problemi della Fisica Matematica.

Uno dei metodi più efficaci e oggi più studiato è quello che sostituisce ai campi continui di definizione delle funzioni incognite dei vari problemi, campi discreti reticolari e, quindi, alle equazioni alle derivate parziali, traducenti il problema considerato, equazioni alle differenze parziali.

Ne segue quindi, di necessità, che tale metodo può avere validità di approssimazione del problema differenziale se, e solo se, lo schema alle differenze è *convergente* e *stabile* secondo le usuali definizioni di *convergenza* ([**3**], pag. 47) (1) e di *stabilità* ([**1**], pag. 223; [**10**], pag. 333).

L'efficacia di tale metodo di approssimazione dei problemi differenziali risulta evidente in molti lavori, dei quali ricordiamo i più significativi: I Sigg. COURANT-FRIEDRISH-LEWY [**3**] trattano della convergenza delle soluzioni alle differenze relative ai tipi fondamentali di equazioni alle derivate parziali lineari a coefficienti costanti. La stabilità di tali soluzioni viene successivamente considerata e discussa dai Sigg. O'BRIEN-HYMAN-KAPLAN [**1**].

I Sigg. RICHARDSON [**16**], CRANK-NICOLSON [**5**], LEWY [**13**], EDDY [**6**], NEUMANN-RICHTMYER [**14**], PUCCI [**15**] trattano della convergenza e della stabilità dei procedimenti approssimati per la risoluzione di sistemi di equazioni *lineari* alle differenze, mentre di problemi *non-lineari*, iperbolici e parabolici,

---

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.

(**) Ricevuto il 30-VII-1955.

(1) I numeri in parentesi quadra si riferiscono alla Bibliografia al termine del lavoro.

si occupano i Sigg. ROTHE [**17**], LAASONEN [**11**], JOHN [**8**] e i Sigg. COURANT-ISAACSON-REES [**4**].

Citiamo infine i lavori dei Sigg. FOWLER [**7**], LEUTERT [**12**] ed HILDEBRAND [**9**], tutti relativi alle soluzioni numeriche di alcuni caratteristici problemi unidimensionali lineari di propagazione del calore.

È noto ([**2**], pag. 18) come, sotto ipotesi per lo più verificate, la soluzione del *generale* problema della determinazione della temperatura in un mezzo continuo termicamente isotropo [in cui la temperatura iniziale sia funzione assegnata del posto e la temperatura (o il flusso) superficiale sia funzione assegnata del posto e del tempo] si ottiene come somma delle due temperature che competerebbero allo stesso mezzo quando: a) la temperatura (o il flusso) superficiale fosse nulla e la temperatura iniziale funzione del posto; b) la temperatura iniziale fosse nulla e la temperatura (o il flusso) superficiale fosse funzione assegnata del posto e del tempo.

La possibilità della riduzione del problema generale ai due problemi di tipo a) e b) è, in sostanza, conseguenza della supposta linearità delle equazioni che reggono il problema. Tale riducibilità resta evidentemente possibile anche quando si sostituisca al primitivo problema differenziale un problema alle differenze.

Soluzioni alle differenze di problemi di tipo a) sono studiate nei lavori [**12**] e [**9**]. Per problemi di tipo b) sono state trovate soluzioni alle differenze sia nell'ipotesi di temperatura superficiale indipendente dal tempo ([**7**], pag. 365, pag. 367), sia nel caso in cui la temperatura superficiale sia funzione polinomiale del tempo ([**7**], pag. 366).

Il presente lavoro, attraverso l'adattamento al metodo delle differenze di un classico Teorema, il *Teorema di Duhamel* ([**2**], pag. 19), vuole mostrare come i metodi di calcolo sopra ricordati possono applicarsi a problemi di propagazione del calore assai più generali di quelli fino ad oggi trattati. A tale scopo: 1) dimostreremo (nn. **2** e **3**) che per i sistemi alle differenze di problemi relativi a *flusso lineare di calore* vale un Teorema analogo a quello di DUHAMEL; 2) applicheremo (n. **4**) il Teorema stabilito alla soluzione del generale problema relativo al semispazio [2], verificando infine i risultati trovati per un espressivo caso particolare.

Una seconda Nota [3] sarà dedicata ai problemi pluridimensionali.

---

[2] Il problema numerico per lo strato piano sarà oggetto di una comunicazione al 5° Congresso dell'Unione Matematica Italiana.

[3] La Nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo di questa Rivista (*la Redazione*).

§ 2. – Notazioni e considerazioni preliminari.

