

BIANCA MANFREDI (*).

Soluzioni numeriche in problemi pluridimensionali lineari di conduzione del calore. (**)

§ 1. - Introduzione.

In questi ultimi tempi il metodo alle differenze ha trovato notevole applicazione nella risoluzione di problemi differenziali, in quanto presuppone nelle questioni di esistenza e di unicità ipotesi ben poco onerose (si vedano, in proposito, fra gli altri, i recenti lavori di COURANT-ISAACSON-REES [5] ⁽¹⁾ e JOHN [11] e [12]), e, nello stesso tempo, rende agevole il calcolo effettivo della soluzione, giacchè possono vantaggiosamente usarsi le moderne macchine calcolatrici.

Come è già stato fatto per i problemi unidimensionali ([4], [6], [7], [8], ...) ci è parso interessante istituire le premesse necessarie per l'applicazione di tale metodo alla risoluzione dei *problemi pluridimensionali lineari di conduzione del calore*, le cui soluzioni, una volta provata l'esistenza e l'unicità, presentano in genere difficoltà di calcolo il più delle volte non facilmente superabili.

È manifesto che il metodo alle differenze ha validità di approssimazione del problema differenziale, *se e solo se*, lo schema alle differenze è *convergente e stabile*. Da ciò la necessità di dare criteri *almeno sufficienti* di stabilità e di convergenza anche per schemi relativi ai problemi pluridimensionali di propagazione del calore. Nei paragrafi 2, 3 e 4 di questo lavoro abbiamo perciò sta-

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.

(**) Ricevuto il 20-X-1955. Questo lavoro sarà riassunto dall'A. in una comunicazione al 4° Congresso della « Österreichische Mathematische Gesellschaft » (Vienna, 17-18 settembre 1956).

⁽¹⁾ I numeri in parentesi quadre si riferiscono alla Bibliografia al termine del lavoro.

bilito criteri sufficienti di convergenza e stabilità nel caso di più variabili, le cui dimostrazioni hanno richiesto opportune precisazioni ed accorgimenti, così da non risultare immediata estensione di quelli noti nel caso unidimensionale. Nello stesso ordine di idee del nostro precedente lavoro [16], abbiamo poi mostrato (n. 7) come, mediante l'adattamento al metodo delle differenze del Teorema di DUHAMEL, la soluzione del generale problema pluridimensionale, con dati al contorno variabili col tempo, possa ottenersi in due tempi successivi: nel primo determinando la soluzione alle differenze del problema in cui i dati in superficie risultano indipendenti dal tempo (*problema associato*); nel secondo riconducendo la soluzione cercata alla somma di un determinato numero di soluzioni di problemi analoghi al problema associato già considerato. Ci è parso inoltre opportuno stabilire (n. 5) un *criterio sufficiente* che permetta di predisporre dell'effettiva soluzione in modo che tale soluzione approssimi quella esatta a meno di un errore prefissato.

Un'espressiva applicazione del metodo a due problemi interessanti la distribuzione della temperatura in una lamina quadrata completa il lavoro.

§ 2. - Considerazioni generali.

2.1. - Il problema differenziale.

Sia C un mezzo continuo omogeneo, termicamente isotropo, di conduttività costante, e sia σ il suo contorno.

In ogni punto P di C la temperatura dipenda dal posto tramite le r coordinate locali x_1, \dots, x_r di P rispetto ad un prefissato sistema di assi $\{O; x_1, \dots, x_r; t\}$. Sia così $U(x_1, \dots, x_r; t) \equiv U(x; t)$ la funzione incognita che dà la temperatura in P di C all'istante t .

Com'è evidente, senza perdere in generalità, potremo supporre $0 \leq t \leq 1$, ed anche, per semplicità, qualora una x_i ($i = 1, \dots, r$) sia limitata, $0 \leq x_i \leq 1$, potendosi sempre ricondurre a questo caso con un conveniente cambiamento di variabili. Tale cambiamento introduce naturalmente fattori numerici nei coefficienti delle equazioni del problema, che però non portano ad alcun sostanziale mutamento della trattazione, come vedremo meglio in un successivo lavoro, dedicato alla soluzione numerica di analoghi problemi cilindrici e sferici.

Il campo di definizione di $U(x; t)$ nel caso delle coordinate tutte limitate s'indicherà con $Q \equiv \{0 \leq x_i \leq 1; 0 \leq t \leq 1\}$ ($i = 1, \dots, r$), e nel caso contrario con $\Sigma \equiv \{0 \leq x_j; 0 \leq x_i \leq 1; 0 \leq t \leq 1\}$ ($j = 1, \dots, s \leq r; i = s + 1, \dots, r$).

Siano assegnate del mezzo C la temperatura iniziale $f(x)$ e, in ogni istante, la temperatura superficiale $\varphi(\bar{x}; t)$, avendo indicato con \bar{x} un punto generico $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r)$ del contorno σ di C . Il problema allora di determinare $U(x; t)$ in Q , o in Σ , si traduce analiticamente nel seguente sistema alle derivate parziali:

$$(U) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial U(x; t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^r \frac{\partial^2 U(x; t)}{\partial x_i^2} & \text{per } (x; t) \text{ interno a } Q, \text{ oppure } (x; t) \text{ interno a } \Sigma, \\ U(x; 0) = f(x) & \text{per } x \equiv (x_1, \dots, x_r) \text{ interno a } C, \quad t = 0, \\ U(\bar{x}; t) = \varphi(\bar{x}; t) & \text{per } \bar{x} \equiv (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r) \in \sigma, \quad 0 \leq t \leq 1, \end{array} \right.$$

dove si è supposta unitaria la conduttività di C (il che è sempre possibile) e si sono rese preventivamente adimensionali tutte le equazioni del problema.

Naturalmente ammetteremo verificate per le funzioni $f(x)$ e $\varphi(\bar{x}; t)$ quelle condizioni atte ad assicurare l'esistenza e l'unicità della soluzione $U(x; t)$ del problema (U) (cfr. t. V, VI, VII di [13], pag. 713).

2.2. - Reticoli di Q e di Σ .

Suddividiamo i primi r lati di Q in un numero finito M di parti uguali (ciascuna delle quali sarà di lunghezza $h = 1/M$), ed analogamente il lato di Q sull'asse t in un numero N di parti uguali (ciascuna delle quali sarà di lunghezza $l = 1/N$).

Chiamo *reticolo razionale regolare contenuto in Q* l'insieme $Q^{(M, N)}$ dei seguenti punti di Q , a coordinate tutte razionali,

$$(1) \quad (x; t) = (m_1 h, \dots, m_r h; nl) = (mh; nl),$$

dove:

$$m_1 = 0, 1, \dots, M; \quad \dots; \quad m_r = 0, 1, \dots, M; \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

Per semplicità scriveremo anche ([16], pag. 146)

$$(1') \quad (x; t) \equiv (mh; nl) \equiv [m; n],$$

e di conseguenza, ad esempio, $U(x; t) \equiv U(mh; nl) \equiv U[m; n]$.

Analogamente chiamo *reticolo razionale contenuto in* Σ l'insieme $\Sigma^{(M,N)}$ dei seguenti punti appartenenti a Σ , di coordinate tutte razionali,

$$(2) \quad (x; t) = (m_1 h, \dots, m_j h, \dots, m_r h; nl) = (mh; nl) = [m; n],$$

dove:

$$m_1 = 0, 1, \dots; \quad \dots; \quad m_j = 0, 1, \dots; \\ m_{j+1} = 0, 1, \dots, M; \quad \dots; \quad m_r = 0, 1, \dots, M; \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

Osserveremo subito che, preso in Q un qualunque punto P razionale (vale a dire a coordinate tutte razionali), esiste sempre un reticolo, e quindi infiniti, che contengono P . Infatti se è $P \equiv (a'_1/a_1, \dots, a'_r/a_r; b'/b)$ e se a è il minimo comune multiplo degli a_i ($i = 1, \dots, r$), basterà prendere $M = ka$ con $k = 1, 2, \dots$ e $N = k'b$ con $k' = 1, 2, \dots$. Per tali reticoli si ha poi

$$Q^{(ka,b)} \subset Q^{(ka,2b)} \subset Q^{(ka,3b)} \subset \dots$$

e l'insieme limite per k e k' tendenti all'infinito (vale a dire per h e l tendenti a zero), comunque siano i parametri a e b , non è altro che l'insieme Q^* dei punti di Q a coordinate tutte razionali.

