Rivista Mat. Univ. Parma 6, 321-348 (1955)

ANTONIO MAMBRIANI (*)

La pluriderivazione e una classificazione delle equazioni differenziali. (**)

§ 1. - Introduzione.

1·1. - Assegnate n funzioni $X_1 = X_1(x_1, \ldots, x_n)$, ..., $X_n = X_n(x_1, \ldots, x_n)$, delle n variabili indipendenti $x_1, \ldots, x_n$, resta individuato l'operatore

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_{x_1,\ldots,x_n} = X_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + X_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

alle derivate (parziali, certamente se $n > 1$) del primo ordine, lineare e omogeneo. Intendo mostrare che agli operatori aventi la forma di $\mathfrak{D}$ spetta un posto fondamentale nell'Analisi. Chiamo brevemente *pluriderivatori* tali operatori e *pluriderivazione* la corrispondente operazione.

Si constatano facilmente (cfr. n. **2·2**) i seguenti due fatti di rilievo:

1°) *Le regole di pluriderivazione sono quelle stesse della derivazione.*

2°) *Combinando linearmente, con coefficienti funzioni delle variabili x_1, ..., x_n, un numero finito di pluriderivatori con queste variabili, si ottiene ancora un pluriderivatore con tali variabili.*

Ne segue che, nello spazio delle n variabili $x_1, \ldots, x_n$, se ai *derivatori* $\partial/\partial x_1$, ..., $\partial/\partial x_n$ e ai corrispondenti *antiderivatori* $(\partial/\partial x_1)^{-1}, \ldots, (\partial/\partial x_n)^{-1}$ si associano

(*) Professore o. della Università di Parma. Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.

(**) Comunicazione tenuta al 5° Congresso della « Unione Matematica Italiana » (Pavia-Torino, 6-12 ottobre 1955).

gli infiniti possibili pluriderivatori $\mathfrak{D}$ e gli eventuali loro inversi $\mathfrak{D}^{-1}$ [*antipluriderivatori* (cfr. § **3**)], l'ordinario Calcolo differenziale e integrale viene ad ampliarsi e a potenziarsi dando luogo ad un più generale *Calcolo pluriderivazionale e antipluriderivazionale* che mi sembra importante di trattare.

Nel presente lavoro cerco, appunto, di fissare le basi di questo Calcolo ampliato.

1·2. – Nel § **2** studio la pluriderivazione. Mi giovo di un utile risultato ottenuto dalla Signorina MANFREDI (1), dal quale si deduce che *ogni pluriderivatore*

$$(1\cdot2)_1 \qquad X_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + X_{k-1} \frac{\partial}{\partial x_{k-1}} + \frac{\partial}{\partial x_k} + X_{k+1} \frac{\partial}{\partial x_{k+1}} + \ldots + X_n \frac{\partial}{\partial x_n},$$

avente un coefficiente X_k eguale all'unità, può riguardarsi come un operatore la cui parte derivazionale è data solo dal derivatore $\partial/\partial x_k$. A un tale operatore ho trovato appropriato il nome di *derivatore plurimo rispetto ad x_k* (cfr. n. **2·4**). Risulta poi che *in generale un pluriderivatore è il prodotto (ordinato) di un derivatore plurimo per una funzione.*

Nel § **3** studio la antipluriderivazione. Chiamo *antiderivatore plurimo* l'inverso di un derivatore plurimo $(1\cdot2)_1$ [cfr. n. **3·3**]: *in esso la parte antiderivazionale è data solo dall'antiderivatore $(\partial/\partial x_k)^{-1}$.* Risulta poi che *in generale un antipluriderivatore è uguale al prodotto (ordinato) di una funzione per un antiderivatore plurimo.* Fisso i concetti di *costanti pluriderivazionali per $\mathfrak{D}$* e di *costante pluriderivazionale arbitraria per $\mathfrak{D}$.* Inoltre fisso il concetto di *variabile pluriderivazionale indipendente per $\mathfrak{D}$*, la quale ha per $\mathfrak{D}$ lo stesso ufficio della variabile indipendente x per il derivatore $\mathrm{D} = \mathrm{d}/\mathrm{d}x$.

1·3. – Nel § **4** introduco per la totalità delle equazioni differenziali (ordinarie e alle derivate parziali), qualunque sia il numero delle variabili indipendenti, il concetto di **specie**, stabilendo per tali equazioni la classificazione in *equazioni differenziali di prima specie, equazioni differenziali di seconda specie,* ecc. . Questa classificazione si unisce a due conseguenze notevoli:

---

(1) B. MANFREDI, *Decomposizione in prodotto di operazioni elementari delle espressioni alle derivate parziali, del primo ordine e totalmente lineari*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) **4**, 381-390 (1949). In tale lavoro la MANFREDI completa alcune questioni della sua Tesi di laurea (anno accad. 1940-1941), della quale sono stato il relatore.

1ª Conseguenza. *Ciascuno dei vari noti teoremi di esistenza e unicità delle equazioni differenziali (ordinarie e alle derivate parziali) si può applicare, con qualche opportuna variante, ad una classe enormemente più vasta di equazioni differenziali.*

2ª Conseguenza. *Ciascuno dei noti metodi risolutivi delle varie classi di equazioni differenziali (ordinarie e alle derivate parziali) risolubili in termini finiti si può applicare, con qualche opportuna variante, ad una classe enormemente più vasta di equazioni differenziali.*

Tali due conseguenze conducono a formulare una

3ª Conseguenza. *La pluriderivazione rende possibile una trattazione delle equazioni differenziali senza dovere precisare il numero delle variabili indipendenti.*

Circa la prima conseguenza rimando a prossimi lavori miei e di collaboratori; della seconda conseguenza mi occupo nel § **5**, rinviando ad altre occasioni svariati completamenti.

§ 2. – La pluriderivazione.

2·1. – Date (in un certo campo) n funzioni $X_1 = X_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, X_n = X_n(x_1, \ldots, x_n)$, resta individuato l'operatore

$$\mathfrak{D} = X_1(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + X_n(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_n}$$

alle derivate (parziali, certamente se $n > 1$) del primo ordine, lineare e omogeneo. Chiamo brevemente tale operatore $\mathfrak{D}$ un *pluriderivatore*: $\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n$ sono *i derivatori di* $\mathfrak{D}$, e $X_1, \ldots, X_n$ sono *i coefficienti* (o *i moltiplicatori interni*) *di* $\mathfrak{D}$. L'operazione corrispondente a $\mathfrak{D}$ si dirà *la pluriderivazione secondo* $\mathfrak{D}$ od anche *la* $\mathfrak{D}$*-pluriderivazione*; e se è

$$\mathfrak{D}f(x_1, \ldots, x_n) = F(x_1, \ldots, x_n)$$

si dirà che *la* $\mathfrak{D}$*-pluriderivata di* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *è la funzione* $F(x_1, \ldots, x_n)$. In particolare si ha

$$(2\cdot 1)_1 \qquad \mathfrak{D}x_1 = X_1(x_1, \ldots, x_n), \quad \ldots, \quad \mathfrak{D}x_n = X_n(x_1, \ldots, x_n),$$

cioè: *i coefficienti di* $\mathfrak{D}$ *sono, ordinatamente, le* $\mathfrak{D}$*-pluriderivate delle variabili indipendenti*. Ne segue che in generale si può scrivere:

$$(2 \cdot 1)_2 \qquad \mathfrak{D} = (\mathfrak{D}x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + (\mathfrak{D}x_n) \frac{\partial}{\partial x_n} .$$

Un esempio notevole di pluriderivatore è dato dal *differenziatore*

$$\mathrm{d} = (\mathrm{d}x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + (\mathrm{d}x_n) \frac{\partial}{\partial x_n} ;$$

altro esempio interessante è

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n} ,$$

che dirò *il pluriderivatore di Euler* per la considerazione fattane da EULER relativamente alle funzioni omogenee.

Un termine non nullo di $\mathfrak{D}$, ossia un operatore del tipo

$$X_r(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_r} ,$$

formato dal prodotto (ordinato) del derivatore rispetto ad x_r per il coefficiente $X_r(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$, si dirà un *monoderivatore di variabile derivazionale* x_r: fino da ABEL è stato considerato il monoderivatore $x\,\mathrm{D} = x \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$. La somma di due termini non nulli di $\mathfrak{D}$ come

$$X_r(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_r} + X_s(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_s} \qquad (r \neq s, \quad X_r \neq 0, \quad X_s \neq 0)$$

si dirà un *biderivatore di variabili derivazionali* x_r *e* x_s. E così via. Infine, $\mathfrak{D}$ stesso, se nessuno dei coefficienti è identicamente nullo, si preciserà chiamandolo un *n-derivatore di variabili derivazionali* $x_1, \ldots, x_n$.

2·2. – L'importanza della pluriderivazione si avverte subito notando le due seguenti sue proprietà, facili a vericare.

