

RENATO NARDINI (*)

Sui fronti d'onda nella magneto-idrodinamica. (**)

§ 1. - Introduzione.

1. - Preliminari.

In quasi tutti i lavori di magneto-idrodinamica che sono a mia conoscenza, sono adottate le equazioni proposte da ALFVÉN ⁽¹⁾, il quale si riferisce a fluidi che abbiano conducibilità elettrica sufficientemente grande, in modo che il campo elettrico risulti secondario nei confronti del campo magnetico, e le cui particelle si muovano con velocità v molto piccole nei confronti della velocità c della luce, in modo da poter trascurare rispetto all'unità il termine v^2/c^2 .

In base a tali ipotesi, se si indica con \mathbf{E} ed \mathbf{H} il campo elettromagnetico, relativo ad un sistema di coordinate al quale è riferito il moto del fluido, e con \mathbf{E}' ed \mathbf{H}' il campo elettromagnetico relativo ad un sistema di coordinate che trasla rispetto al precedente con la velocità v di una particella del fluido, si può porre

$$(1) \quad \begin{cases} \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mu v \wedge \mathbf{H} \\ \mathbf{H}' = \mathbf{H}, \end{cases}$$

essendo μ la permeabilità magnetica del fluido.

Rileviamo inoltre che, nell'affrontare un problema di magneto-idrodinamica, si è soliti introdurre qualche ulteriore ipotesi semplificatrice, allo scopo di diminuire ancora le difficoltà matematiche offerte dalle suddette equa-

(*) Indirizzo: Istituto Matematico S. PINCHERLE, Università, Bologna, Italia.

(**) Ricevuto il 14-3-1956.

(1) H. ALFVÉN; *Cosmical Elektrodynamics*, Clarendon Press, Oxford 1950. Cfr. Cap. IV; per quello che riguarda l'introduzione delle formule (1) si veda Cap. I, § 3.

zioni di ALFVÉN. Tali ipotesi sono basate, per lo più, su considerazioni fisiche in modo da potere, caso per caso, descrivere il fenomeno che interessa nell'ambito di una sufficiente approssimazione.

2. - Ipotesi considerate.

Le ipotesi di cui ci si occupa sono quattro, e precisamente:

1°) Conducibilità elettrica tale da potersi considerare infinita, ciò che è possibile per esempio quando il fluido considerato è un gas fortemente ionizzato.

2°) Corrente di spostamento trascurabile nei confronti della corrente di conduzione, ciò che per esempio non è consentito nel caso di campi elettrici fortemente variabili in funzione del tempo.

3°) Incompressibilità del fluido, ciò che è da escludersi se si studiano fenomeni di tipo acustico e magnetico ad un tempo.

4°) Mancanza di viscosità, ipotesi questa introdotta da quasi tutti gli autori.

Naturalmente l'aspetto matematico e i risultati fisici del problema variano a seconda della singola ipotesi o del particolare gruppo di ipotesi introdotte: se ne deduce per esempio, caso per caso, l'impossibilità o la possibilità di una propagazione di tipo ondoso.

Proprio a tale riguardo si è ritenuto opportuno esaminare qui in modo sistematico, richiamando anche i risultati già noti sulla questione, tutti i casi che si possono presentare in relazione all'introduzione o meno delle quattro ipotesi citate: il metodo sfruttato è quello abituale delle caratteristiche dei sistemi differenziali⁽²⁾, usato qui nella forma che si riferisce alle condizioni di compatibilità dinamica, nella forma cioè più sintetica e più aderente al senso fisico.

3. - Risultati ottenuti.

Per raggiungere lo scopo suddetto si richiamano anzitutto i punti essenziali del metodo usato e le relative notazioni (n. 4). Si introducono poi le equazioni della magneto-idrodinamica (n. 5) e si mostra che, quando la conduci-

⁽²⁾ T. LEVI CIVITA, *Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa*, Zanichelli, Bologna 1931.

bilità elettrica non si può considerare infinita, c'è netta separazione fra eventuale propagazione elettromagnetica ed eventuale propagazione idrodinamica, per cui un fronte d'onda di tipo elettromagnetico esiste solo quando non si trascuri la corrente di spostamento, mentre invece un fronte d'onda di tipo idrodinamico esiste solo per fluidi compressibili e non viscosi (n. 6).

Introdotte poi le equazioni valide per i fluidi aventi conducibilità elettrica infinita (n. 7), si tratta anzitutto il caso di fluidi ideali incompressibili: a tale riguardo si mette in evidenza il fatto che, trascurando la corrente di spostamento, si ha solo il tipico fronte d'onda magneto-idrodinamico già ampiamente noto, la cui esistenza però viene qui dimostrata in condizioni più generali di quanto era stato fatto finora (n. 11). Non trascurando invece la corrente di spostamento (ed è doveroso dire che con ciò i termini introdotti sono, nella maggior parte dei casi concreti, molto piccoli rispetto ai termini già esistenti), si ottiene il risultato, interessante dal punto di vista concettuale, che sono possibili, in generale, quattro valori per la velocità di avanzamento di fronti d'onda aventi carattere magneto-idrodinamico (nn. 8 e 9). Due di tali valori si distinguono fra loro e dai rimanenti solo se sul fronte d'onda non è nulla la componente tangenziale H_t del campo magnetico (n. 10). Questi due valori si ripresentano anche nel caso di fluidi ideali compressibili, non risultando affatto modificati dalla comprimibilità del mezzo ed anche qui portano entrambi, qualora si trascuri la corrente di spostamento, alla velocità di propagazione del tipico fronte d'onda magneto-idrodinamico.

Il risultato di maggior rilievo è però forse dato dal fatto che, sempre supposto il fluido compressibile, sono possibili, quando sul fronte d'onda non è nulla la componente H_t , altri modi di propagazione (da due a quattro a seconda dei casi), dovuti ad una sovrapposizione di fenomeni magneto-idrodinamici e fenomeni dipendenti dalla comprimibilità del mezzo, in particolare fenomeni di tipo acustico (nn. 12 e 13); l'esistenza di due diversi modi di propagazione con manifesta influenza mutua fra i due tipi di fenomeni, riscontrabile nell'espressione che fornisce la velocità di avanzamento, si ha anche in assenza di corrente di spostamento (n. 14) e quindi può venir apprezzata in alcuni problemi concreti, come si mostra riportando dei dati numerici relativi a questioni di fisica cosmica (n. 15).

Si rileva infine che per fluidi viscosi e perfettamente conduttori non è possibile propagazione alcuna (n. 16).

Quale immediata applicazione dei risultati ottenuti si calcola la soluzione generale di due problemi particolari (nn. 17 e 18).

Giova sottolineare il fatto che i risultati ottenuti vanno visti entro i limiti in cui ci siamo posti, secondo le premesse del n. 1, per servirci delle equazioni di ALFVÉN; è possibile che i detti risultati subiscano delle modifiche in un'impostazione della magneto-idrodinamica su basi rigorosamente relativistiche:

tale impostazione, per quanto mi consta, non è stata finora affrontata, probabilmente per le ardue difficoltà che certamente comporterebbe nel suo svolgimento.

Riteniamo però che non sia privo di interesse quanto qui si è fatto riferendosi all'impostazione del problema che finora ha portato fecondi risultati soprattutto nel campo della fisica cosmica.

§ 2. - Richiami sulle condizioni di compatibilità.

4. - Premettiamo alcuni brevi cenni sul metodo delle caratteristiche, soprattutto allo scopo di introdurre in modo organico le relative notazioni. Seguendo il LEVI-CIVITA⁽³⁾, ricordiamo che, attraverso un eventuale fronte d'onda σ , si potranno pensare discontinue le derivate di ordine massimo delle funzioni che compaiono nelle equazioni scalari ottenute dalle equazioni vettoriali del problema, mentre saranno continue le funzioni e le eventuali derivate di ordine minore.

Sia

$$z(x_1, x_2, x_3, t) = z_0.$$

con z_0 costante, l'equazione della superficie σ in funzione del tempo: tale equazione, com'è noto, rappresenta nello spazio cinematico x_1, x_2, x_3, t la varietà caratteristica Σ del fenomeno. Nello spazio geometrico x_1, x_2, x_3 i valori

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

sono legati alle componenti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ del vettore \mathbf{n} normale, in un istante assegnato, alla superficie σ , dalle relazioni

$$\alpha_i = \frac{p_i}{g} \quad (i = 1, 2, 3), \quad g = \pm \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2};$$

inoltre, detta a la velocità di avanzamento del fronte d'onda rispetto al sistema di coordinate O, x_1, x_2, x_3 , a cui è riferito il moto del fluido, e posto

$$p_0 = \frac{\partial z}{\partial t},$$

(3) Opera citata, § 3.

si ha la formula

$$(2) \quad a = -\frac{p_0}{g} \quad (4).$$

Si supponga ora che attraverso la varietà Σ siano discontinue le derivate parziali prime di una certa funzione $f(x_1, x_2, x_3, t)$; si convenga di indicare con la lettera Δ premessa ad un simbolo il salto attraverso la Σ della quantità rappresentata da tale simbolo. Note considerazioni differenziali fatte nello spazio cinematico mostrano che le discontinuità delle derivate $\partial f/\partial x_i$ ($i = 0, 1, 2, 3; x_0 = t$) devono soddisfare alle relazioni

$$\Delta \frac{\partial f}{\partial x_i} = l p_i \quad (i = 0, 1, 2, 3),$$

dove l è un parametro a priori indeterminato che caratterizza le discontinuità in questione.