Analoghe affermazioni valgono per Σ .

2.3. - Alcune osservazioni.

In seguito, per semplicità, considereremo solo i $Q^{(M,N)}$; i risultati ottenuti si trasportano poi ai $\Sigma^{(M,N)}$.

In $Q^{(M,N)}$ poniamo

$$\Delta_t U(x; t) = U(x; t) - U(x; t-l),$$

$$(3) \quad \Delta_{x_i}^2 U(x; t) = U(x_1, \dots, x_i - h, \dots, x_r; t) - 2U(x_1, \dots, x_i, \dots, x_r; t) + \\ + U(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_r; t).$$

Allora l'equazione

$$(4) \quad \frac{\Delta_t U(x; t)}{l} = \sum_{i=1}^r \frac{\Delta_{x_i}^2 U(x; t-l)}{h^2}$$

corrisponde all'equazione a derivate parziali dei *problemi pluridimensionali del calore*.

La (4) può anche scriversi nella forma

$$(4') \quad U(x; t) = (l/h^2) \cdot \sum_{i=1}^r \{ U(x_1, \dots, x_i - h, \dots, x_r; t-l) + \\ + U(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_r; t-l) \} + (1 - 2rl/h^2) \cdot U(x; t-l),$$

risultando così il valore $U(x; t)$ nel punto $(x; t)$ interno a $Q^{(M, N)}$ una combinazione lineare dei valori assunti nei $2r + 1$ vertici di $Q^{(M, N)}$, simmetrici rispetto all'asse dei tempi e relativi all'istante $t-l$. Ne segue che l'equazione (4) si mantiene formalmente identica, per h e l tendenti a zero, se e solo se, si mantiene costante il rapporto l/h^2 ([4], pag. 64; [10], pag. 282).

Allora volendo approssimare l'equazione differenziale del sistema (U) con la (4), faremo in seguito variare h e l in modo che sia sempre soddisfatta l'uguaglianza

$$(5) \quad l/h^2 = \chi,$$

dove è $\chi = M_0^2/N_0$ con M_0 e N_0 interi prefissati. Ciò equivale a dire che nella totalità dei reticoli razionali regolari $Q^{(M, N)}$, contenuti in Q , considereremo solo i reticoli $Q_\chi^{(M)}$ per i quali è $N = M^2/\chi = M^2 \cdot N_0/M_0^2$. Di necessità dovendo essere N intero, dovremo scegliere un M multiplo di M_0^2 , ed inoltre volendo avere una classe di reticoli razionali regolari $Q_\chi^{(M)}$ tutti contenenti il punto $P \equiv (a'_1/a_1, \dots, a'_r/a_r; b'/b)$, prenderemo $M = k\mu$ con $k = 1, 2, \dots$ e μ minimo comune multiplo di $a_1, \dots, a_r, b, M_0^2$.

Per (5) essendo $l/h = \chi h^2/h = \chi h$, segue necessariamente

$$l/h < 1 \quad \text{per } h \text{ abbastanza piccolo.}$$

Sostituendo la (5) in (4'), l'equazione (4) assume pure la seguente forma

$$(4'') \quad U(x; t) = \chi \sum_{i=1}^r \{ U(x_1, \dots, x_i - h, \dots, x_r; t-l) + \\ + U(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_r; t-l) \} + (1 - 2r\chi) \cdot U(x; t-l),$$

od anche, per (1'),

$$(4''') \quad U[m; n] = \chi \sum_{i=1}^r \{ U[m_1, \dots, m_i - 1, \dots, m_r; n-1] + \\ + U[m_1, \dots, m_i + 1, \dots, m_r; n-1] \} + (1 - 2r\chi) \cdot U[m; n-1].$$

2.4. - Il problema alle differenze.

Se indichiamo con $C^{(m)}$ e $\sigma^{(m)}$ l'insieme dei punti razionali appartenenti rispettivamente a C e a σ , individuati dal reticolo $Q_z^{(m)}$, il sistema differenziale (U) si trasforma, per la (4), nel seguente sistema alle differenze:

$$(U^*) \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\Delta_t U(x; t)}{t} = \sum_{i=1}^r \frac{\Delta_{z_i}^2 U(x; t-1)}{h^2} & \text{per } (x; t) \text{ interno a } Q_z^{(m)}, \\ U(x; 0) = f(x) & \text{per } x \equiv (x_1, \dots, x_r) \text{ interno a } C^{(m)}, \quad t = 0, \\ U(\bar{x}; t) = \varphi(\bar{x}; t) & \text{per } \bar{x} \equiv (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r) \in \sigma^{(m)}, \quad 0 \leq t \leq 1, \end{array} \right.$$

od anche, per (1') e (4''),

$$(U^*) \left\{ \begin{array}{ll} U[m; n] = Z \sum_{i=1}^r \{ U[m_1, \dots, m_i - 1, \dots, m_r; n-1] + \\ + U[m_1, \dots, m_i + 1, \dots, m_r; n-1] \} + (1 - 2r\chi) U[m; n-1] & \text{per } [m; n] \text{ interno a } Q_z^{(m)}, \\ U[m; 0] = f[m] & \text{per } m \equiv [m_1, \dots, m_r] \text{ interno a } C^{(m)}, \quad n = 0, \\ U[\bar{m}; n] = \varphi[\bar{m}; n] & \text{per } \bar{m} \equiv [\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_r] \in \sigma^{(m)}, \quad 0 \leq n \leq 1. \end{array} \right.$$

Il sistema (U*) ha una ed una sola soluzione. Basta tenere presente che, per la (4''), $U(x; t) \equiv U[m; n]$ è determinato univocamente dai valori assunti nei $2r + 1$ vertici di $Q_z^{(m)}$:

$$(x_1, \dots, x_i - h, \dots, x_r; t-1) = [m_1, \dots, m_i - 1, \dots, m_r; n-1],$$

$$(x_1, \dots, x_i, \dots, x_r; t-1) = [m_1, \dots, m_i, \dots, m_r; n-1],$$

$$(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_r; t-1) = [m_1, \dots, m_i + 1, \dots, m_r; n-1], \quad (i = 1, \dots, r).$$

Ciascuno di tali vertici è a sua volta determinato univocamente in modo analogo, e così via fino ai prefissati valori al contorno.

La soluzione di (U*) s'indicherà con

$$U^{(m)} = U^{(m)}(x; t) = U^{(m)}(mh; nl) = U^{(m)}[m; n].$$

Si può osservare che il valore della soluzione $U^{(m)}$ dipende da tutti e soli i punti di $Q_z^{(m)}$ appartenenti alla stella di $2r$ semirette uscenti da $(x; t)$, ciascuna delle quali è inclinata rispetto all'asse dei tempi dell'angolo α tale che $|\operatorname{tg} \alpha| = l/h$. Tale stella stacca sul contorno di $Q_z^{(m)}$ un insieme di punti che chiameremo *campo di dipendenza relativo al punto* $(x; t)$, in quanto esso, e solo esso, determina effettivamente il valore di $U^{(m)}(x; t)$ nel punto $P \equiv (x; t)$. Così per $r = 1$ le due semirette PA e PB (cfr. fig. 1) determinano come campo

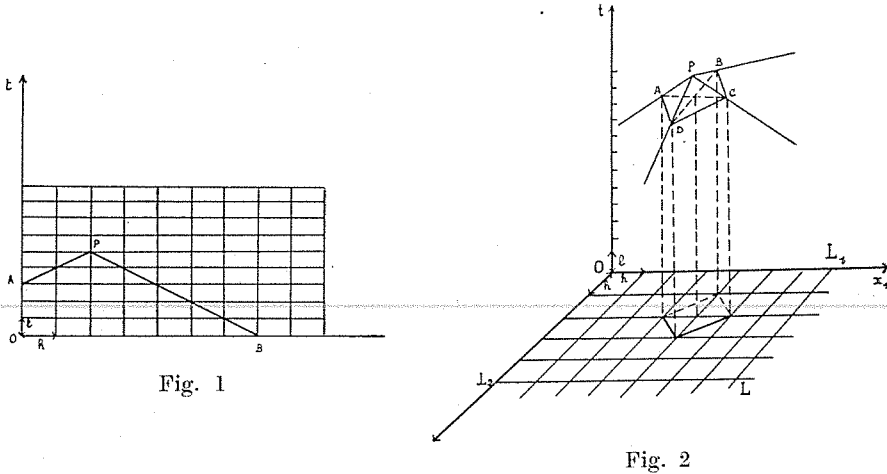


Fig. 1

Fig. 2

di dipendenza relativo a P , l'insieme dei punti appartenenti al contorno parziale di $Q_z^{(m)}$ formato dai segmenti AO (condizioni al contorno) e OB (condizioni iniziali). Per $r = 2$ si ha che i punti al contorno di $Q_z^{(m)}$ si trovano (cfr. fig. 2) internamente al quadrato OL_1LL_2 (condizioni iniziali) oppure sulle semirette parallele all'asse t uscenti dai punti del contorno di OL_1LL_2 (condizioni superficiali). La piramide a facce triangolari e di sezione quadrata $ABCD$ staccherà su tale contorno il campo di dipendenza relativo al punto P . Analogamente dicasi per $r = 3, 4, 5, \dots$.