1°) *Le regole di pluriderivazione sono quelle stesse della derivazione.* Precisamente, sotto ipotesi manifeste per le funzioni

$$f = f(x_1, \ldots, x_n), \qquad g = g(x_1, \ldots, x_n), \qquad \Phi(u_1, \ldots, u_m),$$

$$\varphi_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \quad \ldots, \quad \varphi_m = \varphi_m(x_1, \ldots, x_n)$$

[indicando con $\Phi(u_1, ..., u_m)$, ..., $\Phi_m(u_1, ..., u_m)$ ordinatamente le derivate di $\Phi(u_1, ..., u_m)$ rispetto ad u_1, ..., u_m], risulta:

$$\mathfrak{D}(f \pm g) = \mathfrak{D}f \pm \mathfrak{D}g,$$

$$\mathfrak{D}(f \cdot g) = (\mathfrak{D}f)\cdot g + f \cdot (\mathfrak{D}g), \qquad \mathfrak{D}(f/g) = \{ (\mathfrak{D}f)\cdot g - f\cdot(\mathfrak{D}g) \}/g^2,$$

$$\mathfrak{D}\Phi(\varphi_1, ..., \varphi_m) = \Phi_1(\varphi_1, ..., \varphi_m)\cdot\mathfrak{D}\varphi_1 + ... + \Phi_m(\varphi_1, ..., \varphi_m)\cdot\mathfrak{D}\varphi_m,$$

formule esprimenti, ordinatamente, *le regole di pluriderivazione della somma e della differenza, del prodotto, del rapporto, della funzione composta.*

2°) *Una combinazione lineare, con coefficienti funzioni delle variabili* $x_1, ..., x_n$, *di un numero finito di pluriderivatori con queste variabili, è ancora un pluriderivatore con tali variabili.*

2·3. – Per un pluriderivatore vale una utile scomposizione in fattori, indicata dalla Signorina MANFREDI (2), precisamente:

Un pluriderivatore, sotto ipotesi alquanto generali, si può scomporre, qualunque sia il numero delle variabili indipendenti, nel prodotto ordinato di quattro operatori elementari.

Ecco, su ciò, vari chiarimenti e complementi.

Il pluriderivatore

$$\mathfrak{D} = X_1(x_1, x_2, ..., x_n)\frac{\partial}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, ..., x_n)\frac{\partial}{\partial x_2} + ... + X_n(x_1, x_2, ..., x_n)\frac{\partial}{\partial x_n}$$

abbia uno dei suoi coefficienti, ad esempio il primo $X_1(x_1, x_2, ..., x_n)$, *mai nullo* nel campo che si considera. Formiamo il sistema differenziale ordinario (di $n-1$ equazioni)

$$(2\cdot3)_1 \qquad \frac{dx_k}{dx_1} = \frac{X_k(x_1, x_2, ..., x_n)}{X_1(x_1, x_2, ..., x_n)} \qquad (k = 2, 3, ..., n),$$

e supponiamo che esso sia risolubile e che la sua soluzione generale sia

$$(2\cdot3)_2 \qquad x_k = \gamma_k(x_1, c_2, ..., c_n) \qquad (k = 2, 3, ..., n)$$

---

(2) Cfr. loc. cit. in (1).

con $c_2, \ldots, c_n$ costanti arbitrarie. Le $(2\cdot 3)_2$ risolute rispetto a $c_2, \ldots, c_n$ diano

$$(2\cdot 3)_3 \qquad c_k = \omega_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (k = 2, 3, \ldots, n).$$

Sarà allora, identicamente,

$$(2\cdot 3)_4 \qquad x_k = \gamma_k(x_1, \omega_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \omega_n(x_1, \ldots, x_n)) \qquad (k = 2, 3, \ldots, n).$$

Risulta pure identicamente, sostituendo le $(2\cdot 3)_2$ nelle $(2\cdot 3)_3$,

$$c_k = \omega_k(x_1, \gamma_2(x_1, c_2, \ldots, c_n), \ldots, \gamma_n(x_1, c_2, \ldots, c_n)) \qquad (k = 2, 3, \ldots, n),$$

e quindi anche, scrivendo ordinatamente $x_2, \ldots, x_n$ in luogo di $c_2, \ldots, c_n$,

$$(2\cdot 3)_5 \qquad x_k = \omega_k(x_1, \gamma_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \gamma_n(x_1, \ldots, x_n)) \qquad (k = 2, 3, \ldots, n).$$

Per ragioni che risulteranno poi, le funzioni

$$(2\cdot 3)_6 \qquad \gamma_2(x_1, \ldots, x_n), \quad \ldots, \quad \gamma_n(x_1, \ldots, x_n)$$

si chiameranno *generatrici di* $\mathfrak{D}$ *relative ad* x_1 e il loro insieme si dirà *un sistema completo di generatrici di* $\mathfrak{D}$ *relative ad* x_1; così pure, le funzioni

$$(2\cdot 3)_7 \qquad \omega_2(x_1, \ldots, x_n), \quad \ldots, \quad \omega_n(x_1, \ldots, x_n)$$

si chiameranno *costanti pluriderivazionali per* $\mathfrak{D}$ *relative ad* x_1 od anche *costanti* $\mathfrak{D}$*-pluriderivazionali relative ad* x_1, e il loro insieme si dirà *un sistema completo di costanti* $\mathfrak{D}$*-pluriderivazionali relative ad* x_1. L'operatore che alle variabili $x_2, \ldots, x_n$ sostituisce ordinatamente le funzioni $(2\cdot 3)_6$ si dirà *una sostituzione completa di generatrici di* $\mathfrak{D}$ *relative ad* x_1 e si indicherà con il simbolo

$$\left\{ \begin{matrix} x_2 & \cdots & x_n \\ \gamma_2(x_1, \ldots, x_n) & \cdots & \gamma_n(x_1, \ldots, x_n) \end{matrix} \right\} \quad \text{oppure, più brevemente,} \quad \left\{ \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \end{matrix} \right\}_{\mathfrak{D},1}.$$

Analogamente, l'operatore che alle variabili $x_2, \ldots, x_n$ sostituisce ordinatamente le funzioni $(2\cdot 3)_7$ si dirà *una sostituzione completa di costanti* $\mathfrak{D}$*-pluriderivazionali relative ad* x_1 e si indicherà con il simbolo

$$\left\{ \begin{matrix} x_2 & \cdots & x_n \\ \omega_2(x_1, \ldots, x_n) & \cdots & \omega_n(x_1, \ldots, x_n) \end{matrix} \right\}.$$

In virtù delle $(2\cdot3)_4$ e $(2\cdot3)_5$ si constata che *le due precedenti sostituzioni sono fra loro inverse*: possiamo quindi scrivere

$$(2\cdot3)_8 \qquad \left\{ \begin{matrix} x_2 & \dots & x_n \\ \omega_2(x_1, \dots, x_n) & \dots & \omega_n(x_1, \dots, x_n) \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \dots \\ \dots \end{matrix} \right\}_{\mathfrak{D},1}^{-1} .$$

La scomposizione annunciata per $\mathfrak{D}$ è allora la seguente (di verifica facile ed istruttiva):

$$(2\cdot3)_9 \qquad \underleftarrow{\mathfrak{D} = X_1 \left\{ \begin{matrix} \dots \\ \dots \end{matrix} \right\}_{\mathfrak{D},1}^{-1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \begin{matrix} \dots \\ \dots \end{matrix} \right\}_{\mathfrak{D},1}} ,$$

dove la sottolineatura orientata vuole ricordare l'ordinato susseguirsi, da destra verso sinistra, delle quattro operazioni indicate, e cioè:

1°) una sostituzione completa di generatrici di $\mathfrak{D}$ relative ad x_1,
2°) la derivazione rispetto ad x_1,
3°) la sostituzione inversa della sostituzione precedente,
4°) la moltiplicazione per il coefficiente X_1 di $\mathfrak{D}$.

La $(2\cdot3)_9$ si può anche scrivere, manifestamente, nella forma

$$(2\cdot3)_{9'} \qquad \mathfrak{D} = \underleftarrow{\left\{ \begin{matrix} \dots \\ \dots \end{matrix} \right\}_{\mathfrak{D},1}^{-1} X_1(x_1, \gamma_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \gamma_n(x_1, \dots, x_n)) \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \begin{matrix} \dots \\ \dots \end{matrix} \right\}_{\mathfrak{D},1}} .$$

Osservazione. Un simile pluriderivatore $\mathfrak{D}$ ha infiniti sistemi completi di generatrici relative ad x_1 ed infiniti sistemi completi di costanti pluriderivazionali relative ad x_1. Ad ogni sistema completo di generatrici di $\mathfrak{D}$ relative ad x_1 si può associare un sistema completo di costanti pluriderivazionali relative ad x_1 in modo che le corrispondenti sostituzioni considerate precedentemente siano fra loro inverse.