Se poi si indicano con u_1, u_2, u_3 le componenti di un vettore \mathbf{u} sugli assi corrispondenti e con l_1, l_2, l_3 i rispettivi parametri caratteristici delle discontinuità delle derivate parziali prime attraverso la varietà Σ , tali l_1, l_2, l_3 potranno essere interpretati come componenti di un vettore \mathbf{l} che caratterizza globalmente le dette discontinuità; in formole si avrà:

$$\Delta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = p_i \mathbf{l} \quad (i = 0, 1, 2, 3).$$

In base a tali relazioni, di tipo geometrico-cinematico, dalle equazioni che reggono il fenomeno si potranno ricavare fra i detti parametri delle relazioni che sono appunto le condizioni di compatibilità dinamica. In tutti i casi qui considerati tali relazioni risultano lineari, trattandosi sempre, come si vedrà, di sistemi differenziali in cui le derivate di ordine massimo si presentano linearmente, ed omogenee, in quanto ogni discontinuità delle derivate di ordine massimo contiene uno dei parametri; si potrà allora sempre applicare la

(4) Per le considerazioni che seguono non è necessario specificare il segno da cui si intende affetto g ; è noto che, per convenzione, nei problemi concreti si sceglie il segno in modo che sia $a > 0$ se si tratta di un fronte d'onda di prora e $a < 0$ se si tratta di un fronte di poppa. Qui importa solo tener presente che ogni valore di a , che sarà ricavato in seguito, può essere accompagnato dal suo valore opposto; in ogni caso basterà riferirsi al modulo.

regola pratica ⁽⁵⁾ secondo la quale, annullando il determinante del sistema costituito dalle condizioni di compatibilità dinamica, si ottiene l'equazione delle varietà caratteristiche e da questa, volta per volta, si può desumere l'indicazione dell'impossibilità o della possibilità di fronti d'onda, con il valore della corrispondente velocità di avanzamento.

§ 3. - Equazioni della magneto-idrodinamica.

5. - Sia dato un fluido elettricamente conduttore, isotropo ed omogeneo anche dal punto di vista elettromagnetico: le costanti ν , ε , μ e γ siano rispettivamente coefficiente cinematico di viscosità, costante dielettrica, permeabilità magnetica e conducibilità elettrica. Quando non si introduce nessuna delle ipotesi esposte nel n. 2, ma ci si basa sulle (1), le equazioni della magneto-idrodinamica, relative al sistema O, x_1, x_2, x_3 al quale si riferisce il moto del fluido, sono espresse da

$$(3) \quad \text{rot } \mathbf{H} = \gamma \cdot (\mathbf{E} + \mu \mathbf{v} \wedge \mathbf{H}) + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

$$(4) \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

$$(5) \quad \text{div } \mathbf{H} = 0,$$

$$(6) \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \cdot \text{grad } p + \frac{\mu\gamma}{\rho} (\mathbf{E} + \mu \mathbf{v} \wedge \mathbf{H}) \wedge \mathbf{H} + \nu \cdot \left(\Delta' \mathbf{v} + \frac{1}{3} \cdot \text{grad div } \mathbf{v} \right) \quad (6),$$

$$(7) \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \text{div } \mathbf{v} = 0,$$

dove ρ è la densità del fluido e, se il fluido è compressibile, la pressione p è funzione di ρ in base all'equazione complementare, che qui non occorre specificare.

⁽⁵⁾ Si veda LEVI-CIVITA, Opera citata, § 7.

⁽⁶⁾ Anche volendo negare, secondo TRUESDELL (*Elasticity and fluids dynamics*, J. Rational. Mech. Anal. **1** (1951), 124-301, Cfr. Cap. V), la validità della formula $3\lambda + 2\nu = 0$, essendo λ l'altro coefficiente cinematico di viscosità, i risultati che seguono non vengono modificati. Identica conclusione si ha anche nei riguardi della introduzione a secondo membro della (6) di forze di natura non elettromagnetica.

§ 4. - Caso della conducibilità elettrica finita.

6. - Quando la conducibilità del fluido risulta finita, attraverso un'eventuale varietà caratteristica risultano continui i termini che si possono chiamare magneto-idrodinamici e precisamente il termine $\gamma\mu\mathbf{v}\wedge\mathbf{H}$ dell'equazione (3) ed il gruppo di termini $\frac{\mu'}{\rho}(\mathbf{E} + \mu\mathbf{v}\wedge\mathbf{H})\wedge\mathbf{H}$ dell'equazione (6), in quanto non contengono derivate (7).

Se ne deduce che, per la determinazione dei fronti d'onda secondo il metodo richiamato precedentemente, il gruppo delle equazioni (3), (4) e (5) può essere trattato separatamente da quello delle rimanenti (6) e (7): il primo gruppo di equazioni dà luogo ad un'equazione delle varietà caratteristiche in cui entrano solo elementi del campo elettromagnetico e quindi, indipendentemente da ogni ipotesi di natura idrodinamica, si ha un fronte d'onda con velocità di propagazione $c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ nel caso in cui si mantenga la corrente di spostamento, mentre non esiste fronte d'onda nel caso in cui tale corrente venga considerata trascurabile; il secondo gruppo di equazioni dà luogo ad un problema puramente idrodinamico e quindi, indipendentemente da ogni ipotesi di natura elettromagnetica, esiste un fronte d'onda che ha velocità di propagazione data da $\sqrt{dp/d\rho}$ solo nel caso di un fluido compressibile non viscoso. Ovviamente esistono entrambi i modi di propagazione, ma senza mutua influenza, per fenomeni nei quali non si possa trascurare la corrente di spostamento e che si riferiscano al caso di un fluido ideale e compressibile.

§ 5. - Equazioni nel caso della conducibilità infinita.

7. - Nel caso in cui la conducibilità γ si può considerare infinita l'equazione (3) si riduce a

$$(8) \quad \mathbf{E} = -\mu\mathbf{v}\wedge\mathbf{H}$$

(7) Tali considerazioni generalizzano quanto è stato precedentemente osservato per fluidi perfetti incompressibili nel n. 14 della Nota *Su particolari campi alternativi della magneto-idrodinamica*, Atti Acc. Sc. Torino, Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. **89** (1954) 16-35.

Rileviamo inoltre che, il fatto di aver ammessa la continuità dei vettori \mathbf{E} , \mathbf{H} e \mathbf{v} attraverso un'eventuale fronte d'onda, fa escludere dalla trattazione le onde d'urto, per la parte idrodinamica, e le onde di LOVE, per la parte elettromagnetica.

e di conseguenza, ricordando che è

$$\operatorname{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{H}) = (\mathbf{H} \cdot \operatorname{grad})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad})\mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \operatorname{div} \mathbf{v},$$

$$(\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad})\mathbf{H} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{d\mathbf{H}}{dt},$$

l'equazione (4) diventa

$$(9) \quad \frac{d\mathbf{H}}{dt} - (\mathbf{H} \cdot \operatorname{grad})\mathbf{v} + \mathbf{H} \cdot \operatorname{div} \mathbf{v} = 0;$$

infine, sempre in base alla (8), l'equazione (6) assume la forma

$$(10) \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \cdot \operatorname{grad} p + \frac{\mu\gamma}{\rho} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H} \wedge \mathbf{H} + \\ + \frac{1}{c^2} \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial \mathbf{v} \wedge \mathbf{H}}{\partial t} \wedge \mathbf{H} + \nu \cdot \left(\Delta' \mathbf{v} + \frac{1}{3} \cdot \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} \right).$$

Per lo studio dei fronti d'onda consideriamo anzitutto fluidi ideali ($\nu = 0$); conviene inoltre trattare separatamente il caso dei fluidi incompressibili da quello dei fluidi compressibili.

§ 6. - Fluidi ideali incompressibili e perfettamente conduttori.

8. - Equazione delle varietà caratteristiche.