§ 3. - Stabilità.

3.1. - Considerazioni preliminari.

Indicheremo con $\|U[m; n]\|$ l'estremo superiore dell'insieme dei numeri $|U[m; n]|$ per ogni $[m; n]$ di $Q_z^{(m)}$. Così per $m \neq \bar{m}$ sarà $\|f[m]\|$ l'estremo superiore dei numeri $|f[m]|$, e per $m = \bar{m}$ sarà $\|\psi[\bar{m}; n]\|$ l'estremo superiore dei numeri $|\psi[\bar{m}; n]|$ all'istante n . Diremo poi $\omega[n]$ il maggiore fra $\|f[m]\|$

e $\|\psi[\bar{m}; n]\|$ ed infine indicheremo con Ω l'estremo superiore dei numeri $\omega[n]$. Evidentemente quando fosse $\psi[\bar{m}; n] = \text{costante}$ (in particolare zero) è $\Omega \equiv \omega$.

Premesso ciò si può provare la seguente

Proprietà. Per ogni $[m; n]$ di $Q_z^{(m)}$, la soluzione $U^{(m)}[m; n]$ di (4^m) soddisfa la seguente limitazione

$$(7) \quad |U^{(m)}[m; n]| \leq (2r\chi + |1 - 2r\chi|)^n \cdot \Omega,$$

cioè, per le (1'),

$$(7') \quad |U^{(m)}(x; t)| \leq (2r\chi + |1 - 2r\chi|)^{t/(z\lambda^m)} \cdot \Omega.$$

Infatti, dall'equazione (4) espressa nella forma (4^m), essendo per definizione $z > 0$, si ha

$$(8) \quad |U^{(m)}[m; n]| \leq \chi \sum_{i=1}^r \{ |U^{(m)}[m_1, \dots, m_i - 1, \dots, m_r; n - 1]| + \\ + |U^{(m)}[m_1, \dots, m_i + 1, \dots, m_r; n - 1]| \} + |1 - 2r\chi| \cdot |U^{(m)}[m; n - 1]|,$$

per ogni $[m; n]$ di $Q^{(m)}$. In particolare per $n = 1$ è

$$|U^{(m)}[m; 1]| \leq \chi \sum_{i=1}^r \{ |U^{(m)}[m_1, \dots, m_i - 1, \dots, m_r; 0]| + \\ + |U^{(m)}[m_1, \dots, m_i + 1, \dots, m_r; 0]| \} + |1 - 2r\chi| \cdot |U^{(m)}[m; 0]|,$$

e quindi

$$(9) \quad |U^{(m)}[m; 1]| \leq \{ 2r\chi + |1 - 2r\chi| \} \omega[0] \leq \{ 2r\chi + |1 - 2r\chi| \} \Omega.$$

Così per $n = 2$ si ha

$$|U^{(m)}[m; 2]| \leq \chi \sum_{i=1}^r \{ |U^{(m)}[m_1, \dots, m_i - 1, \dots, m_r; 1]| + \\ + |U^{(m)}[m_1, \dots, m_i + 1, \dots, m_r; 1]| \} + |1 - 2r\chi| \cdot |U^{(m)}[m; 1]|,$$

ed anche, per la (9),

$$|U^{(M)}[m; 2]| \leq \chi \sum_{r=1}^r \{2r\chi + |1 - 2r\chi|\} \cdot \Omega + \\ + |1 - 2r\chi| \cdot \{2r\chi + |1 - 2r\chi|\} \cdot \Omega,$$

cioè

$$|U^{(M)}[m; 2]| \leq \{2r\chi + |1 - 2r\chi|\}^2 \Omega.$$

Analoghe disuguaglianze si ottengono per $n = 3, 4, 5, \dots$, rimanendo così provata la (7).

3.2. - Stabilità.

Come estensione di quanto è stato definito da JOHN in [11] (pag. 161) per un problema unidimensionale quasi-lineare, poniamo la seguente

Definizione. L'equazione alle differenze (4) si dirà stabile se esiste una costante A indipendente da h (e quindi da $l = \chi h^2$) tale che ogni sua soluzione verifichi la seguente limitazione:

$$(10) \quad |U^{(M)}[m; n]| \leq A \cdot \omega[n_0] \quad \text{per} \quad 0 \leq n_0 < n < N$$

o, ciò che è lo stesso per (1'),

$$(10') \quad |U^{(M)}(x; t)| \leq A \cdot \omega(t_0) \quad \text{per} \quad 0 \leq t_0 < t < 1.$$

Ne segue in particolare che se si commette nel punto $(x^*; t_0)$ un errore di grandezza ε , la soluzione $U^{(M)}$ sarà affetta da un errore di grandezza, in modulo, non maggiore di $A\varepsilon$. Infatti l'errore stesso può interpretarsi come una soluzione di (4) che assume il valore ε nel punto $(x^*; t_0)$ e che si annulla in tutti gli altri punti aventi $t \leq t_0$.

Ciò premesso, discende immediatamente dalla proprietà provata nel n. 3.1 il seguente

Criterio sufficiente di stabilità. L'equazione alle differenze (4) è stabile se è

$$(11) \quad \chi = l/h^2 \leq 1/(2r).$$

Infatti per tali valori di χ risulta $1 - 2r\chi \geq 0$ e quindi $2r\chi + |1 - 2r\chi| = 1$. Ciò assicura per la (7) l'esistenza di una costante A indipendente da h (e da $l = \chi h^2$), tale da essere verificata la (10).

Rileviamo che per $r=1$ tale condizione, sufficiente per la stabilità di (4), impone a χ quella stessa limitazione ottenuta applicando il criterio di stabilità che O'BRIEN-HYMAN e KAPLAN ([1], pag. 223) e, successivamente, HILDEBRAN ([10], pag. 337) hanno enunciato per il caso unidimensionale.

3.3. - Osservazioni.

a) Da quanto abbiamo detto nei nn. 2.2 e 2.3 segue ora che alla successione dei reticoli $Q_z^{(M)}$ ($M = k\mu$; $k = 1, 2, \dots$), per i quali è $\chi \leq 1/(2r)$, corrisponde una successione di equazioni alle differenze omogenee *stabili*.

b) Per il seguito ci è utile considerare la seguente equazione alle differenze *non omogenea*

$$(12) \quad W(x; t) = \chi \sum_{i=1}^r \{ W(x_1, \dots, x_i - h, \dots, x_r; t - l) + \\ + W(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_r; t - l) \} + (1 - 2r\chi) \cdot W(x; t - l) + l \cdot g(x; t),$$

dove $W(x; t)$ rappresenta una generica funzione definita in $Q_z^{(M)}$ la quale sul contorno di $Q_z^{(M)}$ assume prefissati valori sempre limitati, comunque sia M , ed analogamente $g = g(x; t)$ definita in $Q_z^{(M)}$ è limitata, comunque sia M , per ogni $(x; t)$ appartenente a $Q_z^{(M)}$.