2·1. – Sia assegnato un mezzo omogeneo e termicamente isotropo, di conduttività costante, che penseremo possa riempire o tutto lo spazio A o parte di esso.

In questo lavoro supporremo che le condizioni iniziali e al contorno siano tali che le superficie isoterme risultino piani paralleli e quindi le linee di flusso termico rette parallele. È classico che in tali condizioni, anche per mezzi isotropi omogenei estesi in più dimensioni, la temperatura incognita può farsi dipendere dal posto tramite una sola coordinata locale, ad esempio la distanza da un piano fisso parallelo ai piani ove la temperatura si mantiene costante. Problemi di questo tipo hanno un'immagine in quello della determinazione, sotto assegnate condizioni iniziali e agli estremi, della temperatura in una sbarra omogenea, di spessore trascurabile, di lunghezza finita, semiinfinita o infinita, sui lati termicamente isolata. Diremo in tale caso che si ha *flusso lineare di calore*.

La dipendenza dal posto tramite una sola coordinata può aversi anche in altre ipotesi, ad esempio imponendo alle grandezze caratteristiche del problema e ai dati iniziali e al contorno speciali condizioni di simmetria. In questo altro caso diremo che si ha *flusso radiale di calore* per superficie sferiche concentriche o per superficie cilindriche coassiali. Ho intenzione di trattare questo secondo tipo di problemi unidimensionali in un prossimo lavoro.

Per il problema di cui vogliamo occuparci hanno interesse solo i due casi di *flusso lineare* in mezzi limitati da piani paralleli o da mezzi occupanti un semispazio. Indicheremo nel primo caso con A' lo strato spaziale di A limitato da due piani, π_0 e π_1, nel secondo caso con A'' uno dei due semispazi in cui lo spazio A viene diviso dal piano π_0.

Supporremo, nel seguito, che, sia in A' che in A'', la temperatura dei punti del piano π_0 sia variabile col tempo e rappresentata dalla funzione continua $\varphi(t)$, mentre in A' i punti del piano π_1 siano tenuti a temperatura nulla [4].

2·2. – Il problema differenziale. Qui e in seguito sarà conveniente supporre la conduttività unitaria, il che è sempre lecito, e preventivamente rendere adimensionali tutte le equazioni del problema. Com'è evidente, senza perdere in generalità, potremo inoltre supporre unitaria la lunghezza della sbarra finita, immagine, come già abbiamo detto, di A', e pure unitario l'intervallo di tempo complessivo che viene considerato nel problema.

---

[4] Osserviamo che in A' ci si può sempre ricondurre al caso sopra considerato.

Ciò posto, fissiamo il sistema di assi cartesiani ortogonali x, t in guisa che:

1°) Il quadrato $Q \equiv \{0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ risulti il campo di definizione della funzione incognita $u(x, t)$ che dà la temperatura di un punto P (di ascissa x) di A', all'istante t.

2°) La striscia $\sum \equiv \{x \geqslant 0,\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ risulti il campo di definizione della funzione incognita $u(x, t)$ che dà la temperatura di un punto P (di ascissa x) di A'' all'istante t.

Il problema di determinare $u(x, t)$ in A' o in A'', si traduce allora analiticamente nel seguente sistema alle derivate parziali:

$$
(\mathrm{u}) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{per } (x, t) \text{ interno a } Q \text{ [oppure } (x, t) \text{ interno a } \sum], \\ u = 0 & \text{per } 0 < x \leqslant 1 \text{ (oppure } x > 0),\ t = 0\,, \\ u = 0 & \text{per } x = 1,\ 0 \leqslant t < 1 \text{ (solo nel caso di } A'), \\ u = \varphi(t) & \text{per } x = 0,\ 0 \leqslant t < 1 \text{ (in entrambi i casi di } A' \text{ e di } A''). \end{cases}
$$

E il Teorema di DUHAMEL, com'è noto, ci dà $u = u(x, t)$ quando si conosca la soluzione del sistema particolare, che chiameremo *sistema associato* al sistema (u), ottenuto da (u) facendo semplicemente $\varphi(t) \equiv 1$.

Indicheremo con (v) tale sistema associato e con $v = v(x, t)$ la sua soluzione.

2·3. – Reticoli di Q (oppure di $\sum$). Suddividiamo il lato di Q sull'asse x in un numero finito M di parti uguali e dai punti di divisione mandiamo le parallele all'asse t; analogamente suddividiamo il lato di Q sull'asse t in un numero finito N di parti uguali e dai punti di divisione mandiamo le parallele all'asse x. Si ottiene così nel quadrato Q un *reticolo* di MN maglie rettangolari uguali, i cui lati hanno rispettivamente le lunghezze

$$
(1) \qquad h = 1/M \quad \text{e} \quad l = 1/N \qquad \text{(numeri razionali)},
$$

e i cui vertici sono i punti

$$
(2) \quad (x, t) = (mh, nl) = (m/M, n/N) \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots, M;\quad n = 0, 1, 2, \ldots, N),
$$

a coordinate tutte razionali.