Il caso di fluidi ideali, incompressibili e perfettamente conduttori è stato già considerato da CARINI⁽⁸⁾ in assenza della corrente di spostamento, oppure tenendo conto anche della corrente di spostamento ma limitandosi ad un particolare caso piano. Qui invece si tratterà il caso in generale.

Essendosi supposto il fluido omogeneo, se esso è anche incompressibile si ha $\rho = \text{cost.}$, per cui la (7) diventa

$$(11) \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

⁽⁸⁾ G. CARINI, *Condizioni di compatibilità dinamica nella teoria delle onde magneto-idrodinamiche*, Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend. Cl. Sci. Mat. Nat. **87** (1954), 433-438; *Osservazioni riguardanti le onde magneto-idrodinamiche di Alfven*, idem, 150-156.

Ricaviamo ora le relazioni che intercorrono fra le discontinuità, attraverso l'eventuale varietà caratteristica Σ , delle derivate che compaiono nelle equazioni (9), (10), (5) e (11), sempre tenendo presente che attraverso la Σ i vettori \mathbf{H} e \mathbf{v} si suppongono continui; si ha precisamente

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta \frac{d\mathbf{H}}{dt} - (\mathbf{H} \cdot \Delta \text{grad})\mathbf{v} = 0 \\ \Delta \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \cdot \Delta \text{grad } p + \frac{\mu\gamma}{\rho} \cdot \Delta \text{rot } \mathbf{H} \wedge \mathbf{H} + \frac{1}{c^2} \frac{\mu}{\rho} \cdot \Delta \frac{\partial \mathbf{v} \wedge \mathbf{H}}{\partial t} \wedge \mathbf{H} \\ \Delta \text{div } \mathbf{H} = 0, \quad \Delta \text{div } \mathbf{v} = 0. \end{array} \right.$$

Basandosi sulle premesse esposte al n. 4, indichiamo con \mathbf{h} e \mathbf{w} i vettori caratteristici delle discontinuità presentate attraverso la Σ dalle derivate prime delle componenti rispettivamente del campo magnetico \mathbf{H} e dalla velocità \mathbf{v} ; analogamente sia λ il parametro relativo alle discontinuità delle derivate prime della pressione p . Ora, posto

$$s = \frac{dz}{dt},$$

richiamando calcoli eseguiti da CARINI ⁽⁹⁾ si ha

$$\Delta \frac{d\mathbf{H}}{dt} = s\mathbf{h},$$

$$(\mathbf{H} \cdot \Delta \text{grad})\mathbf{v} = gH_n \mathbf{w} \quad (H_n = \mathbf{H} \times \mathbf{n}),$$

$$\Delta \text{grad } p = \lambda g \mathbf{n},$$

$$\Delta \text{rot } \mathbf{H} = g \mathbf{n} \wedge \mathbf{h}.$$

Inoltre si ottiene

$$\Delta \text{div } \mathbf{H} = \Delta \left(\frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H_2}{\partial x_2} + \frac{\partial H_3}{\partial x_3} \right) = \sum_1^3 h_i p_i = g \mathbf{h} \times \mathbf{n},$$

$$\Delta \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = p_0 \mathbf{h}.$$

⁽⁹⁾ Precisamente nel primo dei due lavori citati nella annotazione precedente.

Dalle equazioni (12) si ricavano allora le seguenti condizioni di compatibilità dinamica:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} s\mathbf{h} - gH_n \mathbf{w} = 0 \\ s\mathbf{w} + \frac{\mu}{\rho} g \cdot (\mathbf{h} \wedge \mathbf{n}) \wedge \mathbf{H} - \frac{\mu}{c^2 \rho} p \cdot (\mathbf{w} \wedge \mathbf{H} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{h}) \wedge \mathbf{H} + \frac{\lambda g}{\rho} \mathbf{n} = 0 \\ \mathbf{h} \times \mathbf{n} = 0 \\ \mathbf{w} \times \mathbf{n} = 0. \end{array} \right.$$

Allo scopo di eliminare il parametro λ si può moltiplicare scalarmente per \mathbf{n} la (13₂) e si ricava, tenendo conto di (13₃) e (13₄) e di immediati passaggi,

$$(14) \quad \frac{\lambda g}{\rho} = -\frac{\mu}{\rho} g \mathbf{h} \times \mathbf{H} + \frac{\mu}{c^2 \rho} p_0 \cdot (H_n \mathbf{w} \times \mathbf{H} - v_n \mathbf{h} \times \mathbf{H}).$$

Dalla (13₁), escludendo il caso $s = 0$, che comporterebbe la presenza di una superficie di discontinuità solidale con il fluido in moto, si ricava poi

$$(15) \quad \mathbf{h} = \frac{gH_n}{s} \mathbf{w}.$$

Introducendo i valori (14) e (15) nella (13₂), moltiplicando per s e dividendo per $g^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$, che certamente non è zero su un effettivo fronte d'onda, ci si può ricondurre ad un'unica equazione vettoriale nell'incognita \mathbf{w} , che sinteticamente ha la forma

$$(16) \quad \xi \mathbf{w} + \mathbf{w} \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{b} = 0,$$

essendo

$$(17) \quad \xi = \frac{s^2}{g^2} - \frac{\mu}{\rho} H_n^2 + \frac{\mu}{c^2 \rho} \frac{p_0}{g} \left(\frac{s}{g} H^2 - H_n \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right),$$

$$\mathbf{b} = \frac{\mu}{c^2 \rho} \frac{p_0}{g} \left(H_n \mathbf{v}_t - \frac{s}{g} \mathbf{H}_t \right).$$

Per ottenere tali espressioni di ξ e \mathbf{b} è stata separata nei vettori \mathbf{H} e \mathbf{v} la parte normale alla superficie d'onda da quella tangenziale, cioè in formule

$$(18) \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_t + \mathbf{H}_n, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_t + \mathbf{v}_n.$$

Per la regola pratica ricordata al n. 4, l'equazione delle varietà caratteristiche si ricava annullando il determinante dei coefficienti di w_1, w_2, w_3 , nel sistema scalare rappresentato dalla (16), ed è così espressa da

$$\begin{vmatrix} \xi + H_1 b_1 & H_2 b_1 & H_3 b_1 \\ H_1 b_2 & \xi + H_2 b_2 & H_3 b_2 \\ H_1 b_3 & H_2 b_3 & \xi + H_3 b_3 \end{vmatrix} = \xi^2(\xi + \mathbf{H} \times \mathbf{b}) = 0.$$

9. - Calcolo dei valori possibili per la velocità di avanzamento.

Il problema si scinde così in due equazioni: in base alla (2), alle (18) e dato che, per il significato di s , è, con le notazioni del n. 4,

$$s = p_0 + g \sum_1^2 \alpha_i v_i = p_0 + g v_n,$$

la prima equazione, espressa da $\xi = 0$, si può scrivere esplicitamente

$$(19) \quad \left(1 + \frac{\mu}{c^2 \rho} H^2\right) a^2 - \left[v_n \cdot \left(2 + \frac{\mu}{c^2 \rho} H_t^2\right) - \frac{\mu}{c^2 \rho} H_n \mathbf{H}_t \times \mathbf{v}_t \right] a + v_n^2 - \frac{\mu}{\rho} H_n^2 = 0.$$

La seconda equazione, $\xi + \mathbf{H} \times \mathbf{b} = 0$, diventa, scritta esplicitamente,

$$(20) \quad \left(1 + \frac{\mu}{c^2 \rho} H_n^2\right) a^2 - 2v_n a + v_n^2 - \frac{\mu}{\rho} H_n^2 = 0.$$

Si può subito notare che la (19) si riconduce alla (20) se sul fronte d'onda è $\mathbf{H}_t = 0$, ciò che, per la supposta continuità di \mathbf{H} , è richiesto nel caso, molto frequente nei problemi concreti, di una superficie d'onda che si propaghi nella direzione di un campo magnetico \mathbf{H}_n preesistente, separando la regione non perturbata da fenomeni magneto-idrodinamici da quella in cui tali fenomeni sono in atto.

Risolvendo la (20) si trovano due valori per la velocità di avanzamento i quali, posto per brevità

$$V = |\sqrt{\mu/\varrho} H_n|,$$

sono espressi da

$$(21) \quad a = \frac{v_n \pm V\sqrt{1 + (V^2 - v_n^2)/c^2}}{1 + V^2/c^2},$$

dove il radicando è certamente positivo, dato che, come si è ammesso in partenza (n. 1), è $v_n^2/c^2 \ll 1$; questo termine perciò potrebbe anche venir trascurato, mentre invece non è da escludere che il termine V^2/c^2 possa apportare correzioni non del tutto trascurabili ⁽¹⁰⁾.