Ora ([11], pag. 160), la soluzione di un'equazione alle differenze non omogenea può ottenersi come sovrapposizione di una successione di equazioni omogenee corrispondenti a valori iniziali variabili con t . Ne segue che se è stabile l'equazione alle differenze omogenea ottenuta da (12) ponendo in essa $g \equiv 0$, la soluzione dell'equazione alle differenze non omogenea (12) verifica la seguente limitazione

$$(13) \quad |W^{(M)}(x; t)| \leq A \cdot \{ \omega(t_0) + t \cdot \|g\| \} \quad \text{per} \quad 0 \leq t_0 < t \leq 1,$$

avendo al solito indicato con $\|g\|$ l'estremo superiore dei numeri $|g(x; t)|$ per ogni $(x; t)$ interno o sul contorno di $Q_z^{(M)}$. Essendo poi $t \leq 1$, si ha pure

$$(14) \quad |W^{(M)}(x; t)| \leq A \cdot \{ \omega(t_0) + \|g\| \} \quad \text{per} \quad 0 \leq t_0 < t \leq 1,$$

e quindi

$$(15) \quad |W^{(M)}(x; t)| \leq A \cdot \{ \Omega + \|g\| \}.$$

Dal criterio provato segue che (14) e (15) sono verificate certamente se è $Z \leq 1/(2r)$.

§ 4. - Convergenza.

4.1. - Considerazioni preliminari.

Come abbiamo visto nei nn. 2.2 e 2.3, un $Q_z^{(M)}$ contenente il punto $P \equiv \equiv (x; t) \equiv (a'_1/a_1, \dots, a'_r/a_r; b'/b)$ è caratterizzato dall'avere $h = 1/M$ e $l = \chi h^2$ con $M = k\mu$ e $\chi = M_0^2/N_0$, essendo k , M_0 e N_0 numeri interi presi a piacere fra i numeri naturali e μ il minimo comune multiplo di $a_1, \dots, a_r; b; M_0^2$.

Facciamo tendere h a zero dando a k gli infiniti valori successivi a quello prefissato: per esempio sia $k = 1, 2, \dots$. Si ottiene allora: 1°) una classe di reticoli razionali regolari (ciascuno contenuto nei successivi e tutti contenenti il punto P), la quale tende all'insieme Q^* di tutti i punti razionali di Q (n. 2.2); 2°) una successione di equazioni alle differenze formalmente identiche a (4), la quale converge all'equazione differenziale del sistema (U) [basta infatti passare al limite per $h \rightarrow 0$ in ambo i membri di (4), tenendo presente il concetto di derivata seconda generalizzata ([20], pag. 871)]; 3°) una successione di campi di dipendenza relativi al punto P , la quale tende al contorno del sistema (U), quando lo si pensi formato da punti razionali (infatti le $2r$ semirette caratteristiche del campo di dipendenza (n. 2.4) sono inclinate sulla retta dei tempi dell'angolo α , con $|\operatorname{tg} \alpha| = l/h$, cosicchè al limite per $h \rightarrow 0$, essendo $\lim_{h \rightarrow 0} |\operatorname{tg} \alpha| = \lim_{h \rightarrow 0} l/h = +\infty$, esse tendono a disporsi tutte lungo $t = \text{costante}$, che rappresenta la famiglia di *caratteristiche* dei problemi del calore. Ne segue che l'insieme dei punti della stella tenderanno a riempire il dominio dei punti appartenenti a Q^*).

4.2. - Convergenza.

Premettiamo la seguente

Definizione. La successione $U^{(M)}(x; t)$ ($M = k\mu; k = 1, 2, \dots$) si dirà *uniformemente convergente in modo asintotico a $U(x; t)$ in Q^** quando, preso un $\varepsilon < 0$, è possibile determinare un intero k_ε tale che sia

$$(16) \quad |U^{(M)}(x; t) - U(x; t)| < \varepsilon \quad (M = k\mu)$$

per ogni $k > k_\varepsilon$ e per ogni $(x; t)$ di $Q_z^{(M)}$.

Ciò premesso vale il seguente

Criterio sufficiente di uniforme convergenza. *La successione* $U^{(M)}(x; t)$ ($M = k\mu$; $k = 1, 2, \dots$) *è uniformemente convergente in modo asintotico a* $U(x; t)$ *in* Q^* *se è* $\chi \leq 1/(2r)$.

Dimostrazione. Consideriamo l'equazione (4) nella forma (4ⁿ):

$$(4^n) \quad U^{(M)}(x; t) = \chi \sum_{i=1}^r \{ U^{(M)}(x_1, \dots, x_i - h, \dots, x_r; t - l) + \\ + U^{(M)}(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_r; t - l) \} + (1 - 2r\chi) \cdot U^{(M)}(x; t - l),$$

ed applichiamo l'operatore che figura nel secondo membro di essa alla funzione $U(x; t)$ che, per ipotesi, è definita in Q (e quindi in $Q_\chi^{(M)}$) ed ivi continua insieme alla sue derivate parziali fino a quelle almeno del secondo ordine. Se indichiamo allora con $\mathcal{O}(x; t; h^2)$ termini che per $h \rightarrow 0$ sono infinitesimi di ordine non inferiore ad h^2 , si ha ([19], pag. 30)

$$(17) \quad \chi \sum_{i=1}^r \{ U(x_1, \dots, x_i - h, \dots, x_r; t - l) + U(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_r; t - l) \} + \\ + (1 - 2r\chi) \cdot U(x; t - l) = \chi \sum_{i=1}^r \left\{ \left[U(x; t) - \left(h \frac{\partial U}{\partial x_i} + l \frac{\partial U}{\partial t} \right)_{(x; t)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \left(h \frac{\partial U}{\partial x_i} + l \frac{\partial U}{\partial t} \right)_{(x; t)}^{(2)} + l \cdot \mathcal{O}(x; t; h) \right] + \right. \\ \left. + \left[U(x; t) + \left(h \frac{\partial U}{\partial x_i} - l \frac{\partial U}{\partial t} \right)_{(x; t)} + \frac{1}{2} \left(h \frac{\partial U}{\partial x_i} - l \frac{\partial U}{\partial t} \right)_{(x; t)}^{(2)} + l \cdot \mathcal{O}(x; t; h) \right] \right\} + \\ + (1 - 2r\chi) \left[U(x; t) - l \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_{(x; t)} + l \cdot \mathcal{O}(x; t; h^2) \right];$$

ed anche

$$(17') \quad \chi \sum_{i=1}^r \{ U(x_1, \dots, x_i - h, \dots, x_r; t - l) + U(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_r; t - l) \} + \\ + (1 - 2r\chi) \cdot U(x; t - l) = U(x; t) + \chi h^2 \sum_{i=1}^r \frac{\partial^2 U(x; t)}{\partial x_i^2} - l \frac{\partial U(x; t)}{\partial t} + l \cdot \mathcal{O}(x; t; h).$$

Se ora ricordiamo che è $l = \chi h^2$ e che $U(x; t)$ è soluzione dell'equazione differenziale del sistema (U), si ottiene da (17')

$$(18) \quad U(x; t) + l \cdot \mathcal{O}(x; t; h) = \chi \cdot \sum_{i=1}^r \{ U(x_1, \dots, x_i - h, \dots, x_r; t - l) + \\ + U(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_r; t - l) \} + (1 - 2r\chi) \cdot U(x; t - l).$$

Allora, se poniamo $W(x; t) = U^{(m)}(x; t) - U(x; t)$ e se sottraiamo membro a membro la (18) da (4''), si ricava

$$(19) \quad W(x; t) = \chi \cdot \sum_{i=1}^r \{ W(x_1, \dots, x_i - h, \dots, x_r; t - l) + \\ + W(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_r; t - l) \} + (1 - 2r\chi) \cdot W(x; t - l) + l \cdot \mathcal{O}(x; t; h).$$

La (19) è un'equazione alle differenze non omogenea che coincide con la (12) quando si faccia $g \equiv \mathcal{O}(x; t; h)$. Allora, essendo $\chi \leq 1/(2r)$ ed avendo assunto sul contorno di $Q_\chi^{(m)}$, $U^{(m)} \equiv U$ (sarà quindi $\Omega \equiv 0$), segue da (15)

$$| W(x; t) | \leq A \cdot \| \mathcal{O}(x; t; h) \|,$$

cioè

$$(20) \quad | U^{(m)}(x; t) - U(x; t) | \leq A \cdot \| \mathcal{O}(x; t; h) \|,$$

con che rimane provata la *convergenza* della successione $U^{(m)}(x; t)$ ($M = k\mu$; $k = 1, 2, \dots$) a $U(x; t)$.