Analogamente costruiamo nella striscia $\sum$ un reticolo di infinite maglie rettangolari uguali, aventi le lunghezze dei lati date ancora dalle (1) e i vertici nei punti

$$(3) \qquad (x, t) = (mh, nl) = (m/M, n/N) \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots; \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, N),$$

a coordinate tutte razionali.

Nella totalità di tutti i reticoli di Q (oppure di $\sum$) ci restringiamo a considerare quelli per i quali il rapporto $l/h^2 = M^2/N$ risulta costante; porremo precisamente

$$(4) \qquad l/h^2 = M^2/N = \chi,$$

essendo $\chi = M_0^2/N_0$ con M_0 e N_0 interi prefissati. Indicheremo poi con $Q_\chi^{(M)}$ (oppure con $\sum_\chi^{(M)}$) l'insieme dei vertici del reticolo corrispondente al χ fissato e al valore di M.

Osserveremo subito che, *preso in Q un qualunque punto P a coordinate razionali esistono sempre infiniti M tali che i corrispondenti insiemi $Q_\chi^{(M)}$ contengano P.*

Invero sia $P \equiv (r'/r, s'/s)$ un punto qualunque di Q a coordinate razionali. Posto $\chi = M_0^2/N_0$ (con M_0, N_0 interi determinati), per (2) e (4) abbiamo:

$$\frac{r'}{r} = \frac{m}{M}, \qquad \frac{s'}{s} = \frac{n}{N} = \frac{nM_0^2}{N_0 M^2},$$

da cui

$$m = r' \frac{M}{r}, \qquad n = s' N_0 \frac{M^2}{s M_0^2},$$

e si vede che affinchè m e n siano interi basta prendere M multiplo contemporaneamente di r, s e M_0^2.

Detto μ il minimo comune multiplo di r, s e M_0^2, per

$$(5) \qquad M = k\mu \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

gli insiemi $Q_\chi^{(M)}$ contengono tutti il punto $P \equiv (r'/r, s'/s)$.

Si ha poi

$$Q_\chi^{(\mu)} \subset Q_\chi^{(2\mu)} \subset Q_\chi^{(3\mu)} \subset \ldots,$$

e l'insieme limite $\lim\limits_{k\to\infty} Q_\chi^{(M)}$ *non è altro che l'insieme Q^* di tutti i punti di Q a coordinate entrambe razionali.*

Analoga affermazione si ha per la striscia $\sum$.

Nel seguito si considereranno soltanto i reticoli di Q (o di $\sum$) corrispondenti al valore prefissato $\chi = M_0^2/N_0$ e ai valori di M dati da (5).

2·4. – Notazioni. Per semplicità, porremo:

$$(mh, nl) = [m, n] \tag{6}$$

e conseguentemente, ad esempio, $u(mh, nl) = u[m, n]$, $\varphi(nl) = \varphi[n]$.

Porremo inoltre

$$u[m, n] - u[m, n-1] = u_n[m, n] = u_n\,, \tag{7}$$

$$u[m-1, n-1] - 2u[m, n-1] + u[m+1, n-1] = u_{m,\bar{m}}[m, n] = u_{m,\bar{m}}\,. \tag{8}$$

Allora

$$u_n = \chi\, u_{m,\bar{m}} \tag{9}$$

è l'equazione alle differenze parziali corrispondente all'equazione alle derivate parziali dei *problemi unidimensionali di flusso lineare di calore.* E i due sistemi (u) e (v) precedenti (n. **2·2**) si trasformano ordinatamente nei due seguenti sistemi alle differenze:

$$[\mathrm{u}]\quad \begin{cases} u_n = \chi u_{m,\bar{m}} & \text{per } [m, n] \text{ interno a } Q_\chi^{(M)} \text{ (oppure } [m, n] \text{ interno a } \sum_\chi^{(M)}), \\ u = 0 & \text{per } 0 < m \leqslant M \text{ (oppure } m > 0),\ n = 0, \\ u = 0 & \text{per } m = M,\ 0 \leqslant n < N \text{ (solo nel caso di } A'), \\ u = \varphi[n] & \text{per } m = 0,\ 0 \leqslant n < N \text{ (in entrambi i casi di } A' \text{ e di } A''); \end{cases}$$