A proposito dei valori forniti dalla (21) si può osservare che, fissato v_n , uno di questi due valori risulta maggiore e l'altro minore di v_n : se infatti a primo membro della (20) si pone v_n al posto di a si ha

$$-\frac{\mu}{\varrho} H_n^2 \left(1 - \frac{v_n^2}{c^2}\right) - 2v_n^2 < 0;$$

è da notare anche che cambiando segno a v_n i moduli dei due valori si scambiano fra loro.

Nel caso particolare in cui è $v_n = V$ si ha un solo modo di propagazione con velocità di avanzamento data da $a = 2V/\left(1 + \frac{V^2}{c^2}\right)$.

Anche nel caso in cui è $v_n = 0$ si ha un solo modo di propagazione con ⁽¹¹⁾

$$(22) \quad a = \frac{V}{\sqrt{1 + V^2/c^2}} \quad (V = |\sqrt{\mu/\varrho} H_n|).$$

Rileviamo ancora che, assegnato a V un valore arbitrario, si può facilmente verificare che il massimo modulo di a fornito dalla (21) è c e tale massimo è raggiunto per $|v_n| = c$.

⁽¹⁰⁾ Secondo dati raccolti da ALFVÉN — si veda loco citato in (1), Cap. V, tabella 5.2 — nella corona solare a distanza $15 \cdot 10^8$ m dal centro del sole il termine V può raggiungere il valore $0,5 \cdot 10^7$ m/sec, cioè circa 1/60 della velocità della luce.

⁽¹¹⁾ Il procedimento che porta alla (22) estende la validità della formula che CARRINI, nel secondo lavoro citato nella annotazione (8), ha ricavato nel particolare caso piano in cui si ammetta che la componente H_t del campo magnetico, normale alla direzione (costante) di propagazione, risulti ovunque parallela all'analogha componente v_t della velocità.

Consideriamo infine la (19) nel caso in cui sia H_t non nullo sul fronte d'onda ⁽¹²⁾; nei casi concreti, fissato v_n , anche qui una delle due radici, generalmente distinte ⁽¹³⁾, risulta maggiore e l'altra minore di v_n : se infatti a primo membro della (19) si pone v_n al posto di a si ha come risultato

$$-\frac{\mu}{\rho} H_n^2 \left(1 - \frac{v_n^2}{c^2}\right) - \frac{1}{c^2} \frac{\mu}{\rho} H_n v_n \mathbf{H}_t \times \mathbf{v}_t,$$

che nei casi concreti è negativo in quanto il secondo termine, l'unico che potrebbe essere positivo, risulta preceduto dal fattore $1/c^2$ ed è quindi trascurabile nei confronti del primo termine; a differenza però di quanto avviene per le radici dell'equazione (20), i due moduli si scambiano fra loro solo se, lasciando inalterati gli altri elementi, si cambia verso a tutto il vettore \mathbf{v} (oppure contemporaneamente a v_n ed H_n , oppure a v_n ed H_t) inoltre le radici si mantengono separate anche se si suppone $v_n = 0$.

Si conclude allora che per la velocità di avanzamento sono possibili in generale due valori, che non dipendono dalle componenti tangenziali al fronte d'onda della velocità e del campo magnetico, e altri due valori che dipendono invece da quelle grandezze: tale risultato ha interesse più che altro concettuale, in quanto, come si mostrerà al n. **II**, i detti quattro valori vengono a ridursi ad uno solo quando, come avviene nella maggiore parte dei problemi concreti, si trascura la corrente di spostamento.

⁽¹²⁾ A questo proposito dirò che, per quanto è a mia conoscenza, non sono apparsi finora lavori che si riferiscano a casi concreti al riguardo, però non sembra ci siano ragioni di escludere a priori la possibilità che si possano, per esempio, propagare fenomeni magneto-idrodinamici in una regione dove sussista già un campo magnetico che presenti anche una componente tangenziale rispetto al fronte d'onda; basterà ricordare che, nel caso in cui il fluido sia compressibile, tale possibilità esiste ed è stata messa in evidenza da HERLOFSON [*Magneto-hydrodynamic waves in a compressible fluid conductor*, Nature, **165** (1950), 1020-1021], per fenomeni piani in cui si trascuri la corrente di spostamento e da VAN DE HULST [*Interstellar Polarization and magneto-hydrodynamic waves*, Proceedings of the Symposium on the motion of gaseous masses, Paris 1949] per fenomeni alternativi piani tenendo conto anche della corrente di spostamento: qualche ulteriore cenno su ciò sarà dato al n. **12** e al n. **14**.

⁽¹³⁾ Il discriminante dell'equazione (19),

$$\left(\frac{\mu}{c^2 \rho}\right)^2 [H_t^2 v_n - \mathbf{H}_t \times \mathbf{v}_t H_n]^2 + 4 \frac{\mu}{\rho} H_n^2 \left(1 + \frac{\mu H^2}{c^2 \rho}\right) - 4 \frac{\mu}{c^2 \rho} H_n v_n \mathbf{H}_t \times \mathbf{v}_t,$$

è infatti nei casi concreti positivo, in quanto l'ultimo termine, l'unico che potrebbe essere negativo, è da ritenersi molto piccolo, per esempio in confronto al termine $4(\mu/\rho)H_n^2$, per la presenza del fattore $1/c^2$.

10. - Casi particolari.

Accenniamo a qualche caso particolare che sussiste se sul fronte d'onda si introduce una delle ipotesi seguenti:

a) $H_n=0$. In tale ipotesi si hanno complessivamente solo due valori per la velocità di avanzamento, anzichè quattro, entrambi indipendenti da v_t : infatti una delle radici dell'equazione (19) e le due radici, in tale caso coincidenti, dell'equazione (20) forniscono tutte l'espressione $a = v_n$, che rappresenta un fenomeno puramente meccanico; l'altra radice dell'equazione (19) dà invece

$$a = \frac{v_n}{1 + \left\{ \frac{\mu}{c^2 \varrho} \right\} H_t^2}$$

che porta, per la presenza del campo magnetico tangenziale H_t , ad una più lenta propagazione di un fenomeno che, altrimenti, coinciderebbe con quello puramente meccanico di cui si è parlato prima.

b) $v_t=0$. Scompare in tale ipotesi il diverso comportamento, riscontrato nel caso generale, fra le radici dell'equazione (19) e quelle dell'equazione (20): la (19) infatti dà luogo alla soluzione

$$a = \frac{1}{2[1 + \left\{ \frac{\mu}{c^2 \varrho} \right\} H^2]} \left[\left(2 + \frac{\mu}{c^2 \varrho} H_t^2 \right) v_n \pm \right. \\ \left. \pm \sqrt{\left(\frac{\mu}{c^2 \varrho} H_t^2 v_n \right)^2 + 4 \frac{\mu}{\varrho} H_n^2 \left(1 + \frac{\mu}{c^2 \varrho} H^2 - \frac{v_n^2}{c^2} \right)} \right],$$

nella quale i moduli della velocità di avanzamento dipendono dal segno della sola v_n (e non dal segno di H_t od H_n) e si scambiano fra loro cambiando segno a v_n , venendo a coincidere se è nulla anche v_n . Ai suddetti due valori si aggiungono, inalterati, i due valori forniti dalla formula (21).

11. - Caso in cui si trascura la corrente di spostamento.

Esaminiamo infine il caso in cui si possa trascurare la corrente di spostamento; per tale caso si può utilizzare lo sviluppo di calcolo dei nn. 8 e 9 senza tener conto dei termini dovuti alla corrente di spostamento e cioè dei

Ricavando dalla prima equazione

$$\mathbf{h} = \frac{gH_n}{s} \mathbf{w} - \frac{gw_n}{s} \mathbf{H}$$

e dall'ultima

$$\lambda_1 = -\frac{gg}{s} w_n,$$

introducendo tali espressioni nella (23₂), si ottiene un'equazione nella sola incognita \mathbf{w} che sinteticamente, dopo qualche facile calcolo, si scrive

$$(24) \quad \xi \mathbf{w} + \mathbf{H} \times \mathbf{w} \cdot \mathbf{c} + w_n \mathbf{d} = 0,$$

dove ξ ha ancora l'espressione (17), mentre è

$$(25) \quad \mathbf{c} = \frac{\mu}{\varrho} \mathbf{H}_n + \frac{\mu}{c^2 \varrho} \frac{p_0}{g} \left(H_n \mathbf{v} - \frac{s}{g} \mathbf{H} \right),$$

$$(26) \quad \mathbf{d} = \frac{\mu}{\varrho} H_n \mathbf{H} + \frac{\mu}{c^2 \varrho} \frac{p_0}{g} (\mathbf{v} \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} - H^2 \mathbf{v}) - \left(\frac{\mu}{\varrho} H^2 + \frac{dp}{d\varrho} \right) \mathbf{n}.$$