D'altra parte la soluzione $U(x; t)$ del sistema differenziale ammette derivate prime limitate per la presunta regolarità di U in tutto il campo finito ed infinito; pertanto, se L indica la costante di LIPSCHITZ, si ha ([19], pag. 398):

$$(21) \quad | U(x_1, \dots, x_r; t) - U(x_1 - h, \dots, x_r - h; t - l) | < hL \cdot (r + \chi h).$$

Ora dal Teorema della media si ha pure

$$U(x_1, \dots, x_r; t) - U(x_1 - h, \dots, x_r - h; t - l) = \mathcal{O}(x; t; h),$$

dove $\mathcal{O}(x; t; h)$, essendo $r \neq 0$, è infinitesimo del prim'ordine rispetto ad h ([19], pag. 30). Sostituendo in (21) si ha: $| \mathcal{O}(x; t; h) | < hL \cdot (r + \chi h)$; sarà quindi

$$(22) \quad \| \mathcal{O}(x; t; h) \| \leq hL \cdot (r + \chi h).$$

Ne segue che la (20) diventa

$$(20') \quad |U^{(m)}(x; t) - U(x; t)| \leq Bh \cdot (r + \chi h) \quad (B = AL)$$

con che rimane provata l'*uniforme convergenza* di $U^{(m)}(x; t)$ a $U(x; t)$.

§ 5. - Calcolo approssimato della soluzione $U^{(m)}$ e calcolo dell'errore.

5.1. - Essendo ϱ un prefissato numero naturale, diremo, per brevità, che su un numero decimale \mathfrak{A} si fa un ϱ -arrotondamento quando in esso si prendono solo le prime ϱ cifre decimali. Il numero decimale così arrotondato verrà indicato con \mathfrak{A}_ϱ o con $[\mathfrak{A}]_\varrho$. Sarà così

$$(23) \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_\varrho + \theta \cdot 10^{-\varrho}, \quad 0 \leq \theta < 1.$$

In particolare poniamo

$$(23') \quad U^{(m)}[m; n] = U_\varrho^{(m)}[m; n] + \theta[m; n] \cdot 10^{-\varrho}, \quad 0 \leq \theta[m; n] < 1.$$

Per il calcolo approssimato di $U^{(m)}$ ci serviremo, in sostanza, del metodo seguito da COURANT-ISAACSON-REES ([5], pag. 252) per un problema iperbolico quasi-lineare.

Considerato un reticolo $Q_\chi^{(m)}$ e fissato un numero naturale ϱ , eseguiremo dapprima il ϱ -arrotondamento (come sopra definito) dei valori iniziali e al contorno. Indi continueremo a ϱ -arrotondare le valutazioni della soluzione che passo-passo otterremo applicando la (4^m). Indico con $\tilde{U}_\varrho^{(m)}[m; n]$ ($m; n = 1, 2, \dots$) le valutazioni approssimate di $U^{(m)}[m; n]$ così ottenute. Risulta allora

$$(24) \quad \tilde{U}_\varrho^{(m)}[m; 1] = \left[\chi \cdot \sum_{i=1}^r \{ U_\varrho^{(m)}[m_1, \dots, m_i - 1, \dots, m_r; 0] + \right. \\ \left. + U_\varrho^{(m)}[m_1, \dots, m_i + 1, \dots, m_r; 0] \} + (1 - 2r\chi) \cdot U_\varrho^{(m)}[m; 0] \right]_\varrho,$$

$$(24') \quad \tilde{U}_\varrho^{(m)}[m; 2] = \left[\chi \cdot \sum_{i=1}^r \{ \tilde{U}_\varrho^{(m)}[m_1, \dots, m_i - 1, \dots, m_r; 1] + \right. \\ \left. + \tilde{U}_\varrho^{(m)}[m_1, \dots, m_i + 1, \dots, m_r; 1] \} + (1 - 2r\chi) \cdot \tilde{U}_\varrho^{(m)}[m; 1] \right]_\varrho,$$

e così di seguito.

5.2. - Valutazione della differenza $U^{(n)}[m; n] - \tilde{U}_0^{(n)}[m; n]$, **essendo** $Z \leq 1/(2r)$.

a) Provo dapprima che se è $Z \leq 1/(2r)$ e nel secondo membro di (4^m) ϱ -arrotondiamo le $U^{(n)}[m; n-1]$, si commette un errore uguale a

$$\Theta_1[m; n-1] \cdot 10^{-q} \quad \text{con} \quad 0 \leq \Theta_1[m; n-1] < 1.$$

Infatti da (4^m), facendo uso della (23'), si ha

$$(25) \quad U^{(n)}[m; n] = Z \cdot \sum_{i=1}^r \{ U_0^{(n)}[m_1, \dots, m_i-1, \dots, m_r; n-1] + \\ + U_0^{(n)}[m_1, \dots, m_i+1, \dots, m_r; n-1] \} + \\ + (1-2rZ) \cdot U_0^{(n)}[m; n-1] + \Theta_1[m; n-1] \cdot 10^{-q},$$

dove è

$$(26) \quad \Theta_1[m; n-1] = Z \cdot \sum_{i=1}^r \{ \theta[m_1, \dots, m_i-1, \dots, m_r; n-1] + \\ + \theta[m_1, \dots, m_i+1, \dots, m_r; n-1] \} + (1-2rZ) \cdot \theta[m; n-1].$$

Proviamo che è

$$(27) \quad \Theta_1[m; n-1] < 1.$$

Ciò risulta evidente dalla (26) per $Z = 1/(2r)$. Invece per $Z < 1/(2r)$, la (26) si può scrivere

$$\Theta_1[m; n-1] = Z \cdot \sum_{i=1}^r \{ (\theta[m_1, \dots, m_i-1, \dots, m_r; n-1] - \theta[m; n-1]) + \\ + (\theta[m_1, \dots, m_i+1, \dots, m_r; n-1] - \theta[m; n-1]) \} + \theta[m; n-1],$$

da cui

$$\Theta_1[m; n-1] \leq Z \cdot 2r \cdot \max_{i=1, \dots, r} \{ \theta[m_1, \dots, m_i \pm 1, \dots, m_r; n-1] - \theta[m; n-1] \} + \\ + \theta[m; n-1].$$

Se il massimo indicato nel secondo membro è negativo si ha subito la (27); se è positivo si ha

$$\Theta_1[m; n-1] < \max_{i=1, \dots, r} \theta[m_1, \dots, m_i \pm 1, \dots, m_r; n-1] < 1.$$

b) Ciò premesso, sempre nell'ipotesi di $\chi \leq 1/(2r)$, dalla (4^m), per $n = 1$, discende

$$U^{(m)}[m; 1] = \chi \cdot \sum_{i=1}^r \{ U_e^{(m)}[m_1, \dots, m_i - 1, \dots, m_r; 0] + \\ + U_e^{(m)}[m_1, \dots, m_i + 1, \dots, m_r; 0] \} + (1 - 2r\chi) \cdot U_e^{(m)}[m; 0] + \Theta_1[m; 0] \cdot 10^{-e},$$

ed anche, per (24),

$$(28) \quad U^{(m)}[m; 1] - \tilde{U}_e^{(m)}[m; 1] = \{ \theta[m; 1] + \Theta_1[m; 0] \} \cdot 10^{-e}.$$

Per la (28) dalla (4^m) con $n = 2$ discende

$$(29) \quad U^{(m)}[m; 2] = \chi \cdot \sum_{i=1}^r \{ \tilde{U}_e^{(m)}[m_1, \dots, m_i - 1, \dots, m_r; 1] + \\ + \tilde{U}_e^{(m)}[m_1, \dots, m_i + 1, \dots, m_r; 1] \} + (1 - 2r\chi) \cdot \tilde{U}_e^{(m)}[m; 1] + \\ + \{ \Theta_1[m; 1] + \Theta_2[m; 0] \} \cdot 10^{-e},$$

dove $\Theta_1[m; 1]$ ha l'espressione data dalla (26) per $n = 2$ e $\Theta_2[m; 0]$ ha l'espressione seguente

$$(30) \quad \Theta_2[m; 0] = \chi \cdot \sum_{i=1}^r \{ \Theta_1[m_1, \dots, m_i - 1, \dots, m_r; 0] + \\ + \Theta_1[m_1, \dots, m_i + 1, \dots, m_r; 0] \} + (1 - 2r\chi) \cdot \Theta_1[m; 0].$$

È facile provare, procedendo analogamente a quanto è stato fatto in a) per $\Theta_1[m; n-1]$, che è pure

$$(31) \quad \Theta_2[m; 0] < 1.$$

Per la (24') da (29) segue

$$(32) \quad U^{(M)}[m; 2] - \tilde{U}_e^{(M)}[m; 2] = \{ \theta[m; 2] + \Theta_1[m; 1] + \Theta_2[m; 0] \} \cdot 10^{-e}.$$