$$[\mathrm{v}]\quad \begin{cases} v_n = \chi v_{m,\bar{m}} & \text{per } [m, n] \text{ interno a } Q_\chi^{(M)} \text{ (oppure } [m, n] \text{ interno a } \sum_\chi^{(M)}), \\ v = 0 & \text{per } 0 < m \leqslant M \text{ (oppure } m > 0),\ n = 0, \\ v = 0 & \text{per } m = M,\ 0 \leqslant n < N \text{ (solo nel caso di } A'), \\ v = 1 & \text{per } m = 0,\ 0 \leqslant n < N \text{ (in entrambi i casi di } A' \text{ e di } A''). \end{cases}$$

Il sistema [u] (*oppure il sistema* [v]) *ha una ed una sola soluzione.* Ciò si vede facilmente tenendo presente che, per (7), (8) e (9), il valore $u[m, n]$ (oppure

$v[m, n]$) è determinato univocamente dai tre valori assunti nei vertici $[m-1, n-1]$, $[m, n-1]$, $[m+1, n-1]$; ciascuno di tali valori è a sua volta determinato univocamente in modo analogo e così via fino ai valori iniziali.

La soluzione di [u] s'indicherà con $u^{(M)} = u^{(M)}[m, n] = u^{(M)}(mh, nl) \doteq u^{(M)}(x, t)$. Analogamente la soluzione di [v] s'indicherà con $v^{(M)} = v^{(M)}[m, n] = v^{(M)}[mh, nl] = = v^{(M)}(x, t)$.

§ 3. – L'analogo del Teorema di Duhamel.

3·1. – Premettiamo la seguente

Definizione. La successione $u^{(M)}(x, t)$ $(M = k\mu;\ k = 1, 2, \ldots)$ si dirà *uniformemente convergente in modo asintotico a* $u(x, t)$ *in* Q^* (*oppure in* $\sum^*$), quando preso un $\varepsilon > 0$ è possibile determinare un intero k_ε tale che sia

$$|\,u^{(M)}(x, t) - u(x, t)\,| < \varepsilon \qquad (M = k\mu)$$

per ogni $k > k_\varepsilon$ e per ogni $(x, t) \in Q_\chi^{(M)}$ [oppure per ogni $(x, t) \in \sum_\chi^{(M)}$].

Ciò premesso vale il seguente

Teorema. *La soluzione* $u^{(M)}$ *si esprime mediante* $v^{(M)}$ *nel modo seguente*:

$$u^{(M)}[m, n] = \sum_{\nu=0}^{n} \varphi[\nu]\{v^{(M)}[m, n-\nu] - v^{(M)}[m, n-\nu-1]\}, \tag{10}$$

ove si ponga $v^{(M)}[m, -1] = 0$. *Inoltre*: 1°) *le due successioni* $u^{(M)}$, $v^{(M)}$, $(M = k\mu;$ $k = 1, 2, \ldots)$ *sono insieme uniformemente convergenti in modo asintotico in* Q^* (*oppure in* $\sum^*$); 2°) *le funzioni* $u^{(M)}$, $v^{(M)}$ *sono insieme stabili* (5).

Conviene *sottolineare* che la (10), come la classica formula del DUHAMEL, permette di dedurre (*passo-passo*) dalla soluzione particolare $v^{(M)}[m, n]$ la soluzione generale $u^{(M)}[m, n]$: per tale ragione, nel seguito, la $v^{(M)}[m, n]$ si chiamerà la *soluzione base* del nostro problema.

Notiamo che, per (2) e (6), la (10) si può anche scrivere

$$u^{(M)}(x, t) = \sum_{\nu=1}^{n} \varphi(\nu l)\{v^{(M)}(x, t-\nu l) - v^{(M)}(x, t-(\nu+1)l)\}. \tag{10'}$$

---

(5) O meglio *debolmente stabili* (cfr. [1], pag. 223), intendendo, con tale affermazione, che l'effetto di ogni errore d'arrotondamento non cresce al crescere del tempo.

Una formula analoga a (10), o a (10′), può ottenersi facilmente anche nel caso in cui, anzichè la temperatura, sia assegnato sul contorno il flusso di calore quale funzione del tempo.

3·2. – Dimostrazione. a) Consideriamo i prodotti

$$\varphi[\nu]\, v^{(M)}[m, n-\nu] \qquad (\nu = 0, 1, 2, ..., n). \tag{11}$$

Ciascuno di essi gode delle seguenti proprietà: 1º) verifica l'equazione alle differenze (9) in quanto alla (9) soddisfa la funzione $v^{(M)}$; 2º) s'annulla per $0 < m \leqslant M$ (oppure $m > 0$) e $n = \nu$, inoltre, soltanto nel caso di A', s'annulla per $m = M$ e $n \geqslant \nu$; 3º) è uguale a $\varphi[\nu]$ per $m = 0$ e $n \geqslant \nu$.