L'equazione delle varietà caratteristiche si ottiene uguagliando a zero il determinante⁽¹⁵⁾ dei coefficienti di w_1, w_2, w_3 nel sistema scalare rappresentato dall'equazione (24) e cioè il determinante

$$\begin{vmatrix} \xi + H_1 c_1 + \alpha_1 d_1 & H_2 c_1 + \alpha_2 d_1 & H_3 c_1 + \alpha_3 d_1 \\ H_1 c_2 + \alpha_1 d_2 & \xi + H_2 c_2 + \alpha_2 d_2 & H_3 c_2 + \alpha_3 d_2 \\ H_1 c_3 + \alpha_1 d_3 & H_2 c_3 + \alpha_2 d_3 & \xi + H_3 c_3 + \alpha_3 d_3 \end{vmatrix};$$

fatti i calcoli ne risulta la relazione

$$(27) \quad \xi \cdot [\xi^2 + (\mathbf{H} \times \mathbf{c} + \mathbf{n} \times \mathbf{d}) \xi + \mathbf{H} \wedge \mathbf{n} \times \mathbf{c} \wedge \mathbf{d}] = 0.$$

⁽¹⁵⁾ Con c_1, c_2, c_3 e d_1, d_2, d_3 si indicano le componenti sugli assi cartesiani dei vettori \mathbf{c} e \mathbf{d} , mentre le α_i sono le analoghe componenti del versore \mathbf{n} .

Il problema si scinde anche qui in due equazioni di cui la prima, rappresentata da $\xi = 0$, è fornita dalla (19) che, come si è detto, dà luogo, senza che qui la comprimibilità del mezzo eserciti alcuna influenza, a due modi di propagazione, generalmente distinti, relativi a fronti d'onda di tipo magneto-idrodinamico.

L'altra equazione comporta calcoli laboriosi a cui qui accenneremo rapidamente. Intanto il coefficiente del termine di primo grado è espresso da

$$(28) \quad \mathbf{H} \times \mathbf{c} + \mathbf{n} \times \mathbf{d} = 2 \frac{\mu}{\varrho} H_n^2 - \left(\frac{\mu}{\varrho} H^2 + \frac{dp}{d\varrho} \right) + \\ + 2 \frac{\mu}{c^2 \varrho} \mathbf{H}_t \times (v_n \mathbf{H}_t - H_n \mathbf{v}_t) a - \frac{\mu}{c^2 \varrho} H^2 a^2.$$

Per il calcolo del termine noto $\mathbf{H} \wedge \mathbf{n} \times \mathbf{c} \wedge \mathbf{d}$ occorre tenere presente le formule, di facile verifica ⁽¹⁶⁾,

$$\mathbf{H} \wedge \mathbf{n} \times \mathbf{v} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{H}_t \times \mathbf{v}_t,$$

$$\mathbf{H} \wedge \mathbf{n} \times \mathbf{v} \wedge \mathbf{H} = \mathbf{v} \times \mathbf{H} H_n - H^2 \mathbf{v}_n = \mathbf{H}_t \times (H_n \mathbf{v}_t - v_n \mathbf{H}_t).$$

Si può verificare inoltre che, nel calcolo del discriminante dell'equazione in questione, si eliminano fra loro i termini contenenti v_t e v_n e tale discriminante si riduce a

$$D = \left[\frac{\mu}{\varrho} H^2 \left(1 - \frac{a^2}{c^2} \right) - \frac{dp}{d\varrho} \right]^2 + 4 \frac{\mu}{\varrho} H_t^2 \left(1 - \frac{a^2}{c^2} \right) \frac{dp}{d\varrho}$$

e quindi risulta certamente non negativo. Tenendo presente l'espressione esplicita di ξ fornita dalla (17), l'equazione in questione ci dà, dopo facili riduzioni, le due possibilità

$$(-a + v_n)^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\mu}{\varrho} H^2 \left(1 - \frac{a^2}{c^2} \right) + \frac{dp}{d\varrho} \pm \sqrt{D} \right];$$

⁽¹⁶⁾ Basta scambiare il segno di prodotto scalare con il segno di uno dei prodotti vettoriali e applicare quindi la formula del doppio prodotto vettoriale.

tale espressione, che risulta indipendente da v_t , liberata dal radicale e dal doppio segno, assume la forma definitiva

$$(29) \quad \left(1 + \frac{\mu}{c^2 \varrho} H^2\right) a^4 - 2v_n \cdot \left(2 + \frac{\mu H^2}{c^2 \varrho}\right) a^3 + \\ + \left[\left(6 + \frac{\mu}{c^2 \varrho} H^2\right) v_n^2 - \left(\frac{\mu}{\varrho} H^2 + \frac{dp}{d\varrho}\right) - \frac{\mu}{c^2 \varrho} H_n^2 \frac{dp}{d\varrho} \right] a^2 - \\ - 2v_n \left[2v_n^2 - \left(\frac{\mu}{\varrho} H^2 + \frac{dp}{d\varrho}\right) \right] a + v_n^2 \left[v_n^2 - \left(\frac{\mu}{\varrho} H^2 + \frac{dp}{d\varrho}\right) \right] + \frac{\mu}{\varrho} H_n^2 \frac{dp}{d\varrho} = 0.$$

Si può subito osservare che, supponendo $v_n = 0$, l'equazione (29) diventa biquadratica e fornisce per a^2 le due radici

$$(30) \quad a^2 = \frac{1}{2 \{ 1 + [\mu/(c^2 \varrho)] H^2 \}} \left[\frac{\mu}{\varrho} H^2 + \left(1 + \frac{\mu}{c^2 \varrho} H_n^2\right) \frac{dp}{d\varrho} \right] \pm \\ \pm \sqrt{\left\{ \frac{\mu}{\varrho} H^2 + \left(1 + \frac{\mu}{c^2 \varrho} H_n^2\right) \frac{dp}{d\varrho} \right\}^2 + 4 \frac{\mu}{\varrho} H_n^2 \frac{dp}{d\varrho}},$$

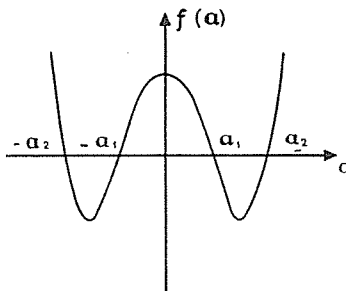
che sono reali, in quanto il discriminante è positivo, e positive in quanto l'equazione stessa presenta due variazioni. Per $v_n = 0$ si hanno così, generalmente, due modi distinti di propagazione, nei quali è evidente la mutua influenza fra fenomeni magneto-idrodinamici e fenomeni dovuti alla comprimibilità del mezzo; con i due modi di propagazione forniti dall'equazione (19) si ha così un totale di quattro modi possibili⁽¹⁷⁾.

Notiamo che fenomeni magneto-idrodinamici e fenomeni dipendenti dalla comprimibilità del mezzo danno luogo a modi di propagazione completamente indipendenti fra loro quando sul fronte d'onda è nulla la componente tan-

⁽¹⁷⁾ Osserviamo che VAN DE HULST — loco citato in ⁽¹²⁾ —, limitandosi a fenomeni piani in cui tutte le incognite del problema sono proporzionali all'esponenziale $e^{i\omega t - ikz}$ (ω e k costanti) e ad equazioni linearizzate (trascurando termini di grado superiore al primo nelle quantità variabili), ha ottenuto solo tre modi possibili per la velocità di propagazione (della fase, in quanto nelle ipotesi precedenti non esistono ovviamente fronti d'onda quali superfici di discontinuità): di questi modi due rientrano nella formula (30) mentre il terzo è l'unico fornito dalla (19) quando vi si ponga $v_n = 0$ e si trascuri il termine non lineare $\mathbf{H}_t \times \mathbf{v}_t$.

genziale H_t del campo magnetico: ciò si verifica, più in generale, anche per $v_n \neq 0$, come sarà rilevato nel numero seguente.

Per dare qualche cenno sul caso generale in cui è $v_n \neq 0$, detto $F(a)$ il primo membro dell'equazione (29) e detta $f(a)$ l'espressione di $F(a)$ quando vi si faccia $v_n = 0$, è utile considerare il diagramma (simmetrico rispetto all'asse delle ordinate) della $f(a)$, tracciato in figura a scopo indicativo. Per ragioni di continuità, se si considerano valori di v_n molto prossimi allo zero, il diagramma di $F(a)$, pur perdendo la simmetria rispetto all'asse delle ordinate, avrà andamento analogo a quello di figura: si osservi, per esempio, che in tutti i casi concreti è



$$F(v_n) = \frac{\mu}{\rho} H_n^2 \frac{dp}{d\varrho} \left(1 - \frac{v_n^2}{c^2} \right) \cong \frac{\mu}{\rho} H_n^2 \frac{dp}{d\varrho} = f(0);$$

se ne deduce che, entro i detti limiti, le radici della (29) saranno quattro, reali e distinte, di cui due maggiori e due minori di v_n . Si può osservare anche che, cambiando segno a v_n senza modificare gli altri elementi, le radici dell'equazione (29) cambiano solo di segno e quindi i moduli dei possibili valori per la velocità di avanzamento restano globalmente gli stessi.