Analoghe affermazioni valgono per $U^{(M)}[m; 3]$, $U^{(M)}[m; 4]$, In generale sarà

$$(33) \quad U^{(M)}[m; n] - \tilde{U}_e^{(M)}[m; n] = \alpha[m; n] \cdot 10^{-e},$$

dove è

$$(34) \quad \alpha[m; n] = \theta[m; n] + \Theta_1[m; n-1] + \Theta_2[m; n-2] + \dots + \Theta_n[m; 0],$$

avendo $\Theta_1[m; n-1]$ l'espressione (26) e $\Theta_2[m; n-2]$, $\Theta_3[m; n-3]$, ..., $\Theta_n[m; 0]$ espressioni analoghe a (30). Ora, essendo tutti i termini di $\alpha[m; n]$ positivi e minori di uno, sarà

$$(34') \quad 0 \leq \alpha[m; n] < n + 1$$

ed anche, per le (1'),

$$(34'') \quad 0 \leq \alpha(x; t) < (t + l)/l.$$

5.3. - Da (33) per le (1') discende identicamente

$$(35) \quad |U(x; t) - \tilde{U}_e^{(M)}(x; t)| \leq \alpha(x; t) \cdot 10^{-e} + |U(x; t) - U^{(M)}(x; t)|.$$

Ne segue che se si tiene fisso il numero e al crescere di M non si ottiene una successione $\tilde{U}_e^{(M)}(x; t)$ ($M = k\mu$; $k = 1, 2, \dots$) uniformemente convergente in modo asintotico a $U(x; t)$. Pertanto supponiamo $e = e(M)$ e proviamo che

la successione $\tilde{U}_e^{(M)}(x; t)$ ($M = k\mu$; $k = 1, 2, \dots$) è uniformemente convergente in modo asintotico a $U(x, t)$ in Q^* , se è $\chi \leq 1/(2r)$ ed insieme

$$(36) \quad e = e(M) \geq 3p,$$

essendo p la parte intera di $1 + \lg_{10} M$.

Infatti, essendo $Z \leq 1/(2r)$ vale la (20'). D'altra parte essendo $q \geq 3p$ e $3p > \lg_{10} M^3$, è $10^q > M^3 = h^{-3}$ e quindi $10^{-q} < h^3$. Si ottiene allora successivamente:

$$\alpha(x; t) \cdot 10^{-q} < \frac{l+l}{l} \cdot 10^{-q} \leq \frac{1}{l} \cdot 10^{-q} = \frac{1}{Z \cdot h^2} \cdot 10^{-q} < \frac{1}{Z} \cdot h.$$

Sostituendo in (35) si ottiene così, per (20'),

$$(35') \quad |U(x; t) - \tilde{U}_e^{(M)}(x; t)| < (1/Z) \cdot h + Bh \cdot (r + Zh),$$

da cui segue proprio quanto volevamo provare.

§ 6. - Soluzione numerica dei sistemi associati.

6.1. - Chiamiamo *sistema associato* al sistema (U*) [o al sistema (U)] il sistema ottenuto da questo facendo semplicemente $\psi(\bar{x}; t) \equiv \psi(\bar{x}; \tau)$, essendo τ costante. Tali sistemi traducono analiticamente, com'è noto, i problemi di propagazione del calore quando l'assegnata temperatura superficiale risulta indipendente dal tempo. Indicheremo tali sistemi con (V*) [o con (V)].

La risoluzione dei sistemi (V*) [o (V)] può risultare alquanto più semplice in confronto della risoluzione di (U*) [o di (U)]. Talvolta può addirittura ridursi alla risoluzione di analoghi sistemi unidimensionali, quando le condizioni iniziali e al contorno assumano forme particolari che, per altro, possono incontrarsi in non banali problemi di pratica applicazione.

6.2. - Un problema della lamina quadrata.

Una lamina quadrata sottile, isotropa, omogenea, di conduttività e di densità unitarie, termicamente isolata sulle faccie, sia mantenuta a temperatura unitaria sui bordi ed abbia una temperatura iniziale variabile da punto a punto secondo l'espressione $f_1(x_1) \cdot f_2(x_2)$, essendo f_1 e f_2 assegnate funzioni continue insieme alle loro derivate fino a quelle del secondo ordine. Il problema di determinare la temperatura in ogni punto della lamina, si traduce analiticamente nel sistema differenziale e nel corrispondente sistema alle differenze ottenuti rispettivamente dai sistemi (U) e (U*) facendo:

$$r = 2, \quad x \equiv (x_1, x_2), \quad f(x) \equiv f_1(x_1) \cdot f_2(x_2), \quad \psi(\bar{x}; t) \equiv 1,$$

essendo $i = 1, 2$, il prodotto delle loro soluzioni $w_1^{(M)}[m_1; n] \cdot w_2^{(M)}[m_2; n]$ soddisfa la condizione iniziale e al contorno del sistema bidimensionale, ma non l'equazione alle differenze di esso, in quanto sostituito nel secondo membro di (4^{''}) dà $w^{(M)}[m_1, m_2; n]$ a meno di $\Delta_\rho w_1^{(M)} \cdot \Delta_\rho w_2^{(M)}$, quantità infinitesima del second'ordine rispetto ad l e quindi del quart'ordine rispetto ad h . Se però si osserva che per la (23') risulta

$$w^{(M)}[m_1, m_2; n] = w_\rho^{(M)}[m_1, m_2; n] + \theta[m_1, m_2; n] \cdot 10^{-\rho},$$

dove, se ρ soddisfa alla (36), è $\theta[m_1, m_2; n] \cdot 10^{-\rho} < \theta[m_1, m_2; n] \cdot h^3$ (cioè infinitesimo del terz'ordine rispetto ad h), il prodotto $w_1^{(M)}[m_1; n] \cdot w_2^{(M)}[m_2; n]$ può assumersi come soluzione approssimante del sistema bidimensionale, in quanto si vengono a trascurare infinitesimi di ordine superiore a quelli richiesti dalla voluta approssimazione. Naturalmente le due soluzioni dei sistemi unidimensionali andranno valutate con un conveniente ρ' -arrotondamento⁽³⁾.

6.3. - Caso di $f_i(x_i) \equiv \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(\lambda\pi x_i)}{\lambda!}$.

Se $f_i(x_i)$ ($i = 1, 2$) è sviluppabile in $(0, 1)$ nella serie di FOURIER, assolutamente convergente, qui indicata, la soluzione può porsi secondo HILDEBRAND ([9], pag. 268) nella forma seguente

$$(38) \quad w_i^{(M)}(x_i; t) = w_i^{(M)}[m_i; n] = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left(1 - 2Z + 2Z \cdot \cos \frac{\lambda\pi}{M}\right)^n \frac{\text{sen}(\lambda\pi m_i/M)}{\lambda!}.$$

Se ora introduciamo i polinomi $P_r(n)$ ([8], pag. 375) definiti come i coefficienti di z^r nello sviluppo di $\{1 + (1/Z - 2)z + z^2\}^n$ secondo le potenze di z , si ha

$$w_i^{(M)}[m_i; n] = Z^n \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left\{ \sum_{r=-n}^n P_{n+r}(n) \cdot \cos \frac{\lambda\pi r}{M} \right\} \frac{\text{sen}(\lambda\pi m_i/M)}{\lambda!},$$

ed anche ([8], pag. 376)

$$w_i^{(M)}[m_i; n] = Z^n \cdot \sum_{r=-n}^n P_{n+r}(n) \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\text{sen}\{\lambda\pi \cdot (m_i + r)/M\}}{\lambda!};$$

(3) Basta assumere $\rho' = \rho + q$, ove q è il più piccolo intero per cui $E(w_1^{(M)}) + E(w_2^{(M)}) + 2 \leq 10^q$, indicando $E(a)$ la parte intera di a ([15], pag. 45).

inoltre se è

$$\gamma_{m_i+r} = \begin{cases} -1 & \text{per } m_i+r < 0, \\ 0 & \text{per } m_i+r = 0, \\ 1 & \text{per } m_i+r > 0, \end{cases}$$

e se $\alpha_i = \alpha_i(m_i; r)$ rappresenta il numero dell'intervallo $(0, 2\pi)$ congruo a $(m_i+r)\pi/M$ secondo il modulo 2π , si può dare a $w_i^{(M)}$ l'espressione polinomiale seguente

$$(38') \quad w_i^{(M)}[m_i; n] = Z^n \cdot \sum_{r=-n}^n \gamma_{m_i+r} P_{n+r}(n) e^{\cos \alpha_i} \cdot \text{sen}(\text{sen } \alpha_i),$$

particolarmente agevole al calcolo numerico.