Analoghe affermazioni valgono per i prodotti

$$\varphi[\nu]\, v^{(M)}[m, n-\nu-1]. \tag{12}$$

Ne segue che la differenza di due prodotti del tipo (11) e (12), corrispondenti ad uno stesso ν, gode delle proprietà 1º) e 2º); è nulla per $m = 0$ e $n > \nu$ ed uguale a $\varphi[\nu]$ per $m = 0$ e $n = \nu$. La somma di tali differenze, data dal secondo membro di (10), soddisfa perciò al sistema [u] ed è pertanto la soluzione $u^{(M)}$.

b) Scriviamo la (10′) nella forma

$$u^{(M)}(x, t) = \sum_{\nu=0}^{n} \varphi(\nu l)\, \frac{v^{(M)}(x, t-\nu l) - v^{(M)}(x, t-\nu l - l)}{l}\, l \tag{13}$$

e poniamo

$$\alpha^{(M)}(x, t-\nu l) = \varphi(\nu l) \left\{ \frac{v^{(M)}(x, t-\nu l) - v^{(M)}(x, t-\nu l - l)}{l} - \frac{\partial v(x, t-\nu l)}{\partial t} \right\}.$$

Se la successione $v^{(M)}(x, t)$ ($M = k\mu$; $k = 1, 2, ...$) è in Q^* (oppure in $\sum^*$) uniformemente convergente in modo asintotico a $v(x, t)$, $\alpha^{(M)}(x, t-\nu l)$ è uniformemente convergente in modo asintotico a zero ([**3**], pag. 64), vale a dire preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$ esiste un $k_\varepsilon > 0$ tale che sia

$$| \alpha^{(M)}(x, t-\nu l) | < \varepsilon, \tag{14}$$

per ogni $k > k_\varepsilon$ e per ogni $(x, t-\nu l)$ di Q^* (o di $\sum^*$).

Ne risulta

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n} \alpha^{(M)} l\right| \leqslant \sum_{\nu=0}^{n} |\alpha^{(M)}| \, l < \varepsilon \sum_{\nu=0}^{n} l < \varepsilon ,$$

per ogni $k > k_\varepsilon$ e per ogni $(x, t - \nu l)$ di Q^* (o di $\sum^*$).

Ma per la (13) si ha:

$$u^{(M)}(x, t) = \sum_{\nu=0}^{n} \alpha^{(M)} l + \sum_{\nu=0}^{n} \varphi(\nu l) \frac{\partial v(x, t - \nu l)}{\partial t} l ,$$

da cui segue, poichè nel secondo membro l'ultimo termine è uniformemente convergente a

$$\int_0^t \varphi(\tau) \frac{\partial v(x, t - \tau)}{\partial t} d\tau = u(x, t) , \tag{15}$$

quanto si doveva dimostrare, essendo la (15) la classica formula che esprime il *Teorema del Duhamel* ([**2**], formula (3) di pag. 20).

c) L'ultima affermazione del Teorema risulta subito tenendo presente il criterio di Hildebrand [6] e che, per la (10), le funzioni $u^{(M)}$ e $v^{(M)}$ sono relative ad uno stesso valore della costante χ.

§ 4. – Il problema generale della sbarra semiinfinita [7].

4·1. – Espressioni della soluzione base $v^{(M)}[m, n]$. Tali espressioni, con qualche lieve modifica per seguire le nostre notazioni, sono state date dalla Fowler ([**7**], pag. 365), e sono le seguenti:

$$v^{(M)}[m, n] = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} (1 - 2\chi + 2\chi \cos \xi)^n \frac{\operatorname{sen} m\xi}{\xi} d\xi , \tag{16}$$

$$v^{(M)}[m, n] = 1 - \chi^n \sum_{r=-n}^{n} \theta_{m+r} P_{n+r}(n). \tag{17}$$

---

(6) Tale criterio applicato alle $u^{(M)}$ e $v^{(M)}$ ci dice che « condizione necessaria e sufficiente affinchè una di tali funzioni sia stabile è che sia $\chi \leqslant 1/2$ » (cfr. [**10**], pag. 337).