Esempi. Supponiamo che la funzione

$$\psi(t) = \int_a^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)} \qquad (a \text{ costante})$$

sia invertibile, e diciamo $\overline{\psi}(t)$ la sua inversa. Per il pluriderivatore

$$\mathfrak{D} = \varphi(x_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \varphi(x_n)\frac{\partial}{\partial x_n}$$

vale allora la scomposizione $(2\cdot 3)_9$ con

$$\left\{\begin{matrix} \cdots \\ \cdots \end{matrix}\right\}_{\mathfrak{D},1} = \left\{\begin{matrix} \cdots \\ \cdots \end{matrix}\right\}^{-1}_{\mathfrak{D},1} = \left\{\begin{matrix} x_2 & \cdots & x_n \\ \overline{\psi}(\psi(x_1)-\psi(x_2)) & \cdots & \overline{\psi}(\psi(x_1)-\psi(x_n)) \end{matrix}\right\},$$

e in particolare è

$$\varphi(x)\frac{\partial}{\partial x} + \varphi(y)\frac{\partial}{\partial y} = \underline{\varphi(x)\left\{\begin{matrix} y \\ \overline{\psi}(\psi(x)-\psi(y)) \end{matrix}\right\}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\begin{matrix} y \\ \overline{\psi}(\psi(x)-\psi(y)) \end{matrix}\right\}}.$$

Abbiamo così:

$$(2\cdot 3)_{10} \qquad \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} = \underline{\left\{\begin{matrix} x_2 & \cdots & x_n \\ x_1-x_2 & \cdots & x_1-x_n \end{matrix}\right\}\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\begin{matrix} x_2 & \cdots & x_n \\ x_1-x_2 & \cdots & x_1-x_n \end{matrix}\right\}},$$

e in particolare

$$(2\cdot 3)'_{10} \qquad \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} = \underline{\left\{\begin{matrix} y \\ x-y \end{matrix}\right\}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\begin{matrix} y \\ x-y \end{matrix}\right\}};$$

$$(2\cdot 3)_{11} \qquad x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + x_n\frac{\partial}{\partial x_n} = \underline{x_1\left\{\begin{matrix} x_2 & \cdots & x_n \\ x_1/x_2 & \cdots & x_1/x_n \end{matrix}\right\}\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\begin{matrix} x_2 & \cdots & x_n \\ x_1/x_2 & \cdots & x_1/x_n \end{matrix}\right\}},$$

e in particolare

$$(2\cdot 3)'_{11} \qquad x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} = \underline{x\left\{\begin{matrix} y \\ x/y \end{matrix}\right\}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\begin{matrix} y \\ x/y \end{matrix}\right\}};$$

$$(2\cdot 3)_{12} \qquad x_1^2\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + x_n^2\frac{\partial}{\partial x_n} =$$

$$= \underline{x_1^2\left\{\begin{matrix} x_2 & \cdots & x_n \\ 1/\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right) & \cdots & 1/\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_n}\right) \end{matrix}\right\}\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\begin{matrix} x_2 & \cdots & x_n \\ 1/\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right) & \cdots & 1/\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_n}\right) \end{matrix}\right\}},$$

e in particolare

$$(2\cdot 3)'_{12} \qquad x^2\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y} = \underline{x^2\left\{\begin{matrix} y \\ 1/\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right) \end{matrix}\right\}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\begin{matrix} y \\ 1/\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right) \end{matrix}\right\}}.$$

2·4. – L'operatore, figurante in $(2\cdot3)_9$,

$$(2\cdot4)_1 \qquad \underline{\begin{Bmatrix} \cdots \\ \cdots \end{Bmatrix}^{-1}_{\mathfrak{D},1} \frac{\partial}{\partial x_1} \begin{Bmatrix} \cdots \\ \cdots \end{Bmatrix}_{\mathfrak{D},1}}$$

applicato ad una funzione $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ci dà

$$\begin{Bmatrix} \cdots \\ \cdots \end{Bmatrix}^{-1}_{\mathfrak{D},1} \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, \gamma_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \gamma_n(x_1, \ldots, x_n)),$$

dove come operatori derivazionali figura solo $\partial/\partial x_1$; ma, per effetto della sostituzione $\begin{Bmatrix} \cdots \\ \cdots \end{Bmatrix}_{\mathfrak{D},1}$ che muta la funzione $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nella funzione composta $f(x_1, \gamma_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \gamma_n(x_1 \ldots, x_n))$, tale derivatore $\partial/\partial x_1$ fa intervenire nella sua applicazione tutte le derivate di $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ rispetto ai suoi argomenti. Per questa ragione sembra assai appropriato per l'operatore $(2\cdot4)_1$ il nome di *derivatore plurimo rispetto ad* x_1, e si ha:

$$(2\cdot4)_2 \qquad \begin{Bmatrix} \cdots \\ \cdots \end{Bmatrix}^{-1}_{\mathfrak{D},1} \frac{\partial}{\partial x_1} \begin{Bmatrix} \cdots \\ \cdots \end{Bmatrix}_{\mathfrak{D},1} = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{X_2}{X_1}\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + \frac{X_n}{X_1}\frac{\partial}{\partial x_n}.$$

In generale abbiamo quindi che *i derivatori plurimi rispetto ad una variabile* x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *sono i pluriderivatori con il coefficiente* X_k *identico all'unità, e possono riguardarsi come operatori la cui parte derivazionale è data solo da* $\partial/\partial x_k$.

Risulta che *in generale un pluriderivatore, qualunque sia il numero delle variabili indipendenti, è il prodotto (ordinato) di un derivatore plurimo, rispetto ad una delle variabili indipendenti, che sia variabile derivazionale, per una funzione di tali variabili.*

2·5. – Per le *iterate del pluriderivatore* $\mathfrak{D}$ si hanno subito da $(2\cdot3)_9$, le seguenti scomposizioni in prodotti di operazioni elementari:

$$(2\cdot5)_1 \qquad \underline{\mathfrak{D}^m = \begin{Bmatrix} \cdots \\ \cdots \end{Bmatrix}^{-1}_{\mathfrak{D},1} \left[X_1(x_1, \gamma_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \gamma_n(x_1, \ldots, x_n)) \frac{\partial}{\partial x_1}\right]^m \begin{Bmatrix} \cdots \\ \cdots \end{Bmatrix}_{\mathfrak{D},1}},$$

essendo $m = 0, 1, 2, \ldots$.

§ 3. – La antipluriderivazione.

3·1. – Considerato un pluriderivatore

$$\mathfrak{D} = X_1(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + X_n(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_n},$$

l'operatore inverso $\mathfrak{D}^{-1}$ (supposto che esista) si dirà un *antipluriderivatore* e l'operazione corrispondente si dirà *la antipluriderivazione secondo* $\mathfrak{D}^{-1}$ oppure, brevemente, *la* $\mathfrak{D}^{-1}$*-antipluriderivazione.* Se è

$$\mathfrak{D} f(x_1, \ldots, x_n) = F(x_1, \ldots, x_n),$$

si dirà che $f(x_1, \ldots, x_n)$ *è una* $\mathfrak{D}^{-1}$*-antipluriderivata di* $F(x_1, \ldots, x_n)$. Così, essendo [cfr. $(2 \cdot 1)_1$]

$$\mathfrak{D} x_1 = X_1(x_1, \ldots, x_n), \quad \ldots, \quad \mathfrak{D} x_n = X_n(x_1, \ldots, x_n),$$

si ha che *le variabili indipendenti* $x_1, \ldots, x_n$ *sono delle* $\mathfrak{D}^{-1}$*-antipluriderivate, ordinatamente, dei coefficienti* $X_1, \ldots, X_n$ *del pluriderivatore* $\mathfrak{D}$.

3·2. – Segue subito che *se per il pluriderivatore* $\mathfrak{D}$ *vale la scomposizione* $(2 \cdot 3)_9$, *allora* $\mathfrak{D}$ *è certamente invertibile e per l'antipluriderivatore* $\mathfrak{D}^{-1}$ *si ha la seguente scomposizione in prodotto (ordinato) di operazioni elementari:*

$$(3 \cdot 2)_1 \qquad \mathfrak{D} = \underleftarrow{\begin{Bmatrix} \cdots \\ \cdots \end{Bmatrix}^{-1}_{\mathfrak{D},1} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{-1} \begin{Bmatrix} \cdots \\ \cdots \end{Bmatrix}_{\mathfrak{D},1} X_1^{-1}},$$

dove l'antiderivatore $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{-1}$ *va inteso in tutta la sua generalità.*

La $(3 \cdot 2)_1$ si può anche scrivere

$$(3 \cdot 2)_{1'} \qquad \mathfrak{D}^{-1} = \underleftarrow{\begin{Bmatrix} \cdots \\ \cdots \end{Bmatrix}^{-1}_{\mathfrak{D},1} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{-1} X_1^{-1}(x_1, \gamma_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \gamma_n(x_1, \ldots, x_n)) \begin{Bmatrix} \cdots \\ \cdots \end{Bmatrix}_{\mathfrak{D},1}}$$

ed ancora

$$(3 \cdot 2)_{1''} \qquad \mathfrak{D}^{-1} = \underleftarrow{\begin{Bmatrix} \cdots \\ \cdots \end{Bmatrix}^{-1}_{\mathfrak{D},1} \left[X_1(x_1, \gamma_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \gamma_n(x_1, \ldots, x_n)) \frac{\partial}{\partial x_1}\right]^{-1} \begin{Bmatrix} \cdots \\ \cdots \end{Bmatrix}_{\mathfrak{D},1}}$$

che discende pure subito da $(2 \cdot 3)_{9'}$.