6.4. - Caso di $f_i(x_i) \equiv 1$.

La soluzione di (w_i^*) , che è stata indicata (cfr. n. 6.2) in questo caso particolare con $\bar{w}_i^{(M)}$ può ottenersi applicando una formula, data da HILDEBRAN, analoga alla (38); più semplicemente è qui ottenuta togliendo dall'unità la soluzione, data dalla FOWLER ([8]; pag. 368), del problema unidimensionale avente temperatura iniziale nulla e temperatura unitaria sui bordi. A parte qualche lieve modifica per seguire le nostre notazioni, si ha precisamente

$$\bar{w}_i^{(M)}[m_i; n] = 1 - \left\{ 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left(1 - 2Z + 2Z \cdot \cos \frac{(2\lambda+1)\pi}{M} \right)^n \frac{\text{sen} [(2\lambda+1)\pi m_i/M]}{2\lambda+1} \right\}$$

cioè

$$(39) \quad \bar{w}_i^{(M)}[m_i; n] = \frac{4}{\pi} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left(1 - 2Z + 2Z \cdot \cos \frac{(2\lambda+1)\pi}{M} \right)^n \frac{\text{sen} [(2\lambda+1)\pi m_i/M]}{2\lambda+1}.$$

Anche qui, se introduciamo i polinomi $P_r(n)$ e se si procede in modo analogo al caso precedente, si trova

$$\bar{w}_i^{(M)}[m_i; n] = \frac{4Z^n}{\pi} \sum_{r=-n}^n \gamma_{m_i+r} P_{n+r}(n) \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\text{sen} [(2\lambda+1) \cdot \alpha_i(m_i; r)]}{2\lambda+1},$$

dove γ_{m_i+r} e α_i sono già stati definiti nel n. 6.3. Se ora poniamo

$$\beta_{|(m_i+r)/M|} = \begin{cases} 1 & \text{per } |(m_i+r)/M| < 1, \\ 0 & \text{per } |(m_i+r)/M| = 1, \\ -1 & \text{per } 1 < |(m_i+r)/M| < 2, \end{cases}$$

si ha ([20], pag. 135)

$$\frac{4}{\pi} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\text{sen} [(2\lambda+1) \cdot \alpha_i(m_i, r)]}{2\lambda+1} = \beta_{|(m_i+r)/M|}.$$

Si può allora dare a $\bar{w}_i^{(M)}$ la seguente espressione polinomiale

$$(39') \quad \bar{w}_i^{(M)}[m_i; n] = Z^n \cdot \sum_{r=-n}^n \gamma_{m_i+r} \beta_{|(m_i+r)/M|} P_{n+r}(n),$$

di calcolo numerico immediato.

Applicazione. Calcoliamo il valore approssimato di $V(1/2, 1/2; 1/16)$. Fissiamo $Z = 1/4$. Risulta allora: $M = 4$, $m_1 = m_2 = 2$, $n = 4$, $\varrho \geq 3$, $\varrho' \geq 4$. Dalla (38') discende

$$w_1^{(4)}[2; 4] = w_2^{(4)}[2; 4] = (1/4)^4 \cdot \sum_{r=-4}^4 \gamma_{2+r} P_{4+r}(4) e^{\cos \alpha} \cdot \text{sen}(\text{sen } \alpha),$$

con $\alpha = |2+r|\pi/4$ per $r = -4, \dots, +4$. Eseguendo i calcoli si trova, prendendo $\varrho = 3$ e $\varrho' = 4$; $w_1^{(4)}[2; 4] = w_2^{(4)}[2; 4] = 0,5306$. Da (39') si ha

$$\bar{w}_1^{(4)}[2; 4] = \bar{w}_2^{(4)}[2; 4] = (1/4)^4 \cdot \sum_{r=-4}^4 \gamma_{2+r} \beta_{|(2+r)/4|} P_{4+r}(4),$$

cioè, eseguendo i calcoli, $\bar{w}_1^{(4)}[2; 4] = \bar{w}_2^{(4)}[2; 4] = 0,6406$. Infine da (37) discende

$$\bar{V}_3^{(4)}[2, 2; 4] = 1 + [w_1^{(4)}]^2 - [\bar{w}_1^{(4)}]^2,$$

cioè

$$\bar{V}_3^{(4)}[2, 2; 4] = 0,872.$$

§ 7. - L'analogo del Teorema di Duhamel.

7.1. - Nel paragrafo precedente abbiamo visto come la risoluzione dei sistemi *associati* (V^*) non presenti particolari difficoltà.

Il Teorema che andiamo ora a stabilire dimostra come si possa risalire *passo-passo* dalla soluzione dei sistemi associati alla soluzione alle differenze del *generale* problema pluridimensionale lineare del calore, con dati al contorno variabili col tempo.

Spezziamo il sistema (U^*) in due particolari sistemi: (w^*) ottenuto da (U^*) facendo $\psi(\bar{x}; t) \equiv 0$ (temperatura superficiale nulla), (u^*) ottenuto da (U^*) ponendo invece $f(x) \equiv 0$ (temperatura iniziale nulla).

Per la linearità di (U^*) risulta

$$(40) \quad U^{(M)}(x; t) = w^{(M)}(x; t) + u^{(M)}(x; t),$$

ed anche, per (1'),

$$(40') \quad U^{(M)}[m; n] = w^{(M)}[m; n] + u^{(M)}[m; n],$$

essendo rispettivamente $w^{(M)}(x; t) = w^{(M)}[m; n]$ e $u^{(M)}(x; t) = u^{(M)}[m; n]$ le soluzioni di (w^*) e (u^*).

Allora se (v^*) è il sistema *associato* di (u^*) e $v^{(M)}$ è la sua soluzione, si può provare il

Teorema. *La soluzione $u^{(M)}$ si esprime mediante $v^{(M)}$ nel modo seguente*

$$(41) \quad u^{(M)}[m; n] = \sum_{v=0}^n \{ v^{(M)}[m; v; n-v] - v^{(M)}[m; v; n-v-1] \},$$

ove si ponga $v^{(M)}[m; v; -1] = 0$. Inoltre le due successioni $u^{(M)}$ e $v^{(M)}$ ($M = k\mu$; $k = 1, \dots$) sono insieme stabili ⁽⁴⁾ ed uniformemente convergenti in modo asintotico in Q^* a u e v .

Notiamo che, per (1'), la (41) si può anche scrivere

$$(41') \quad u^{(M)}(x; t) = \sum_{v=0}^n \{ v^{(M)}(x; v\bar{l}; t-v\bar{l}) - v^{(M)}(x; v\bar{l}; t-(v+1)\bar{l}) \}.$$

(4) Cfr. annotazione (2).

La dimostrazione con cui si perviene alla (41) risulta perfettamente analoga a quella che abbiamo fatto per il caso unidimensionale in ([16], pag. 148): basta infatti per $r > 1$ interpretare l'intero m che compare nel caso di $r = 1$ come l'insieme degli interi m_1, \dots, m_r .

La stabilità delle successioni $u^{(M)}$ e $v^{(M)}$ ($M = k\mu; k = 1, 2, \dots$) discende immediatamente dal Criterio provato nel n. 3.2, tenendo presente che $u^{(M)}$ e $v^{(M)}$ sono relative ad uno stesso \mathcal{X} .

L'uniforme convergenza in modo asintotico in Q^* delle successioni $u^{(M)}$ e $v^{(M)}$ ($M = k\mu; k = 1, 2, \dots$) rispettivamente a u e v è conseguenza della loro stabilità secondo il Criterio provato nel n. 4.2.

Infine, se si procede in modo perfettamente analogo al caso unidimensionale ([16], pag. 148), si può provare che la (41') converge per $M \rightarrow \infty$ alla seguente formula di DUHAMEL:

$$u(x; t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} v(x; \tau; t - \tau) d\tau.$$

7.2. - Caso particolare di $\psi(\bar{x}; t) \equiv \psi(t)$.