(7) Per il problema della sbarra finita vedasi loc. cit. in (2).

dove è

$$\theta_{m+r} = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad m+r>0\,, \\ 0 & \text{per} \quad m+r=0\,, \\ -1 & \text{per} \quad m+r<0\,, \end{cases}$$

e $P_r(n)$ è il coefficiente di z^r nello sviluppo di $\left\{1+\left(\frac{1}{\chi}-2\right)z+z^2\right\}^n$ secondo le potenze di z.

La convergenza dell'integrale $I_{m,n}$ *a secondo membro di* (16) si può vedere, ad esempio, nel modo seguente. Risulta subito $I_{0,n}=0$ qualunque sia n. È poi

$$I_{m,0} = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} m\xi}{\xi}\, d\xi\,,$$

e si ha, per ogni coppia p, q di numeri positivi fra loro indipendenti, in virtù del secondo teorema della media,

$$\int_p^q \frac{\operatorname{sen} m\xi}{\xi}\, d\xi = \frac{1}{p}\int_p^{\xi_0} \operatorname{sen} m\xi\, d\xi\,, \tag{18}$$

con ξ_0 valore conveniente interno all'intervallo (p, q), e quindi

$$\left|\int_p^q \frac{\operatorname{sen} m\xi}{\xi}\, d\xi\right| \leqslant \frac{2}{mp}\,, \tag{19}$$

da cui segue la convergenza di $I_{m,0}$. L'integrale

$$I_{m,1} = \int_0^{+\infty} (1-2\chi+2\chi\cos\xi)\,\frac{\operatorname{sen} m\xi}{\xi}\, d\xi$$

si spezza, a meno di fattori costanti, nell'integrale $I_{m,0}$ e nell'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{\cos\xi\cdot\operatorname{sen} m\xi}{\xi}\, d\xi$. Per quest'ultimo si ha, per ogni coppia p, q di numeri positivi fra loro indipendenti,

$$\int_p^q \frac{\cos\xi\cdot\operatorname{sen} m\xi}{\xi}\,d\xi = \frac{1}{p}\int_p^{\xi_0}\cos\xi\cdot\operatorname{sen} m\xi\,d\xi\,,$$

con ξ_0 valore conveniente interno all'intervallo $(p,\ q)$; ed essendo poi $\cos\xi\cdot\operatorname{sen} m\xi = \frac{1}{2}\left\{\operatorname{sen}(m+1)\xi + \operatorname{sen}(m-1)\xi\right\}$, si può successivamente maggiorare conformemente a (19); in definitiva risulta la convergenza anche di $I_{m,1}$. In modo analogo si ragiona per stabilire la convergenza di $I_{m,2}$, $I_{m,3}$, ..., tenendo presente che è $\cos^2\xi\cdot\operatorname{sen} m\xi = \frac{1}{2}\left\{\cos\xi\cdot\operatorname{sen}(m+1)\xi + \right.$ $\left. + \cos\xi\cdot\operatorname{sen}(m-1)\xi\right\} = \frac{1}{4}\left\{\operatorname{sen}(m+2)\xi + 2\operatorname{sen} m\xi + \operatorname{sen}(m-2)\xi\right\}$, e così via per $\cos^3\xi\cdot\operatorname{sen} m\xi$, ...

4·2. – Uniforme convergenza in modo asintotico, in $\sum^*$, della $v^{(M)}[m, n]$ alla $v(x, t)$. Stabilità di $v^{(M)}[m, n]$. a) Com'è noto ([**2**], pag. 41) si ha

$$v(x,t) = \operatorname{erfc}\left\{x/(2\sqrt{t})\right\}, \tag{20}$$

ossia ([**2**], pag. 371)

$$v(x,t) = 1 - \operatorname{erf}\left\{x/(2\sqrt{t})\right\} = 1 - \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda^2 t}\,\frac{\operatorname{sen}\lambda x}{\lambda}\,d\lambda\,. \tag{20'}$$

Qui l'ultimo membro presenta evidenti analogie di forma con l'espressione (16) di $v^{(M)}[m, n]$; per accrescere tali analogie ricordiamo che, per le (3) e (4), è $m = Mx$, $n = \dfrac{M^2}{\chi}t$, e poniamo $M\xi = \lambda$, allora la (16) diventa

$$v^{(M)}(x,t) = 1 - \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left\{1 - 2\chi + 2\chi\cos(\lambda/M)\right\}^{M^2t/\chi}\,\frac{\operatorname{sen}\lambda x}{\lambda}\,d\lambda\,. \tag{16'}$$