Si presenta perciò la possibilità di complessivi sei valori per la velocità di avanzamento.

13. - Casi particolari.

Giova esaminare i seguenti casi che scaturiscono da un'ipotesi particolare sul fronte d'onda:

a) $H_n = 0$. Sotto questa ipotesi si ha

$$\mathbf{H} \times \mathbf{c} + \mathbf{n} \times \mathbf{d} = \frac{\mu}{c^2 \rho} H_t^2 (2v_n - a) \mathbf{a} - \left(\frac{\mu}{\rho} H_t^2 + \frac{dp}{d\varrho} \right),$$

$$\mathbf{H} \wedge \mathbf{n} \times \mathbf{c} \wedge \mathbf{d} = \frac{\mu}{c^2 \rho} H_t^2 (v_n - a) \mathbf{a} \left[\frac{\mu}{c^2 \rho} H_t^2 v_n a - \left(\frac{\mu}{\rho} H_t^2 + \frac{dp}{d\varrho} \right) \right];$$

da qui si ricava che nell'equazione precedente alla (29) risulta

$$D = \left[\frac{\mu}{\varrho} H_t^2 \left(1 - \frac{a^2}{c^2} \right) + \frac{dp}{d\varrho} \right]^2 :$$

l'equazione (29) si scinde allora in due fattori di cui il primo dà luogo all'equazione

$$(31) \quad (-a + v_n)^2 = 0,$$

che rappresenta un fenomeno puramente meccanico, mentre il secondo fattore presenta le radici

$$a = \frac{v_n}{1 + \{\mu/(c^2\varrho)\} H_t^2} \pm \sqrt{\frac{(\mu/\varrho) H_t^2 + dp/d\varrho}{1 + \{\mu/(c^2\varrho)\} H_t^2} - v_n^2 \frac{\{\mu/(c^2\varrho)\} H_t^2}{[1 + \{\mu/(c^2\varrho)\} H_t^2]^2}},$$

che, nei casi concreti, risultano reali, dato che il termine non positivo sotto radice è moltiplicato per $1/c^2$ e che danno luogo ad una manifesta sovrapposizione di fenomeni magneto-idrodinamici e fenomeni dipendenti dalla comprimibilità del mezzo. Ricordiamo inoltre che l'equazione (19), nell'ipotesi $H_n = 0$ [si veda n. 10, caso a)], dà luogo ancora all'equazione (31) e alla soluzione, puramente magneto-idrodinamica

$$a = \frac{v_n}{1 + \{\mu/(c^2\varrho)\} H_t^2}.$$

b) $H_t = 0$. Dato che ne consegue ovviamente $\mathbf{H} \wedge \mathbf{n} = 0$, nella (27) entro parentesi quadra si annulla l'ultimo termine; la seconda equazione fornita dalla (27) si scinde perciò ancora nell'equazione $\xi = 0$ [che, nel caso particolare in questione, dà luogo ancora all'equazione (20) cioè a due possibili valori per la velocità di avanzamento di un fronte esclusivamente magneto-idrodinamico e indipendente dalla comprimibilità] e nell'equazione

$$\xi = -\frac{\mu}{\varrho} H_n^2 \left(1 - \frac{a^2}{c^2} \right) + \frac{dp}{d\varrho},$$

come risulta facilmente semplificando la (28). Introducendo l'espressione di ξ , fornita dalla (17) e semplificata secondo le possibilità attuali, si ottiene l'equazione

$$(-a + v_n)^2 = dp/d\varrho$$

che rende evidente la presenza di un modo di propagazione di fenomeni dipendenti esclusivamente dalla comprimibilità del mezzo.

Si conclude quindi, che mancando sul fronte d'onda la componente tangenziale del campo magnetico, fenomeni magneto-idrodinamici e fenomeni dovuti alla comprimibilità del mezzo risultano completamente indipendenti.

14. - Caso in cui si trascura la corrente di spostamento.

Il calcolo per il caso in cui si possa trascurare la corrente di spostamento si desume da quello esposto nel n. precedente non tenendo conto, al solito, dei termini contenenti il fattore $1/c^2$. Dalle (17), (25) e (26) si ottengono le notevoli semplificazioni

$$\xi = \frac{s^2}{g^2} - \frac{\mu}{\rho} H_n^2, \quad \mathbf{c} = \frac{\mu}{\rho} \mathbf{H}_n, \quad \mathbf{d} = \frac{\mu}{\rho} H_n \mathbf{H} - \left(\frac{\mu}{\rho} H^2 + \frac{dp}{d\rho} \right) \mathbf{n}.$$

Di qui segue

$$\mathbf{H} \times \mathbf{c} + \mathbf{n} \times \mathbf{d} = \frac{\mu}{\rho} H_n^2 - \frac{\mu}{\rho} H_t^2 - \frac{dp}{d\rho},$$

$$\mathbf{H} \wedge \mathbf{n} \times \mathbf{c} \wedge \mathbf{d} = - \frac{\mu^2 H_n^2}{\rho^2} (\mathbf{H} \wedge \mathbf{n})^2 = - \left(\frac{\mu}{\rho} H_n H_t \right)^2.$$

L'equazione $\xi = 0$ fornita dalla (27) si riduce allora a

$$(32) \quad (-a + v_n)^2 = (\mu/\rho) H_n^2$$

che rappresenta il solito fronte che, trascurando la corrente di spostamento, si è già riscontrato nel caso dei fluidi incompressibili e che perciò qui non risente affatto della comprimibilità del mezzo.

L'altra equazione fornita dalla (27) è invece

$$\xi^2 + \left(\frac{\mu}{\rho} H_n^2 - \frac{\mu}{\rho} H_t^2 - \frac{dp}{d\rho} \right) \xi - \left(\frac{\mu}{\rho} H_n H_t \right)^2 = 0$$

da cui, risolvendo rispetto a ξ ed operando semplici riduzioni, si ricavano le due possibilità

$$(33) \quad (-a + v_n)^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\mu}{\rho} H^2 + \frac{dp}{d\rho} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu}{\rho} H^2 - \frac{dp}{d\rho} \right)^2 + 4 \frac{\mu}{\rho} H^2 \frac{dp}{d\rho}} \right],$$

che si riferiscono a due modi di propagazione distinti dipendenti sia da fenomeni magneto-idrodinamici sia da fenomeni di tipo acustico. In totale si hanno allora tre modi di propagazione, generalmente distinti.

È interessante il caso in cui nella formula (33) uno dei due termini $(\mu/\rho)H^2$ e $dp/d\rho$ è molto piccolo rispetto all'altro: posto allora

$$\varepsilon = \frac{(\mu/\rho)H^2 \cdot (dp/d\rho)}{(\mu/\rho)H^2 - dp/d\rho},$$

dove $\frac{\varepsilon}{(\mu/\rho)H^2 - dp/d\rho}$ è da considerarsi molto piccolo rispetto all'unità, si ha praticamente

$$\sqrt{\left(\frac{\mu}{\rho} H^2 - \frac{dp}{d\rho} \right)^2 + 4 \frac{\mu}{\rho} H^2 \frac{dp}{d\rho}} = \frac{\mu}{\rho} H^2 - \frac{dp}{d\rho} + 2\varepsilon;$$

dalla (33) si deducono allora le relazioni approssimate

$$(-a + v_n)^2 = \begin{cases} (\mu/\rho)H^2 + \varepsilon \\ (dp/d\rho) - \varepsilon, \end{cases}$$

di cui la prima, se il termine trascurabile è $dp/d\rho$, fornisce la velocità di avanzamento di un fronte d'onda essenzialmente di tipo magneto-idrodinamico, perturbato dalla comprimibilità del mezzo, l'altra, se il termine trascurabile è $(\mu/\rho)H^2$, fornisce la velocità di avanzamento di un fronte essenzialmente di tipo acustico, perturbato da fenomeni elettromagnetici.

Nel caso particolare in cui sul fronte d'onda H_t è nullo, la (33) dà

$$a - v_n = \begin{cases} \sqrt{\mu/\rho} \cdot H_n \\ \sqrt{dp/d\rho}, \end{cases}$$

cioè nei riguardi delle possibili velocità di propagazione scompare [come avviene per il caso b) del n. 13] ogni mutua azione fra fenomeni magneto-idrodinamici e fenomeni di tipo acustico.