Esempi. Dagli esempi alla fine del n. **2·3** abbiamo:

$$(3\cdot 2)_2 \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{-1}=\begin{Bmatrix} x_2 & \ldots & x_n \\ x_1-x_2 & \ldots & x_1-x_n\end{Bmatrix}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{-1}\begin{Bmatrix} x_2 & \ldots & x_n \\ x_1-x_2 & \ldots & x_1-x_n\end{Bmatrix},$$

e in particolare

$$(3\cdot 2)_2' \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)^{-1}=\begin{Bmatrix} y \\ x-y\end{Bmatrix}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{-1}\begin{Bmatrix} y \\ x-y\end{Bmatrix};$$

$$(3\cdot 2)_3 \qquad \left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{-1}=\begin{Bmatrix} x_2 & \ldots & x_n \\ x_1/x_2 & \ldots & x_1/x_n\end{Bmatrix}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{-1}\begin{Bmatrix} x_2 & \ldots & x_n \\ x_1/x_2 & \ldots & x_1/x_n\end{Bmatrix}\frac{1}{x_1},$$

e in particolare

$$(3\cdot 2)_3' \qquad \left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{-1}=\begin{Bmatrix} y \\ x/y\end{Bmatrix}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{-1}\begin{Bmatrix} y \\ x/y\end{Bmatrix}\frac{1}{x};$$

$$(3\cdot 2)_4 \qquad \left(x_1^2\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+x_n^2\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{-1}=$$

$$=\begin{Bmatrix} x_2 & \ldots & x_n \\ 1/\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right) & \ldots & 1/\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_n}\right)\end{Bmatrix}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{-1}\begin{Bmatrix} x_2 & \ldots & x_n \\ 1/\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right) & \ldots & 1/\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)\end{Bmatrix}\frac{1}{x_1^2},$$

e in particolare

$$(3\cdot 2)_4' \qquad \left(x^2\frac{\partial}{\partial x}+y^2\frac{\partial}{\partial y}\right)^{-1}=\begin{Bmatrix} y \\ 1/\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\end{Bmatrix}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{-1}\begin{Bmatrix} y \\ 1/\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\end{Bmatrix}\frac{1}{x^2}.$$

3·3. – L'operatore, figurante in $(3\cdot 2)_1$,

$$(3\cdot 3)_1 \qquad \begin{Bmatrix} \ldots \\ \ldots\end{Bmatrix}_{\mathfrak{D},1}^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{-1}\begin{Bmatrix} \ldots \\ \ldots\end{Bmatrix}_{\mathfrak{D},1}$$

è l'inverso del derivatore plurimo rispetto ad x_1 dato da $(2\cdot 4)_2$ ed ha come parte antiderivazionale solo $(\partial/\partial x_1)^{-1}$: esso si chiamerà quindi *un antiderivatore plurimo rispetto ad* x_1.

La $(3\cdot 2)_1$ ci dice allora che *un antipluriderivatore, qualunque sia il numero delle variabili indipendenti, è il prodotto (ordinato) di una funzione di queste variabili per un antiderivatore plurimo rispetto ad una di tali variabili.*

3·4. – Applicando $(3\cdot 2)_1$ ad una funzione $F(x_1, \dots, x_n)$ si ottiene

$$(3\cdot 4)_1 \quad \mathfrak{D}^{-1}F(x_1, \dots, x_n) = \left\{\begin{matrix}\cdots\\ \cdots\end{matrix}\right\}^{-1}_{\mathfrak{D},1}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{-1}\frac{F(x_1, \gamma_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \gamma_n(x_1, \dots, x_n))}{X_1(x_1, \gamma_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \gamma_n(x_1, \dots, x_n))},$$

Indichiamo ora con $(\partial/\partial x_1)^{-1*}$ una particolare determinazione di $(\partial/\partial x_1)^{-1}$, anzi, ciò che sarà utile nel seguito, *quella particolare determinazione nella quale sono nulli i termini indipendenti da* x_1; indichiamo ancora con $\Omega(x_2, \dots, x_n)$ un'arbitraria funzione derivabile delle $x_2, \dots, x_n$. Allora la $(3\cdot 4)_1$ si può scrivere:

$$(3\cdot 4)_{1'} \qquad \mathfrak{D}^{-1}F(x_1, \dots, x_n) =$$

$$= \left\{\begin{matrix} x_2 & \cdots & x_n \\ \omega_2(x_1, \dots, x_n) & \cdots & \omega_n(x_1, \dots, x_n)\end{matrix}\right\}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{-1*}\frac{F(x_1, \gamma_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \gamma_n(x_1, \dots, x_n))}{X_1(x_1, \gamma_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \gamma_n(x_1, \dots, x_n))} +$$

$$+\, \Omega(\omega_2(x_1, \dots, x_n), \dots, \omega_n(x_1, \dots, x_n)) .$$

Per le applicazioni hanno grande importanza due casi particolari; che formano l'argomento dei due nn. seguenti.

3·5. – In $(3\cdot 4)_{1'}$ sia $F(x_1, \dots, x_n) \equiv 0$. Allora da $(3\cdot 4)_{1'}$ abbiamo

$$(3\cdot 5)_1 \qquad \mathfrak{D}^{-1}\, 0 = \Omega(\omega_2(x_1, \dots, x_n), \dots, \omega_n(x_1, \dots, x_n)) ,$$

dove $\Omega(\omega_2, \dots, \omega_n)$ è un'arbitraria funzione derivabile dei suoi $n-1$ argomenti $\omega_2, \dots, \omega_n$. In generale abbiamo:

Le $\mathfrak{D}^{-1}$-antipluriderivate di zero sono le funzioni composte aventi una componente esterna qualsiasi, nell'insieme delle funzioni derivabili di $n-1$ variabili indipendenti, e componenti interne costituenti un sistema completo di costanti $\mathfrak{D}$-pluriderivazionali relative ad una variabile x_k ($k = 1, 2, \dots, n$) (cfr. n. **2·3**).

Le funzioni date da $(3\cdot 5)_1$ particolarizzando $\Omega(\omega_2, \dots, \omega_n)$ nell'insieme delle funzioni derivabili, rispetto agli $n-1$ argomenti $\omega_2, \dots, \omega_n$, si diranno *le costanti pluriderivazionali per* $\mathfrak{D}$, ovvero *le costanti $\mathfrak{D}$-pluriderivazionali.* Invece, la funzione data da $(3\cdot5)_1$ considerando $\Omega(\omega_2, \ldots, \omega_n)$ arbitraria nell'insieme delle funzioni derivabili, rispetto agli $n-1$ argomenti $\omega_2, \ldots, \omega_n$, si dirà *una costante pluriderivazionale arbitraria per* $\mathfrak{D}$, ovvero *una costante* $\mathfrak{D}$-*pluriderivazionale arbitraria.*

Esempi. Dagli esempi alla fine del n. **3·2** abbiamo che sono costanti pluriderivazionali arbitrarie per i pluriderivatori

$$\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}, \qquad x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n}, \qquad x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + x_n^2 \frac{\partial}{\partial x_n}$$

ordinatamente le funzioni

$$\Omega(x_1 - x_2, \ldots, x_1 - x_n), \; \Omega(x_1/x_2, \ldots, x_1/x_n), \; \Omega\big((1/x_1) - (1/x_2), \ldots, (1/x_1) - (1/x_n)\big),$$

essendo $\Omega(x_2, \ldots, x_n)$ un'arbitraria funzione derivabile. In particolare, sono costanti pluriderivazionali arbitrarie per i biderivatori

$$\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, \qquad x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \qquad x^2\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y}$$

ordinatamente le funzioni

$$\Omega(x-y), \quad \Omega(x/y), \quad \Omega\big((1/x) - (1/y)\big),$$

essendo $\Omega(y)$ un'arbitraria funzione derivabile.