Notiamo ora che è

$$\lim_{M\to\infty}\left\{1 - 2\chi + 2\chi\cos(\lambda/M)\right\}^{M^2t/\chi} =$$

$$= \lim_{M\to\infty}\left\{1 - 2\chi + 2\chi\left(1 - \frac{\lambda^2}{2M^2} + \frac{\lambda^4}{24M^4} - \dots\right)\right\}^{M^2t/\chi} =$$

$$= \lim_{M\to\infty}\left(1 - \frac{\lambda^2\chi}{M^2} + \frac{\lambda^4\chi}{12M^4} - \dots\right)^{M^2t/\chi} = \lim_{M\to\infty}\left(1 - \frac{\lambda^2\chi}{M^2}\right)^{M^2t/\chi} = e^{-\lambda^2 t}.$$

Per concludere allora che è proprio

$$\lim_{M\to\infty} v^{(M)}(x, t) = v(x, t)\,, \tag{21}$$

basterà provare che è

$$\lim_{M\to\infty} \int_0^{+\infty} \{1 - 2\chi + 2\chi \cos(\lambda/M)\}^{M^2t/\chi} \frac{\operatorname{sen} \lambda x}{\lambda}\, d\lambda =$$

$$= \int_0^{+\infty} \lim_{M\to\infty} \{1 - 2\chi + 2\chi \cos(\lambda/M)\}^{M^2t/\chi} \frac{\operatorname{sen} \lambda x}{\lambda}\, d\lambda\,,$$

uguaglianza lecita perchè: 1°) l'integrale $I_{m,n}$ è convergente per ogni m e n; 2°) la funzione $e^{-\lambda^2 t}\{\operatorname{sen}(\lambda x)/\lambda\}$ è continua rispetto al punto (x, t, λ) con $\lambda > 0$; 3°) l'integrale $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda^2 t} \frac{\operatorname{sen} \lambda x}{\lambda}\, d\lambda$ è uniformemente convergente rispetto ad (x, t). Invero si ha, per ogni coppia p, q di numeri positivi fra loro indipendenti,

$$\int_p^q e^{-\lambda^2 t} \frac{\operatorname{sen} \lambda x}{\lambda}\, d\lambda = \frac{e^{-p^2 t}}{p} \int_p^{\xi_0} \operatorname{sen} \lambda x \cdot d\lambda\,,$$

con ξ_0 valore conveniente interno all'intervallo (p, q), e quindi

$$\left| \int_p^{+\infty} e^{-\lambda^2 t} \frac{\operatorname{sen} \lambda x}{\lambda}\, d\lambda \right| < \frac{2}{p}\,,$$

dove il secondo membro diventa piccolo a piacere al crescere di p.

b) Infine, come già abbiamo osservato nel n. **3·2**, la $v^{(M)}[m, n]$ è stabile, quando la costante χ soddisfa la limitazione

$$\chi \leqslant 1/2\,. \tag{22}$$

4·3. – Espressioni della soluzione generale $u^{(M)}[m, n]$. Tali espressioni si ottengono facilmente sostituendo nella (10) le espressioni di $v^{(M)}[m, n]$ date dalle (16) e (17), una volta assegnato lo spettro di valori $\varphi(n)$. In questo appunto sta la notevole importanza della formula (10).

4·4. – Caso particolare di $\varphi(t) \equiv t$. Un simile caso particolare non ci sembra inutile a chiusura del lavoro.

Da $\varphi(t) \equiv t$ segue, per le nostre notazioni, $\varphi[n] = \chi n/M^2$, onde per la (10) e la (16)

$$u^{(M)}[m, n] = \frac{2\chi}{\pi M^2}\int_0^{+\infty}(1-2\chi+2\chi\cos\xi)^n \sum_{\nu=1}^{n}\nu\{(1-2\chi+2\chi\cos\xi)^{-\nu-1} - (1-2\chi+2\chi\cos\xi)^{-\nu}\}\frac{\operatorname{sen} m\xi}{\xi}\,d\xi\,,$$

od anche

$$u^{(M)}[m, n] = \frac{1}{\pi M^2}\int_0^{+\infty}\frac{(1-2\chi+2\chi\cos\xi)^n - n(1-2\chi+2\chi\cos\xi) + (n-1)}{1-\cos\xi}\,\frac{\operatorname{sen} m\xi}{\xi}\,d\xi\,. \tag{23}$$

Applicando invece la (17), la $u^{(M)}[m, n]$ si esprime nella forma

$$u^{(M)}[m, n] = \frac{\chi}{M^2}\sum_{\nu=1}^{n}\nu\Big\{\chi^{n-\nu-1}\sum_{r=-(n-\nu-1)}^{n-\nu-1}\theta_{m+r}\,P_{n-\nu-1+r}(n-\nu-1) - \chi^{n-\nu}\sum_{r=-(n-\nu)}^{n-\nu}\theta_{m+r}\,P_{n-,}(n-\nu)\Big\}. \tag{24}$$