Come ultimo caso particolare si può supporre invece nullo il campo magnetico H_n normale al fronte d'onda: segue dalla (33) che i soli valori (non nulli) per la velocità di avanzamento sono allora forniti da

$$(34) \quad a = v_n \pm \sqrt{\frac{\mu}{\rho} H_t^2 + \frac{dp}{d\rho}}.$$

Notiamo che nelle formule (32) e (33) si inquadra la possibilità di tre modi distinti di propagazione messi in evidenza da HERLOFSON⁽¹⁸⁾ nel caso di superfici d'onda piane, con l'ulteriore restrizione di considerare quantità variabili sufficientemente piccole in modo da tenere conto dei soli termini del primo ordine. La formula (34) estende poi alle onde non piane, e senza introdurre approssimazioni, uno dei risultati di HERLOFSON, ulteriormente ripreso da ANDERSON⁽¹⁹⁾, sempre con la restrizione di trascurare effetti di ordine superiore al primo.

15. - Alcuni dati numerici.

Per mostrare come la mutua influenza fra fenomeni magneto-idrodinamici e fenomeni dipendenti dalla comprimibilità del mezzo possa risultare sensibile quando H_t non è nullo sul fronte d'onda ed inoltre i termini $(\mu/\rho)H^2$ e $dp/d\rho$ sono all'incirca dello stesso ordine di grandezza, riporteremo qualche dato numerico da introdurre nelle formule del numero precedente.

⁽¹⁸⁾ Loco citato nella annotazione ⁽¹²⁾. Per introdurre una via rapida allo scopo di ritrovare i risultati di HERLOFSON, indicheremo con \mathbf{H}_0 il campo magnetico costante supposto preesistente ed avente inclinazione φ rispetto al vettore \mathbf{n} , qui costante, che rappresenta la direzione di propagazione. Posto

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1 \quad \text{con} \quad H_1 \ll H_0, \quad V = \sqrt{\mu/\rho} \cdot H_0, \quad U = \sqrt{dp/d\rho},$$

la (33), in cui si faccia

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0, \quad H_t = H_0 \cdot \sin \varphi,$$

assume la forma

$$(-a + v_n)^2 = (1/2)[V^2 + U^2 \pm \sqrt{(V^2 - U^2)^2 + 4V^2U^2 \cdot \sin^2 \varphi}].$$

Nel caso in cui sia $U \ll V$, oppure $V \ll U$, si può applicare a quest'ultima formula il metodo approssimato introdotto dopo la formula (33) e si arriva così allo scopo.

⁽¹⁹⁾ N. S. ANDERSON, *Longitudinal magneto-hydrodynamic waves*, J. Acoust. Soc. Amer. **25** (1953), 529-532.

Ci riferiremo, quale primo esempio, alla materia diffusa nella regione interstellare compresa nei bracci di spirale della Galassia: questa materia, diffusa sotto forma di gas o pulviscolo, ha conduttività elettrica molto elevata dell'ordine di 10^7 ohm $^{-1}$.m $^{-1}$ ⁽²⁰⁾. CHANDRASEKHAR e FERMI ⁽²¹⁾, con acute considerazioni relative alla polarizzazione della luce proveniente da stelle lontane, hanno confermato la presenza di un campo magnetico nella detta regione, calcolandone l'induzione, con due metodi indipendenti in pieno accordo, in $6 \cdot 10^{-10}$ volt-sec/m 2 . Sempre basandosi sui dati dei due Autori citati, quali valori medi della densità e della pressione assumeremo

$$\rho_0 = 2 \cdot 10^{-21} \text{ Kg/m}^3, \quad p_0 = 2 \cdot 10^{-14} \text{ newt/m}^2.$$

Supponendo di essere nel caso adiabatico e considerando che le molecole risultano dissociate in ioni monoatomici, si può porre

$$\frac{dp}{d\rho} \cong 1,66 \frac{p_0}{\rho_0} = 1,66 \cdot 10^7 \text{ m}^2/\text{sec}^2;$$

d'altra parte si può assumere per μ il valore che essa ha nel vuoto e cioè $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7}$ ohm.sec/m e perciò

$$(\mu/\rho)H^2 = 1,4 \cdot 10^8 \text{ m}^2/\text{sec}^2.$$

Se ora, nel detto mezzo, si considera la propagazione di un fenomeno ondoso in una direzione inclinata di 45° rispetto al campo magnetico \mathbf{H} , si ha, trascurando sul fronte d'onda l'eventuale campo magnetico indotto nei confronti del campo magnetico preesistente,

$$(\mu/\rho)H_t^2 = (\mu/\rho)H_n^2 = 7 \cdot 10^7 \text{ m}^2/\text{sec}^2.$$

Introducendo i precedenti dati numerici nella formula (33), si hanno i valori

$$|a - v_n| = \begin{cases} 12,2 \cdot 10^3 \text{ m/sec} \\ 2,8 \cdot 10^3 \text{ m/sec} \end{cases}$$

⁽²⁰⁾ Ciò risulta dal fatto che più piccola diventa la densità degli ioni, maggiore diventa il libero cammino medio. Si veda a tale riguardo W. M. ELSASSER, *Dimensional Relations in Magneto-hydrodynamics*, Phys. Rev. **95** (1954), 1-5.

⁽²¹⁾ S. CHANDRASEKHAR and E. FERMI, *Magnetic fields in spiral arms*, Astrophys. J. **118** (1953), 113-115.

relativi ai modi di propagazione che risentono della mutua influenza fra fenomeni di tipo magneto-idrodinamico e fenomeni di tipo acustico; la formula (32) invece per lo stesso fenomeno ci dà il valore

$$|a - v_n| = 8,4 \cdot 10^3 \text{ m/sec},$$

relativo al terzo modo di propagazione, esclusivamente di tipo magneto-idrodinamico.

Se poi si considera una propagazione nella direzione stessa del campo magnetico \mathbf{H} , si ha qui $H_t = 0$ e per i due modi di propagazione, in tale caso indipendenti, uno di tipo magneto-idrodinamico ed uno di tipo acustico, si hanno rispettivamente i valori

$$|a - v_n| = 11,8 \cdot 10^3 \text{ m/sec}, \quad |a - v_n| = 4,1 \cdot 10^3 \text{ m/sec}.$$

Infine per una propagazione in una direzione normale al campo magnetico \mathbf{H} si ha, in base alla formula (34),

$$|a - v_n| = 12,5 \cdot 10^3 \text{ m/sec}.$$

Questi risultati numerici illustrano anche la nota anisotropia che caratterizza i fenomeni magneto-idrodinamici.

Un secondo esempio del genere si ha se si considera la zona situata all'incirca nel centro della cromosfera a distanza di $7,021 \cdot 10^8$ m dal centro del sole. Secondo dati raccolti da ALFVÉN⁽²²⁾, la temperatura è

$$T = 35000^\circ \text{ K},$$

mentre la densità media e la velocità delle onde magneto-idrodinamiche sono, nell'ordine,

$$\rho_0 = 10^{19} \text{ particelle per m}^3,$$

$$(35) \quad \sqrt{\mu/\rho_0} \cdot H = 1,7 \cdot 10^4 \text{ m/sec}.$$

Poichè le particelle presenti sono costituite esclusivamente da atomi di idrogeno, di massa unitaria $1,66 \cdot 10^{-27}$ Kg, si ricava

$$\rho = 1,66 \cdot 10^{-8} \text{ Kg/m}^3.$$

⁽²²⁾ Op. citata in (1), Cap. V, tabella 5.2.

Dato poi che la zona considerata della cromosfera è, globalmente, in condizioni isoterme, se ne può valutare la pressione media mediante la formula

$$p_0 = (RT/M)\rho_0$$

con $R = 8,31$ joule/gradi, mentre M rappresenta la grammomolecola del fluido, che qui, in unità GIORGI, vale 10^{-3} Kg.

Si ricava allora

$$p_0 = 4,8 \text{ newt/m}^2$$

e si conclude che, in condizioni adiabatiche, si può porre

$$\sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{1,66 \cdot \frac{4,8}{1,66 \cdot 10^{-8}}} = 2,2 \cdot 10^4 \text{ m/sec};$$

si ha così un valore che è più vicino, di quanto si sia riscontrato nell'esempio precedente, a quello fornito dalla (35) per $\sqrt{\mu/\rho_0} \cdot H$; è solo da notare che qui, sempre secondo i dati di ALFVÉN, la conducibilità elettrica del mezzo è inferiore a quella dell'esempio precedente in quanto non supera il valore di $10^8 \text{ ohm}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ in direzione parallela al campo magnetico ed è notevolmente minore nelle direzioni ad esso perpendicolari.