3·6. – In $(3\cdot4)_{1'}$ sia $F(x_1, \ldots, x_n) \equiv 1$. Allora da $(3\cdot4)_{1'}$ abbiamo

$$(3\cdot6)_1 \qquad \mathfrak{D}^{-1}\,1 =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} x_2 & \ldots & x_n \\ \omega_2(x_1, \ldots, x_n) & \ldots & \omega_n(x_1, \ldots, x_n) \end{matrix} \right\} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{-1*} X_1^{-1}(x_1, \gamma_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \gamma_n(x_1, \ldots, x_n)) +$$

$$+ \Omega\big(\omega_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \omega_n(x_1, \ldots, x_n)\big),$$

dove $\Omega(\omega_2, \ldots, \omega_n)$ è un'arbitraria funzione derivabile dei suoi $n-1$ argomenti $\omega_2, \ldots, \omega_n$, e dove ancora — come si è supposto al n. **3·4** — *con* $(\partial/\partial x_1)^{-1*}$ *s'intende quella particolare determinazione nella quale sono nulli i termini indipendenti da* x_1. Con quest'ultima precisazione il primo termine del secondo membro di

$(3\cdot 6)_1$ si dirà *la variabile pluriderivazionale indipendente per* $\mathfrak{D}$ *relativamente ad* x_1, ovvero *la variabile* $\mathfrak{D}$*-pluriderivazionale indipendente relativa ad* x_1, e s'indicherà con il simbolo

$$(x_1, \ldots, x_n)_{\mathfrak{D},1},$$

si porrà cioè

$$(3\cdot 6)_2 \qquad (x_1, \ldots, x_n)_{\mathfrak{D},1} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} x_2 & \cdots & x_n \\ \omega_2(x_1, \ldots, x_n) & \cdots & \omega_n(x_1, \ldots, x_n) \end{matrix} \right\} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{-1*} X_1^{-1}(x_1, \gamma_2(x_n, \ldots, x_n), \ldots, \gamma_n(x_1, \ldots, x_n)).$$

In generale, resta fissato il concetto di *variabile* $\mathfrak{D}$*-pluriderivazionale indipendente relativa ad* x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ che s'indicherà con il simbolo $(x_1, \ldots, x_n)_{\mathfrak{D},k}$: essa si otterrà necessariamente da $(3\cdot 6)_1$ particolarizzando $\Omega(x_2, \ldots, x_n)$.

La $(3\cdot 6)_1$ si può scrivere

$$(3\cdot 6)_{1'} \qquad \mathfrak{D}^{-1}1 = (x_1, \ldots, x_n)_{\mathfrak{D},1} + \Omega(\omega_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \omega_n(x_1, \ldots, x_n)),$$

la quale va posta in parallelismo (essendo $\mathrm{D} = \mathrm{d}/\mathrm{d}x$) con

$$\mathrm{D}^{-1}1 = x + c \qquad (c \text{ costante arbitraria}).$$

Come x *è la variabile indipendente per* D, *così* $(x_1, \ldots, x_n)_{\mathfrak{D},1}$ *è la variabile pluriderivazionale indipendente per* $\mathfrak{D}$ *(relativamente ad* x_1*).*

Una qualunque delle funzioni dell'insieme $(3\cdot 6)_1$, oppure $(3\cdot 6)_{1'}$, si dirà pure *una variabile pluriderivazionale indipendente per* $\mathfrak{D}$ e si indicherà con il simbolo

$$(x_1, \ldots, x_n)_{\mathfrak{D}}.$$

Si può notare che *la media aritmetica di un numero qualunque di variabili pluriderivazionali indipendenti per* $\mathfrak{D}$ *è sempre ancora una variabile pluriderivazionale indipendente per* $\mathfrak{D}$ (cioè, una funzione la cui $\mathfrak{D}$-pluriderivata è uguale all'unità).

Esempi. Per i pluriderivatori $\mathfrak{D}$ dati da

$$\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}, \qquad x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n}, \qquad x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + x_n^2 \frac{\partial}{\partial x_n}$$

si ha, ordinatamente, che $(x_1, \dots, x_n)_{\mathfrak{D},k}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ è

$$x_k, \qquad \log x_k, \qquad -1/x_k .$$

In particolare per i biderivatori $\mathfrak{D}$ dati da

$$\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, \qquad x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, \qquad x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y}$$

si ha che $(x, y)_{\mathfrak{D},1}$ e $(x, y)_{\mathfrak{D},2}$ sono, ordinatamente,

$$x, \quad y; \quad \log x, \quad \log y; \quad -1/x, \quad -1/y .$$

3·7. – Per *le iterate dell'antipluriderivatore* $\mathfrak{D}^{-1}$ si hanno subito da $(3\cdot 2)_{1''}$ le seguenti scomposizioni in prodotti di operazioni elementari:

$$(3\cdot 7)_1 \qquad \underline{\mathfrak{D}^{-m} = \left\{ \begin{matrix} \dots \\ \dots \end{matrix} \right\}_{\mathfrak{D},1}^{-1} \left[X_1(x_1, \gamma_2(x_1, \dots, x_n), \dots, \gamma_n(x_1, \dots, x_n)) \frac{\partial}{\partial x_1} \right]^{-m} \left\{ \begin{matrix} \dots \\ \dots \end{matrix} \right\}_{\mathfrak{D},1}},$$

essendo $m = 1, 2, \dots$; ciò che s'ottiene da $(2\cdot 5)_1$ mutando m in $-m$. Si può quindi scrivere $(2\cdot 5)_1$ e $(3\cdot 7)_1$ nell'unica formula

$$(3\cdot 7)_2 \qquad \underline{\mathfrak{D}^{\mu} = \left\{ \begin{matrix} \dots \\ \dots \end{matrix} \right\}_{\mathfrak{D},1}^{-1} \left[X_1(x_1, \gamma_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \gamma_n(x_1, \dots, x_n)) \frac{\partial}{\partial x_1} \right]^{\mu} \left\{ \begin{matrix} \dots \\ \dots \end{matrix} \right\}_{\mathfrak{D},1}},$$

essendo $\mu = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$.

§ 4. – Una nuova classificazione delle equazioni differenziali.

4·1. - Un'equazione differenziale, in una funzione incognita $z = z(x_1, \dots, x_n)$, si dirà *di prima specie* quando esiste un pluriderivatore $\mathfrak{D}$ tale che l'equazione sia della forma

$$(4\cdot 1)_1 \qquad \Phi(x_1, \dots, x_n, z, \mathfrak{D}z, \mathfrak{D}^2 z, \dots, \mathfrak{D}^m z) = 0,$$

dove Φ è simbolo di funzione nota delle quantità $x_1, \ldots, x_n, z, \mathfrak{D}z, \mathfrak{D}^2 z, \ldots, \mathfrak{D}^m z$ (essendo $\mathfrak{D}^2, \mathfrak{D}^3, \ldots$ le successive potenze d'iterazione di $\mathfrak{D}$).

Un'equazione differenziale, in una funzione incognita $z = z(x_1, \ldots, x_n)$, si dirà *di seconda specie* quando non è di prima specie ed esistono due pluriderivatori $\mathfrak{D}_1$ e $\mathfrak{D}_2$ tali che l'equazione sia della forma

$$(4\cdot 1)_2 \qquad \Phi(x_1, \ldots, x_n, z, \mathfrak{D}_1 z, \mathfrak{D}_1^2 z, \ldots, \mathfrak{D}_1^{m_1} z, \mathfrak{D}_2 z, \mathfrak{D}_2^2 z, \ldots, \mathfrak{D}_2^{m_2} z) = 0,$$

dove Φ è simbolo di funzione nota degli argomenti indicati.

In generale, un'equazione differenziale, in una funzione incognita $z = z(x_1, \ldots, x_n)$, si dirà *di r-esima specie* quando non è di specie minore di r ed esistono r pluriderivatori $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_r$ tali che l'equazione sia della forma

$$(4\cdot 1)_r \qquad \Phi(x_1, \ldots, x_n, \mathfrak{D}_1 z, \mathfrak{D}_1^2 z, \ldots, \mathfrak{D}_1^{m_1} z,$$
$$\mathfrak{D}_2 z, \mathfrak{D}_2^2 z, \ldots, \mathfrak{D}_2^{m_2} z, \ldots, \mathfrak{D}_r z, \mathfrak{D}_r^2 z, \ldots, \mathfrak{D}_r^{m_r} z) = 0,$$

dove Φ è simbolo di funzione nota degli argomenti indicati.

4·2. – Dalle definizioni precedenti seguono varie conclusioni.

a) *Le equzioni differenziali con una sola variabile indipendente* (*cioè le equazioni differenziali ordinarie*) *sono tutte di prima specie.* Per tali equazioni il pluriderivatore $\mathfrak{D}$ figurante in $(4\cdot 1)_1$ si riduce al derivatore $\mathrm{D}_x = \mathrm{d}/\mathrm{d}x$ (se x è la variabile indipendente), oppure ad un operatore $X(x)\cdot\mathrm{D}_x$ (*monoderivatore*, cfr. n. **2·1**).