In questo caso, se $v^{(M)}$ è la soluzione di (v^*) in cui è $\psi(\tau) \equiv 1$, l'analogo del Teorema di Duhamel acquista la seguente forma:

Teorema. La soluzione $u^{(M)}$ si esprime mediante $v^{(M)}$ nel modo seguente:

$$(42) \quad u^{(M)}[m; n] = \sum_{v=0}^n \psi[v] \cdot \{ v^{(M)}[m; n-v] - v^{(M)}[m; n-v-1] \},$$

ove si ponga $v^{(M)}[m; -1] = 0$. Inoltre le due successioni $u^{(M)}$ e $v^{(M)}$ ($M = k\mu; k = 1, 2, \dots$) sono insieme stabili ed uniformemente convergenti in modo asintotico in Q^* ad u e v .

La dimostrazione si conduce nello stesso modo del caso precedente quando si osservi che qui si ha $v^{(M)}[m; v; n-v] \equiv \psi[v] \cdot v^{(M)}[m; n-v]$.

Anche qui, per le (1'), la (42) può porsi nella forma

$$(42') \quad u^{(M)}(x; t) = \sum_{v=0}^n \psi(vl) \cdot \{ v^{(M)}(x; t-vl) - v^{(M)}(x; t-(v+1)l) \}.$$

Osservazione. Una formula analoga a (41) o (42) può ottenersi facilmente anche nel caso in cui, anzichè la temperatura, sia assegnato in superficie il flusso di calore quale funzione del posto e del tempo.

7.3. - Applicazioni.

Consideriamo ora il problema della distribuzione della temperatura nella lamina quadrata considerata nel n. 5. Precisamente esaminiamo due casi particolarmente interessanti la tecnica: $\psi(\bar{x}; t) \equiv t$ e $\psi(\bar{x}; t) \equiv \sin t$.

a) Caso di $\psi \equiv t$. Calcoliamo, per esempio, un valore approssimato di $U(1/2, 1/2; 1/16)$. Anche qui, come nel n. 6.4, assumiamo $Z = 1/4$ e quindi $m_1 = m_2 = 2$ e $n = 4$. Sarà

$$(43) \quad U^{(4)}[2, 2; 4] = w^{(4)}[2, 2; 4] + u^{(4)}[2, 2; 4].$$

Ora è (cfr. n. 6.4)

$$(44) \quad \tilde{w}_3^{(4)} = 0,281.$$

D'altra parte, essendo per le nostre notazioni $\psi[\bar{m}; n] \equiv Zn/M^2 = (1/64) \cdot n$, da (42) discende

$$u^{(4)}[2, 2; 4] = 1/64 \cdot \sum_{r=1}^4 v \cdot \{v^{(4)}[2, 2; 4-r] - v^{(4)}[2, 2; 3-r]\},$$

cioè

$$(45) \quad u^{(4)}[2, 2; 4] = 1/64 \cdot \{v^{(4)}[2, 2; 0] + v^{(4)}[2, 2; 1] + \\ + v^{(4)}[2, 2; 2] + v^{(4)}[2, 2; 3]\}.$$

Risulta evidentemente: $v^{(4)}[2, 2; 0] = v^{(4)}[2, 2; 1] = 0$ ed essendo $v^{(4)}[2, 2; 2] = 1 - \bar{w}^{(4)}[2, 2; 2] = 1 - \{\bar{w}_1^{(4)}[2, 2]\}^2$ e $v^{(4)}[2, 2; 3] = 1 - \bar{w}^{(4)}[2, 2; 3] = 1 - \{\bar{w}_1^{(4)}(2, 3)\}^2$, da (39') segue

$$\tilde{v}_3^{(4)}[2, 2; 2] = 1 - (7/8)^2 = 0,234; \quad \tilde{v}_3^{(4)}[2, 2; 3] = 1 - (3/4)^2 = 0,437,$$

e quindi per (45) si ha

$$(45') \quad \tilde{u}_3^{(4)}[2, 2; 4] = 0,010.$$

Sostituendo infine in (43) i valori ora trovati si ha

$$\tilde{U}_3^{(4)}[2, 2; 4] = 0,291.$$

Osserviamo che si è ottenuto, come doveva essere, $\tilde{U}_3^{(4)} < \tilde{V}_3^{(4)}$. Infatti, avendo supposta uguale a t la temperatura superficiale variabile col tempo ed essendoci limitati all'intervallo $0 \leq t \leq 1/16$, questa si mantiene minore di uno. Pertanto il valore uno assunto come temperatura superficiale nel caso della costanza di questa, rappresenta una stabilizzazione sul massimo valore possibile per il caso variabile.

b) I calcoli sopra eseguiti possono essere usati anche per l'altro caso assai interessante di $\psi \equiv \sin t$. Con le stesse posizioni del caso a) è qui $\psi \equiv \sin(n/64)$.

Da (42), essendo $v^{(4)}[2, 2; 0] = v^{(4)}[2, 2; 1] = 0$, si ha

$$w^{(4)}[2, 2; 4] = \{ \sin(1/32) - \sin(1/64) \} \cdot v^{(4)}[2, 2; 2] + \sin(1/64) \cdot v^{(4)}[2, 2; 3].$$

A calcoli fatti si trova, nell'ordine di approssimazione scelto, lo stesso risultato del caso precedente come è ben naturale, in quanto, essendo l'intervallo di tempo assai piccolo ($t = 1/16$), si ha $\sin t \cong t$.

§ 8. - Bibliografia.

- [1] G. O'BRIEN, M. HYMAN and S. KAPLAN, *A study of the numerical solution differential equations*, J. Math. Phys. **29** (1951), 223-251.
- [2] FR. BLEICH und E. MELAN, *Die gewöhnlichen und partiellen Differenzgleichungen der Baustatik*, J. Springer, Berlin-Wien 1927.
- [3] H. S. CARSLAW and J. C. JAEGER, *Conduction of heat in solids*, Clarendon, Oxford 1948.
- [4] R. COURANT, K. FRIEDRISCH und H. LEWY, *Über die partiellen Differenzgleichungen der Mathematischen-Physik*, Math. Ann. **100** (1928), 32-74.
- [5] R. COURANT, E. ISAACSON and M. REES, *On the solution of non linear hyperbolic differential equations by finite differences*, Communications Appl. Math. New York, **5** (1952), 243-255.
- [6] J. CRANK and P. NICOLSON, *A practical method for the numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat conduction type*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **43** (1947), 50-67.
- [7] R. P. EDDY, *Stability in the numerical solution of initial value problems in partial differential equations*, Naval Ordnance Laboratory Memorandum 10232 (1949).
- [8] C. M. FOWLER, *Analysis of numerical solutions of transient heat-flow problems* Quart. Appl. Math. **3** (1945), 361-376.

- [9] F. B. HILDEBRAND, *On the convergence of numerical solutions of the heat-flow equation*, J. Math. Phys. **31** (1952), 35-41.
- [10] F. B. HILDEBRAND, *Methods of applied mathematics*, Prentice-Hall, New York 1954.
- [11] F. JOHN, *On integration of parabolic equations by difference methods*, Comm. Pure Appl. Math. **5** (1952), 155-211.
- [12] F. JOHN, *Numerical solution of the equation of heat conduction for preceding times*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **40** (1955), 129-142.
- [13] W. LEUTERT, *On the convergence of unstable approximate solutions of the heat equation to the exact solution*, J. Math. Phys. **30** (1952), 245-251.
- [14] H. LEWY, *On the convergence of solutions of difference equations*, Studies and Essay, COURANT Anniversary Volume, pp. 211-214, Interscience, New York 1948.
- [15] E. MACCAFERRI, *Calcolo numerico approssimato*, Hoepli, Milano 1919.
- [16] B. MANFREDI, *Soluzioni numeriche in problemi di flusso lineare di calore*, Riv. Mat. Univ. Parma **6** (1955), 141-155.
-
- [17] B. MANFREDI, *Calcolo numerico della temperatura in uno strato piano sotto assegnate condizioni al contorno variabili col tempo*, Riv. Mat. Univ. Parma **6** (1955), 363-374.
- [18] M. PICONE, *Appunti di Analisi superiore*, Rondinella, Napoli 1940.
- [19] G. SANSONE, *Lezioni di Analisi matematica*, vol. II, Cedam, Padova 1954.
- [20] L. TONELLI, *Serie trigonometriche*, Zanichelli, Bologna 1928.
- [21] P. WIJDENES, *Noordhoff's Wiskundige Tafels in 5 decimalen*, Noordhoff, Groningen 1953.