§ 8. - Caso dei fluidi viscosi e perfettamente conduttori.

16. - Il caso in cui il fluido abbia conducibilità infinita, ma non si possa considerare nullo il coefficiente di viscosità ν , si può esaurire rapidamente considerando che, per le componenti del vettore velocità \mathbf{v} , risultano presenti nell'equazione (10) le derivate seconde e quindi è da ritenere che attraverso un eventuale fronte d'onda siano continue le componenti stesse e le corrispondenti derivate prime; niente appare mutato per quello che riguarda il campo magnetico \mathbf{H} , che attraverso un eventuale fronte d'onda va considerato continuo, mentre possono presentare discontinuità le sue derivate prime.

La condizione di compatibilità dinamica che si desume dalla (9) diventa allora, con i soliti simboli,

$$s \mathbf{h} = 0,$$

da cui, escludendo il caso di una superficie di discontinuità solidale con il fluido in moto, si ricava $h = 0$ e con ciò resta esclusa l'esistenza di una propagazione ondosa di tipo elettromagnetico. Mancando quindi discontinuità per le derivate prime del vettore \mathbf{H} , le altre condizioni di compatibilità dinamica coincidono con quelle che sussistono nell'idrodinamica in assenza di fenomeni elettromagnetici e che, per un fluido viscoso, portano alla nota conclusione dell'impossibilità di propagazioni ondose⁽²³⁾.

§ 9. - Soluzione di problemi particolari.

17. - Primo problema.

I valori della velocità di propagazione del fronte d'onda, precedentemente ottenuti, possono talvolta essere utilizzati per calcolare la soluzione di qualche problema particolare. Diamo qui due esempi al riguardo.

Quale primo esempio consideriamo un fluido incompressibile, ideale e perfettamente conduttore; limitiamoci al caso piano, supponiamo cioè che tutte le grandezze del problema dipendano dal tempo t e dalla sola coordinata cartesiana x_3 ; supponiamo inoltre che sia nulla la componente E_3 del campo elettrico e cioè in base alla (8) sia

$$(36) \quad H_2 v_1 - H_1 v_2 = 0.$$

Dalla (5) e dalla proiezione della (9) sull'asse x_3 si ottiene che H_3 risulta costante e viene così a costituire un campo magnetico preesistente, che supporremo non nullo e che indicheremo con H_0 . Dalla (10) si ottiene invece

$$\frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0,$$

cioè normalmente al piano che costituisce il fronte d'onda può sussistere solo una traslazione dipendente eventualmente dal tempo: qui supporremo $v_3 = \text{cost.}$

(23) Si veda al riguardo G. LAMPARIELLO, *Sull'impossibilità di propagazioni ondose nei fluidi viscosi*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) **13** (1931), 688-691.

Proiettando la (9) e la (10) sugli assi x_1 e x_2 si ottengono le equazioni

$$(37) \quad \begin{cases} \frac{\partial H_i}{\partial t} + v_3 \frac{\partial H_i}{\partial x_3} - H_0 \frac{\partial v_i}{\partial x_3} = 0, \\ \left(1 + \frac{\mu}{c^2 \varrho} H_0^2\right) \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_3 \frac{\partial v_i}{\partial x_3} = \frac{\mu}{\varrho} H_0 \frac{\partial H_i}{\partial x_3} + \frac{\mu}{c^2 \varrho} H_0 v_3 \frac{\partial H_i}{\partial t}, \end{cases} \quad (i = 1, 2).$$

Per ogni valore dell'indice i si ha quindi un sistema di equazioni indipendente⁽²⁴⁾. Si può applicare l'operatore $\left(1 + \frac{\mu}{c^2 \varrho} H_0^2\right) \frac{\partial}{\partial t}$ alla prima equazione del sistema (37) e l'operatore $H_0 \frac{\partial}{\partial x_3}$ alla seconda; sommando si elimina la v_i e si ottiene l'equazione

$$(38) \quad \left(1 + \frac{\mu}{c^2 \varrho} H_0^2\right) \frac{\partial^2 H_i}{\partial t^2} = \left(\frac{\mu}{\varrho} H_0^2 - v_3^2\right) \frac{\partial^2 H_i}{\partial x_3^2} - 2v_3 \frac{\partial^2 H_i}{\partial t \partial x_3} \quad (i = 1, 2).$$

Ponendo ora, in base alla (21),

$$V_1 = \frac{v_3 + V\sqrt{1 + (V^2 - v_3^2)/c^2}}{1 + V^2/c^2}, \quad V_2 = \frac{v_3 - V\sqrt{1 + (V^2 - v_3^2)/c^2}}{1 + V^2/c^2},$$

si può verificare facilmente che, eseguendo il cambiamento di variabili

$$\tau = V_1 t - x_3, \quad \xi = V_2 t - x_3,$$

la (38) diventa $\frac{\partial^2 H_i}{\partial \tau \partial \xi} = 0$ e il suo integrale generale è dato quindi da

$$H_i(t, x_3) = \Phi_i(V_1 t - x_3) + \Psi_i(V_2 t - x_3) \quad (i = 1, 2),$$

dove le funzioni Φ e Ψ , per ogni valore dell'indice i , sono arbitrarie, salvo una restrizione imposta dalla (36) che sarà specificata più avanti.

⁽²⁴⁾ Se non si fosse imposta la (36), tale separazione non sussisterebbe e la questione diventerebbe notevolmente ardua.

Introducendo tale integrale generale nel sistema (37) si possono ricavare le espressioni delle derivate parziali prime di v_i e, supponendo $\Phi_i(0) = 0$, $\Psi_i(0) = 0$, si ricava facilmente per v_i la relazione

$$v_i(t, x_3) = -(1/H_0) \{ [V_1 - v_3] \Phi_i(V_1 t - x_3) + [V_2 - v_3] \Psi_i(V_2 t - x_3) \} \quad (i = 1, 2).$$

Si può infine ricavare che la (36) impone fra le funzioni Φ_i e Ψ_i la condizione

$$\Phi_1/\Psi_1 = \Phi_2/\Psi_2.$$

18. - Secondo problema.

Per presentare un secondo esempio supponiamo che nel problema precedente sia trascurabile la corrente di spostamento; allora le equazioni scalari corrispondenti si ottengono dalle (37) eliminando i termini contenenti il fattore $1/c^2$ e si hanno così i due sistemi indipendenti

$$\begin{cases} \frac{\partial H_i}{\partial t} + v_3 \frac{\partial H_i}{\partial x_3} - H_0 \frac{\partial v_i}{\partial x_3} = 0, \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_3 \frac{\partial v_i}{\partial x_3} = \frac{\mu}{\rho} H_0 \frac{\partial H_i}{\partial x_3}, \end{cases} \quad (i = 1, 2);$$

è da rilevare però che tali sistemi rimangono inalterati anche se, come supporremo, si sopprime la restrizione (36); inoltre qui si può considerare la componente v_3 della velocità quale funzione assegnata del tempo: $v_3 = v_3(t)$.

Eliminando v_i con il procedimento del caso precedente, si ottiene, per ogni valore dell'indice i , l'equazione

$$(39) \quad \frac{\partial^2 H_i}{\partial t^2} = \left[\frac{\mu}{\rho} H_0^2 - v_3^2(t) \right] \frac{\partial^2 H_i}{\partial x_3^2} - 2v_3(t) \frac{\partial^2 H_i}{\partial t \partial x_3} - \dot{v}_3(t) \frac{\partial H_i}{\partial x_3} \quad (i = 1, 2).$$

Servendosi ancora come punto di partenza della (22), in cui si trascurino i termini contenenti il fattore $1/c^2$, si può allora introdurre il cambiamento di variabili

$$\tau = \int_0^t U_1 dt - x_3, \quad \xi = \int_0^t U_2 dt - x_3$$

con

$$U_1 = \sqrt{\mu/\rho} \cdot H_0 + v_3(t), \quad U_2 = -\sqrt{\mu/\rho} \cdot H_0 + v_3(t);$$

con ciò la (39) si riconduce alla solita equazione $\frac{\partial^2 H_i}{\partial \tau \partial \xi} = 0$ per cui il suo integrale generale è espresso da

$$H_i(t, x_3) = \Phi_i \left(\int_0^t U_1 dt - x_3 \right) + \Psi_i \left(\int_0^t U_2 dt - x_3 \right) \quad (i = 1, 2),$$

dove le Φ_i e Ψ_i sono qui completamente arbitrarie.

Le componenti v_1 e v_2 della velocità sono poi espresse da

$$v_i(t, x_3) = -\sqrt{\mu/\rho} \left[\Phi_i \left(\int_0^t U_1 dt - x_3 \right) + \Psi_i \left(\int_0^t U_2 dt - x_3 \right) \right] \quad (i = 1, 2).$$