Le equazioni alle derivate parziali con due variabili indipendenti possono essere solo di due specie: *precisamente o di prima specie o di seconda specie.*

In generale, *le equazioni alle derivate parziali con n variabili indipendenti possono essere solo di n specie*: *precisamente o di prima specie, o di seconda specie, ..., o di n-esima specie.*

b) *Le equazioni alle derivate parziali* (*con un numero qualunque di variabili indipendenti*) *del primo ordine, lineari o quasi-lineari* ([3]), *sono tutte di prima specie.* Per le equazioni lineari l'affermazione è manifesta, per le quasi-lineari

---

([3]) Un'equazione di primo ordine è *lineare* se è di primo grado rispetto alle quantità z, $\partial z/\partial x_1$, $\partial z/x_2$, ..., $\partial z/\partial x_n$ prese complessivamente, è invece *quasi-lineare* se è di primo grado rispetto alle sole derivate $\partial z/\partial x_1$, $\partial z/\partial x_2$, ..., $\partial z/\partial x_n$ prese complessivamente.

basta ricordare che esse si possono ricondurre a lineari con un cambiamento di funzione incognita (che fa accrescere di uno il numero delle variabili indipendenti).

4·3. – Nell'equazione di *r-esima* specie $(4\cdot 1)_r$ i pluriderivatori $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, ..., $\mathfrak{D}_r$ che vi figurano si diranno *i pluriderivatori dell'equazione*, il loro insieme si dirà *un sistema fondamentale di pluriderivatori dell'equazione* $(4\cdot 1)_r$.

Si vede facilmente che *un'equazione* $(4\cdot 1)_r$ $(r = 1, 2, \ldots)$ *ha infiniti sistemi di pluriderivatori fondamentali.* In relazione a ciò vi sono importanti studi da farsi (essi formeranno oggetto di altro lavoro).

§ 5. – Risoluzione di equazioni differenziali di prima e seconda specie.

5·1. – Equazioni differenziali di prima specie, di primo ordine e a variabili separate.

Tali equazioni sono quelle della forma (o riducibili alla forma)

$$(5\cdot 1)_1 \qquad \mathfrak{D}z = \frac{A(x_1, \ldots, x_n)}{B(z, \omega_2, \ldots, \omega_n)},$$

dove: $A(x_1, \ldots, x_n)$ è una data funzione continua delle variabili indipendenti $x_1, \ldots, x_n$; e $B(z, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ è una data funzione che è continua rispetto a $z = z(x_1, \ldots, x_n)$, indicante la funzione incognita, e che è derivabile, con derivate continue, rispetto ad $\omega_2 = \omega_2(x_1, \ldots, x_n)$, ..., $\omega_n = \omega_n(x_1, \ldots, x_n)$ costituenti un sistema completo di costanti $\mathfrak{D}$-*pluriderivazionali* [relative ad una variabile x_k (cfr. n. **2·3**)].

Da $(5\cdot 1)_1$ si ha

$$B(z, \omega_2, \ldots, \omega_n)\cdot \mathfrak{D}z = A(x_1, \ldots, x_n),$$

ed anche

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\int^{*} B(z, \omega_2, \ldots, \omega_n)\, \mathrm{d}z\right]\cdot \mathfrak{D}z = A(x_1, \ldots, x_n),$$

ove * sta a fissare una particolare (qualsiasi) determinazione per l'integrale indefinito considerato. Per la regola di pluriderivazione delle funzioni composte [cfr. n. **2·2**] l'equazione si può allora scrivere

$$(5\cdot 1)_{1'} \qquad \mathfrak{D}\int^{*} B(z,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_n)\,\mathrm{d}z = A(x_1,\ \ldots,\ x_n) \quad (^4),$$

da cui

$$(5\cdot 1)_{1''} \qquad \int^{*} B(z,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_n)\,\mathrm{d}z = \mathfrak{D}^{-1}A(x_1,\ \ldots,\ x_n),$$

e questo è l'integrale generale di $(5\cdot 1)_1$. Per $n=1$, $x_1 = x$ e $\mathfrak{D} = \mathrm{d}/\mathrm{d}x$ si ricade nella nota conclusione relativa alle equazioni differenziali ordinarie, del primo ordine e a variabili separate.

Esempio 1°. Sia da risolvere l'equazione

$$\mathfrak{D}z = z\,.$$

Si ha, per $z \neq 0$,

$$\frac{1}{z}\,\mathfrak{D}z = 1, \qquad \mathfrak{D}\log z = 1, \qquad \log z = \mathfrak{D}^{-1}1,$$

cioè (n. **3·6**)

$$\log z = (x_1,\ \ldots,\ x_n)_{\mathfrak{D}} + \Omega_0(\omega_2(x_1,\ \ldots,\ x_n),\ \ldots,\ \omega_n(x_1,\ \ldots,\ x_n)),$$

---

(4) Notare che, dette brevemente $B_2(z,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_n),\ \cdots,\ B_n(z,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_n)$ le derivate parziali di $B(z,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_n)$ rispetto ad $\omega_2,\ \cdots,\ \omega_n$, si ha

$$\mathfrak{D}\int^{*} B(z,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_n\ \mathrm{d}z =$$

$$= B(z,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_n)\cdot\mathfrak{D}z + \int^{*} B_2(z,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_n)\,\mathrm{d}z\cdot\mathfrak{D}\omega_2 + \cdots + \int^{*} B_n(z,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_n)\,\mathrm{d}z\cdot\mathfrak{D}\omega_n,$$

e poi va ricordato che è $\mathfrak{D}\omega_2 = \ldots = \mathfrak{D}\omega_n = 0$.

essendo $(x_1, \ldots, x_n)_{\mathfrak{D}}$ una variabile pluriderivazionale indipendente per $\mathfrak{D}$ ed essendo l'altro termine del secondo membro una costante $\mathfrak{D}$-pluriderivazionale arbitraria. Infine l'integrale generale è

$$z = \Omega(\omega_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \omega_n(x_1, \ldots, x_n)) \cdot e^{(x_1, \ldots, x_n)_{\mathfrak{D}}},$$

dove $\Omega(\omega_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \omega_n(x_1, \ldots, x_n))$ è ancora una costante $\mathfrak{D}$-pluriderivazionale arbitraria (tale integrale include anche l'integrale $z = 0$).

Esempio 2°. Sia da risolvere l'equazione [5]

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2 y^2}{z^2}.$$

Applicando $(5\cdot 1)_{1''}$ si ha subito

$$(5\cdot 1)_2 \qquad \int^* z^2 \, \mathrm{d}z = \left(x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y}\right)^{-1} (x^2 y^2).$$

Tenendo presente che è [cfr. $(3\cdot 2)_{4'}$]

$$\left(x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y}\right)^{-1} = \underline{\left\{\frac{y}{1/\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)}\right\} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{-1} \left\{\frac{y}{1/\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)}\right\} \frac{1}{x^2}},$$

Onde si ha

$$\left(x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y}\right)^{-1} (x^2 y^2) = \left\{\frac{y}{1/((1/x) - (1/y))}\right\} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{-1} \frac{x^2 y^2}{(x-y)^2} =$$

$$= \left\{\frac{y}{1/((1/x) - (1/y))}\right\} y^2 \int^* \left(\frac{x}{x-y}\right)^2 \mathrm{d}x + \Omega_0\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right),$$

essendo $\Omega_0(y)$ un'arbitraria funzione derivabile. Risulta

$$y^2 \int^* \left(\frac{x}{x-y}\right)^2 \mathrm{d}x = y^2 \int^* \left(1 + \frac{2y}{x-y} + \frac{y^2}{(x-y)^2}\right) \mathrm{d}x =$$

$$= y^2 \cdot \left(x + 2y \cdot \log|x-y| - \frac{y^2}{x-y}\right) = y^3 \cdot \left(\frac{x}{y} + 2 \log|x-y| - \frac{y}{x-y}\right),$$

---

(5) E. KAMKE, *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen*, II, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1950 [cfr. p. 153, No. 2.64].

quindi

$$\left\{\frac{y}{1/((1/x)-(1/y))}\right\} y^2 \int^* \left(\frac{x}{x-y}\right)^2 \mathrm{d}x =$$

$$= \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^{-3}\left[x\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right) + 2 \log \frac{|x/y|}{|(1/x)-(1/y)|} + \frac{y}{x}\right] =$$

$$= \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^{-3}\left(\frac{y}{x}-\frac{x}{y}+2\log\left|\frac{x}{y}\right|\right) + \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^{-3}\left(1-2\log\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|\right).$$

Abbiamo dunque per la proposta equazione l'integrale generale

$$\frac{z^3}{3} = \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^{-3}\left(\frac{y}{x}-\frac{x}{y}+2\log\left|\frac{x}{y}\right|\right) + \Omega\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right),$$

essendo $\Omega(y)$ un'arbitraria funzione derivabile.