Per esempio calcoliamo il valore approssimato di $u(1/3,\ 1/36)$. Fissiamo $\chi = 1/3$ e quindi (cfr. n. **2·3**) $M = 6$. Quindi si ha $m = 2$, $n = 3$, $\varphi[n] = (1/108)n$. Per la (24) è allora

$$u^{(6)}(1/3, 1/36) = u^{(6)}[2, 3] = (1/108)\sum_{\nu=1}^{3}\nu\Big\{(1/3)^{2-\nu}\sum_{r=-(2-\nu)}^{2-\nu}P_{2-\nu+r}(2-\nu) - (1/3)^{3-\nu}\sum_{r=-(3-\nu)}^{3-\nu}\theta_{2+r}\,P_{3-\nu+r}(3-\nu)\Big\},$$

cioè eseguendo i calcoli si trova

$$u^{(6)}(1/3, 1/36) = 1/972 = 0{,}00102\ldots\,. \tag{25}$$

Applicando direttamente la (10) si trova

$$u^{(6)}[2,3] = (1/108)\{v^{(6)}[2,2] - v^{(6)}[2,1] + 2(v^{(6)}[2,1] - v^{(6)}[2,0]) + 3(v^{(6)}[2,0])\},$$

da cui discende subito il risultato (25) essendo, per la (17), $v^{(6)}[2,0] = v^{(6)}[2,1] = 0$ e $v^{(6)}[2,2] = 1/9$.

Si ha invece ([**2**], pag. 45)

$$u(1/3, 1/36) = (1/36)4i^2 \operatorname{erfc} \frac{1/3}{2\sqrt{1/36}} = 0{,}00155 \ldots, \tag{26}$$

da cui risulta che $u^{(6)}(1/3, 1/36)$ approssima il valore dato da (26) a meno di 10^{-3} per difetto.

Bibliografia.

[**1**]. G. O'Brien, M. Hyman, S. Kaplan, *A study of the numerical solution of partial differential equations*, J. Math. and Phys. **29**, 223-251 (1951).

[**2**]. H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of heat in solids*, Clarendon, Oxford 1948.

[**3**]. R. Courant, K. Friedrisch, H. Lewy, *Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik*, Math. Ann. **100**, 32-74 (1928).

[**4**]. R. Courant, E. Isaacson and M. Rees, *On the solution of non linear hyperbolic differential equations by finite differences*, Communications Appl. Math. New York, **5**, 243-255 (1952).

[**5**]. J. Crank, P. Nicolson, *A pratical method for the numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat conduction type*, Proc. Camb. Phil. Soc. **43**, 50-67 (1947).

[**6**]. R. P. Eddy, *Stability in the numerical solution of initial value problems in partial differential equations*, Naval Ordnance Laboratory Memorandum 10232 (1949).

[**7**]. C. M. Fowler, *Analysis of numerical solutions of transient heat-flow problems*, Q. Appl. Math. **3**, 361-376 (1945).

[**8**]. F. John, *On integration of parabolic equations by difference methods*, Communications Appl. Math. **5**, 155-211 (1952).

[**9**]. F. B. Hildebrand, *On the convergence of numerical solutions of the heat-flow equation*, J. Math. and Phys. **31**, 35-41 (1952).

[**10**]. F. B. Hildebrand, *Methods of applied mathematics*, Prentice-Hall, New York 1954.

[11]. P. LAASONEN, *Über eine Methode zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung*, Acta Math. **81**, 309-317 (1949).

[12]. W. LEUTERT, *On the convergence of unstable approximate solutions of the heat equation to the exact solution*, J. Math. and Phys. **30**, 245-251 (1952).

[13]. H. LEWY, *On the convergence of solutions of difference equations*, Studies and Essay, COURANT Anniversary Volume, Interscience, New York, 211-214 (1948).

[14]. J. NEUMANN, R. D. RICHTMYER, *A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks*, J. Appl. Phys. **21**, 232-237 (1950).

[15]. C. PUCCI, *Studio col metodo delle differenze di un problema di Cauchy relativo ad equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo parabolico*, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa, (3) **7**, 205-215 (1953).

[16]. L. F. RICHARDSON, *The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations*, Phil. Trans. R. S. London (A) **210**, 307-357 (1910).

[17]. E. ROTHE, *Zweidimensionale parabolische Randwertaufgaben als Grenzfall eindimensionaler Randwertaufgaben*, Math. Ann. **102**, 650-670 (1930).