Esempio 3°. Sia da risolvere l'equazione

$$x_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial z}{\partial x_3} = (x_1 + x_2 + x_3)[z^2 + \varphi(x_1/x_2,\ x_1/x_3)],$$

con tre variabili indipendenti x_1, x_2, x_3, e dove $\varphi(x_1/x_2, x_1/x_3)$ è una data funzione. Quest'equazione è del tipo $(5\cdot1)_1$ in quanto la funzione $\varphi(x_1/x_2, x_1/x_3)$ è una costante per il triderivatore

$$\mathfrak{D} = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

(cfr. n. **3·5**). L'equazione data si può allora scrivere

$$\frac{\mathfrak{D}z}{z^2 + \varphi(x_1/x_2,\ x_1/x_3)} = x_1 + x_2 + x_3,$$

ossia (per la regola di pluriderivazione delle funzioni composte)

$$\mathfrak{D}\,\frac{\arctan\left[z/\sqrt{\varphi(x_1/x_2,\ x_1/x_3)}\right]}{\sqrt{\varphi(x_1/x_2,\ x_1/x_3)}} = x_1 + x_2 + x_3 .$$

e quindi

$$(5\cdot 1)_3 \qquad \frac{\arctan\left[z/\sqrt{\varphi(x_1/x_2,\ x_1/x_3)}\right]}{\sqrt{\varphi(x_1/x_2,\ x_1/x_3)}} = \mathfrak{D}^{-1}(x_1+x_2+x_3)\,.$$

Ma è [cfr. $(3\cdot 2)_3$]

$$\mathfrak{D}^{-1} = \left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^{-1} = \underline{\left\{\begin{matrix} x_2 & x_3 \\ x_1/x_2 & x_1/x_3\end{matrix}\right\}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{-1}\left\{\begin{matrix} x_2 & x_3 \\ x_1/x_2 & x_1/x_3\end{matrix}\right\}\frac{1}{x_1}}$$

onde

$$\mathfrak{D}^{-1}(x_1+x_2+x_3) = \left\{\begin{matrix} x_2 & x_3 \\ x_1/x_2 & x_1/x_3\end{matrix}\right\}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right) =$$

$$= \left\{\begin{matrix} x_2 & x_3 \\ x_1/x_2 & x_1/x_3\end{matrix}\right\}\int^{*}\left(1+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)\mathrm{d}x_1 + \Omega\left(\frac{x_1}{x_2},\ \frac{x_1}{x_3}\right) =$$

$$= \left\{\begin{matrix} x_2 & x_3 \\ x_1/x_2 & x_1/x_3\end{matrix}\right\}\left(x_1+\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_1}{x_3}\right) + \Omega\left(\frac{x_1}{x_2},\ \frac{x_1}{x_3}\right) =$$

$$= (x_1+x_2+x_3) + \Omega(x_1/x_2,\ x_1/x_3),$$

essendo $\Omega(x_2,\ x_3)$ un'arbitraria funzione derivabile ([6]). Abbiamo dunque, sostituendo il risultato ottenuto in $(5\cdot 1)_3$;

$$z = \sqrt{\varphi(x_1/x_2,\ \ x_1/x_3)}\cdot\tan\left[(x_1+x_2+x_3+\Omega(x_1/x_2,\ x_1/x_3))\sqrt{\varphi(x_1/x_2,\ x_1/x_3}\right]$$

quale integrale generale della proposta equazione.

5·2. – Equazioni differenziali di prima specie, di primo ordine e lineari.

Tali equazioni sono quelle della forma (o riconducibili alla forma)

$$(5\cdot 2)_1 \qquad \mathfrak{D}z + A(x_1,\ \ldots,\ x_n)z = f(x_1,\ \ldots,\ x_n),$$

dove $A(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ e $f(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ sono date funzioni (continue).

([6]) Si poteva ottenere quest'ultimo risultato anche molto semplicemente osservando che è $\mathfrak{D}(x_1+x_2+x_3) = x_1+x_2+x_3$.

Per la risoluzione di $(5\cdot 2)_1$ osserviamo che se $\varphi = \mathfrak{D}^{-1*}A(x_1, \dots, x_n)$ è una funzione particolare (qualsiasi) dell'insieme $\mathfrak{D}^{-1}A(x_1, \dots, x_n)$, onde $\mathfrak{D}\varphi = A(x_1, \dots, x_n)$, risulta (cfr. n. **2·2**)

$$\mathfrak{D}(e^{\varphi}z) = e^{\varphi}\cdot\mathfrak{D}z + e^{\varphi}\cdot\mathfrak{D}\varphi\cdot z = e^{\varphi}\cdot[\mathfrak{D}z + A(x_1, \dots, x_n)\cdot z],$$

perciò si ha:

$$\mathfrak{D}z + A(x_1, \dots, x_n)\cdot z = e^{-\varphi}\mathfrak{D}(e^{\varphi}z),$$

ossia

$$(5\cdot 2)_2 \qquad \mathfrak{D}z + A(x_1, \dots, x_n)\cdot z = \underleftarrow{e^{-\mathfrak{D}^{-1*}A(x_1,\dots,x_n)}\mathfrak{D}e^{\mathfrak{D}^{-1*}A(x_1,\dots,x_n)}}\, z\,.$$

La $(5\cdot 2)_1$ equivale dunque a

$$\underleftarrow{e^{-\mathfrak{D}^{-1*}A}\mathfrak{D}e^{\mathfrak{D}^{-1*}A}}\, z = f(x_1, \dots, x_n),$$

da cui segue che l'*integrale generale di* $(5\cdot 2)_1$ *è*

$$(5\cdot 2)_3 \qquad z = \underleftarrow{e^{-\mathfrak{D}^{-1*}A}\mathfrak{D}^{-1}e^{\mathfrak{D}^{-1*}A}}\, f(x_1, \dots, x_n),$$

dove $\mathfrak{D}^{-1}$ *va inteso in tutta la sua generalità*, ossia

$$(5\cdot 2)_{3'} \qquad z = e^{-\mathfrak{D}^{-1*}A}\Big[\underleftarrow{\mathfrak{D}^{-1*}e^{\mathfrak{D}^{-1*}A}}\, f(x_1, \dots, x_n) + \\ + \Omega\big(\omega_2(x_1, \dots, x_n), \dots, \omega_n(x_1, \dots, x_n)\big)\Big],$$

dove $\Omega(x_2, \dots, x_n)$ è un'arbitraria funzione derivabile [le funzioni $\omega_2(x_1 \dots, x_n)$, $\dots$, $\omega_n(x_1, \dots, x_n)$ costituendo una sistema completo di costanti $\mathfrak{D}$-pluriderivazionali].

Esempio. Sia da risolvere l'equazione

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} = z + e^{x_1 + \dots + x_n}.$$

Qui è $A = -1$, $f = e^{x_1+\dots+x_n}$ onde, applicando la $(5\cdot2)_{3'}$ e tenendo presente i nn. **3·2**, **3·5**, e **3·6**, si ha

$$z = e^{x_1}\left[\begin{Bmatrix} x_2 & \dots & x_n \\ x_1 - x_2 & \dots & x_1 - x_n \end{Bmatrix}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{-1*}\begin{Bmatrix} x_2 & \dots & x_n \\ x_1 - x_2 & \dots & x_1 - x_n \end{Bmatrix} e^{x_1+\dots+x_n} + \right.$$

$$\left. + \Omega(x_1 - x_2, \dots, x_1 - x_n)\right],$$

essendo $\Omega(x_2, \dots, x_n)$ un'arbitraria funzione derivabile. Facendo i semplici calcoli indicati si ottiene per l'integrale generale l'espressione

$$z = \frac{1}{n-1} e^{x_1+\dots+x_n} + e^{x_1}\,\Omega(x_1 - x_2, \dots, x_1 - x_n)$$

con l'ipotesi $n > 1$; mentre per $n = 1$ l'integrale è $z = x_1 e^{x_1} + c e^{x_1}$ (c costante arbitraria).

5·3. – Equazioni differenziali di prima specie, di primo ordine e di Bernoulli.

Tali equazioni sono quelle della forma (o riducibili alla forma)

$$(5\cdot3)_1 \qquad \mathfrak{D}z + A(x_1, \dots, x_n)\cdot z = f(x_1, \dots, x_n)\cdot z^m, \qquad m \neq \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}.$$

Con il cambiamento di funzione incognita espresso da $z^{1-m} = Z$ queste equazioni si riducono a quelle lineari (n. **5·2**).

Esempio. Sia da risolvere l'equazione

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n} = \frac{z}{2} + \frac{1}{2z} e^{x_1+\dots+x_n}.$$

Moltiplicando per $2z$ ambo i membro si ha

$$\frac{\partial z^2}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial z^2}{\partial x_n} = z^2 + e^{x_1+\dots+x_n},$$

onde, per l'esempio del n. precedente, l'integrale generale richiesto è

$$z^2 = \frac{1}{n-1} e^{x_1+\dots+x_n} + e^{x_1}\cdot \Omega(x_1 - x_2, \dots, x_1 - x_n)$$

se è $n<1$, e invece $z^2 = x_1 e^{x_1} + c e^{x_1}$ (c costante arbitraria) se è $n = 1$.

5·4. – Equazioni differenziali di prima specie, non contenenti esplicitamente le variabili indipendenti.

Tali equazioni sono quelle della forma

$$(5\cdot 4)_1 \qquad \Phi(z, \mathfrak{D}z, \mathfrak{D}^2 z, \dots, \mathfrak{D}^m z) = 0.$$

Un'equazione $(5\cdot 4)_1$ *si riconduce ad un'equazione differenziale ordinaria d'ordine* $m-1$, *se* m *è l'ordine di* $(5\cdot 4)_1$, *e ad un'equazione differenziale di prima specie, del primo ordine e a variabili separate* (cfr. n. **5·1**).

Infatti, posto

$$(5\cdot 4)_2 \qquad \mathfrak{D}z = u(z),$$

per le regole di pluriderivazione (cfr. n. **2·2**) si ha

$$\mathfrak{D}^2 z = u'(z)\cdot \mathfrak{D}z = u'(z)\cdot u(z),$$

$$\mathfrak{D}^3 z = u''(z)\cdot u^2(z) + u'^2(z)\cdot u(z),$$

$$\mathfrak{D}^4 z = u'''(z)\cdot u^3(z) + 4u''(z)\cdot u'(z)\cdot u^2(z) + u'^3(z)\cdot u(z),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

onde la $(5\cdot 4)_1$ si muta in un'equazione differenziale ordinaria della forma

$$(5\cdot 4)_3 \qquad \Psi\big(z, u(z), u'(z), \dots, u^{(m-1)}(z)\big) = 0\,.$$

La risoluzione di quest'equazione e poi di $(5\cdot 4)_2$ ci porta alla risoluzione di $(5\cdot 4)_1$.

Esempio. Sia da risolvere l'equazione

$$(5\cdot 4)_4 \qquad z\cdot \mathfrak{D}^2 z = (\mathfrak{D}z)^2.$$

Quest'equazione del tipo $(5\cdot4)_1$, ha per equazione $(5\cdot4)_3$ corrispondente

$$(5\cdot4)_5 \qquad z\cdot u'(z)\cdot u(z) = u^2(z),$$

che si spezza in

$$u(z) = 0, \qquad z\cdot u'(z) = u(z),$$

l'ultima delle quali ha le soluzioni $u(z) = cz$, con c costante arbitraria rispetto a z. Pertanto tutte le soluzioni di $(5\cdot4)_5$ sono date da $u(z)=cz$. Introducendo queste funzioni in $(5\cdot4)_2$, la costante arbiraria c va più largamente interpretata come una costante pluriderivazionale arbitraria $\Omega_1 = \Omega_1(\omega_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \omega_n(x_1, \ldots, x_n))$ per il pluriderivatore $\mathfrak{D}$ [essendo $\omega_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \omega_n(x_1, \ldots, x_n)$ un sistema completo di costanti pluriderivazionali per $\mathfrak{D}$]. Onde l'integrale generale di $(5\cdot4)_4$ è dato dall'integrale generale dell'equazione

$$\mathfrak{D}z = \Omega_1\cdot z$$

che, risoluta come l'Esempio 1° del n. **5·1**, ci dà

$$z = \Omega_2\, e^{\Omega_1\cdot z},$$

dove Ω_2 è, similmente ad Ω_1, un'altra costante pluriderivazionale arbitraria per $\mathfrak{D}$.

5·5. – Due particolari equazioni differenziali di seconda specie.

1°) Sia da risolvere l'equazione

$$(5\cdot5)_1 \qquad x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0\,.$$

Osservo che è

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + x\frac{\partial z}{\partial x} = x\left(x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial x}\right) = x\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 z,$$

così pure è

$$y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \left(y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z\,.$$

Pertanto la $(5\cdot5)_1$ si può scrivere

$$(5\cdot5)_{1'} \qquad \left(x\,\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 z - \left(y\,\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z = 0$$

e si vede che siamo realmente di fronte ad un'equazione di seconda specie. Poichè i monoderivatori

$$x\,\frac{\partial}{\partial x}\,, \qquad y\,\frac{\partial}{\partial y}$$

sono commutabili si ha

$$\left(x\,\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 - \left(y\,\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 = \left(x\frac{\partial}{\partial x} - y\,\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(x\,\frac{\partial}{\partial x} + y\,\frac{\partial}{\partial y}\right) = \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\,\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(x\,\frac{\partial}{\partial x} - y\,\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Perciò l'equazione $(5\cdot5)_{1'}$ si può porre nella forma

$$(5\cdot5)_{1''} \qquad \left(x\,\frac{\partial}{\partial x} - y\,\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(x\,\frac{\partial}{\partial x} + y\,\frac{\partial}{\partial y}\right) z = 0\,.$$

Ma è

$$x\,\frac{\partial}{\partial x} + y\,\frac{\partial}{\partial y} = x\,\underline{\left\{\begin{matrix} y \\ x/y \end{matrix}\right\} \frac{\partial}{\partial x} \left\{\begin{matrix} y \\ x/y \end{matrix}\right\}}\,, \qquad x\,\frac{\partial}{\partial x} - y\,\frac{\partial}{\partial y} = x\,\underline{\left\{\begin{matrix} y \\ 1/(xy) \end{matrix}\right\} \frac{\partial}{\partial x} \left\{\begin{matrix} y \\ 1/(xy) \end{matrix}\right\}}\,,$$

onde s'ottiene facilmente che l'integrale generale della data equazione $(5\cdot5)_1$ è

$$z = \Omega_1\left(\frac{x}{y}\right) + \left\{\begin{matrix} y \\ x/y \end{matrix}\right\} \int^{*} \frac{1}{x}\cdot \Omega_2\left(\frac{y}{x^2}\right) \mathrm{d}x,$$

essendo $\Omega_1(t)$ e $\Omega_2(t)$ arbitrarie funzioni con derivate prime e seconde.

2º) Sia da risolvere l'equazione

$$(5\cdot5)_2 \qquad x\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (x+y)\,\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\,\frac{\partial z}{\partial x} + y\,\frac{\partial z}{\partial y} = z\,.$$

Esaminando i termini nelle derivate seconde si vede opportuno considerare i due biderivatori

$$\mathfrak{D}_1 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, \qquad \mathfrak{D}_2 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y},$$

pei quali è

$$\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_1 = x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (x + y) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y},$$

onde

$$x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (x + y) \frac{\partial^2 z}{\partial z \partial y} + y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_1 z - \mathfrak{D}_2 z .$$

Ne segue che l'equazione $(5 \cdot 5)_2$ da risolvere si può scrivere:

$(5 \cdot 5)_{2'}$
$$\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_1 z + \mathfrak{D}_1 z - \mathfrak{D}_2 z - z = 0,$$

equazione di seconda specie, lineare e a coefficienti costanti. Essa si può porre nella forma

$$(\mathfrak{D}_2 + 1)\mathfrak{D}_1 z - (\mathfrak{D}_2 + 1) z = 0,$$

ossia

$$(\mathfrak{D}_2 + 1)(\mathfrak{D}_1 z - z) = 0,$$

e infine

$(5 \cdot 5)_{2''}$
$$(\mathfrak{D}_2 + 1)(\mathfrak{D}_1 - 1) z = 0 .$$

Essendo ora [cfr. $(5 \cdot 2)_2$]

$$\mathfrak{D}_1 1 = \underleftarrow{e^{\mathfrak{D}_1^{-1*}1} \mathfrak{D}_1 e^{-\mathfrak{D}_1^{-1*}1}}, \qquad \mathfrak{D}_2 + 1 = \underleftarrow{e^{-\mathfrak{D}_2^{-1*}1} \mathfrak{D}_2 e^{\mathfrak{D}_2^{-1*}1}},$$

ed avendosi (cfr. n. **3·6**) $\mathfrak{D}_1^{-1*}1 = \log x$, $\mathfrak{D}_2^{-1*}1 = x$, risulta

$$\mathfrak{D}_1 - 1 = \underleftarrow{x \mathfrak{D}_1 x^{-1}}, \qquad \mathfrak{D}_2 + 1 = \underleftarrow{e^{-x} \mathfrak{D}_2 e^{x}},$$

ossia (fine del n. **2·3**)

$$\mathfrak{D}_1 - 1 = \underleftarrow{x^2 \left\{ \begin{matrix} y \\ x/y \end{matrix} \right\} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \begin{matrix} y \\ x/y \end{matrix} \right\} \frac{1}{x}}, \qquad \mathfrak{D}_2 + 1 = \underleftarrow{e^{-x} \left\{ \begin{matrix} y \\ x-y \end{matrix} \right\} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \begin{matrix} y \\ x-y \end{matrix} \right\} e^{x}}.$$

La $(5\cdot5)_{2''}$ ci dà allora facilmente per l'integrale generale della proposta equazione $(5\cdot5)_2$ l'espressione

$$z = x \cdot \Omega_1\left(\frac{x}{y}\right) + x \cdot \left\{ \begin{matrix} y \\ x/y \end{matrix} \right\} \int^{*} \Omega_2\left(x - \frac{x}{y}\right) \cdot \frac{e^{-x}}{x^2}\, dx,$$

essendo $\Omega_1(t)$ ed $\Omega_2(t)$ arbitrarie funzioni con derivate prime e seconde.